О кратных интегралах, представимых в виде линейной формы от $1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2k-1)$

В. Х. САЛИХОВ, А. И. ФРОЛОВИЧЕВ
Брянский государственный
технический университет
e-mail: nathality@yandex.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: кратные интегралы, кратные ряды, нечётные дзета-значения, линейные формы.

Аннотация

В работе доказана теорема о представимости кратного интеграла в виде линейной формы над $\mathbb{Q}$ от $1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2k-1)$. Эта теорема уточняет недавно полученные результаты Д. Васильева, В. Зудилина и С. Злобина.

Abstract

V. Kh. Salikhov, A. I. Frolovichev, On multiple integrals represented as a linear form in $1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2k-1)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 143—178.

A theorem on the presentability of a multiple integral as a linear form in $1, \zeta(3)$, $\zeta(5), \ldots, \zeta(2k-1)$ over $\mathbb{Q}$ is proved. This theorem refines the results recently obtained by D. Vasiliev, V. Zudilin, and S. Zlobin.

Рассмотрим интеграл

$$J_{2k-1} = \int\limits_{[0,1]^{2k-1}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{2k-1} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{\beta_j-1}\,dx_1\ldots dx_{2k-1}}{(1-x_1+x_1x_2-x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\ldots x_{2k-2}-x_1x_2\ldots x_{2k-1})^{\alpha_0}}, \tag{1}$$

где $k \geqslant 2$, все α_j, β_i принадлежат $\mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть для параметров интеграла* (1) *выполняются следующие условия*:

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1; \tag{2}$$

$$\alpha_r + \beta_r \leqslant \beta_{r+1} + \alpha_{r+2} \quad \text{при} \quad r = 0, \ldots, 2k-3, \tag{3}$$

где для единообразия положим $\beta_0 = 0$;

$$\max(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}) < \min(\alpha_{2j} + \beta_{2j}, \alpha_{2j+1} + \beta_{2j+1}) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, k-1; \tag{4}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 143—178.

если $\alpha_0 > \beta_1$, *то*

$$\beta_1 + \beta_3 + \ldots + \beta_{2k-1} \geqslant \alpha_0 + 1. \tag{5}$$

Тогда для некоторых $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Q}$

$$J_{2k-1} = r_1 + r_2\zeta(3) + r_3\zeta(5) + \ldots + r_k\zeta(2k-1). \tag{6}$$

Интегралы вида (1) рассматривались многими авторами начиная с Ф. Бейкерса, у которого в [5] $k = 2$, все параметры α_i, β_j — равные натуральные числа. В этой же ситуации для параметров при $k = 3$ результат, аналогичный теореме 1, был доказан Д. Васильевым [3]. Эти результаты обобщил в 2002 г. В. Зудилин [7] для произвольного k. В его работе представление (6) доказано при выполнении в (3) равенств для $r = 1, \ldots, 2k-3$. Все эти результаты содержатся в теореме 1. В [4] получен результат, аналогичный теореме 1, но при более обременительных условиях на параметры интеграла (1).

Замечание 1. Из (3) и (4) совсем просто следует неравенство вида

$$\alpha_d + \beta_1 + \beta_3 + \ldots + \beta_{2r-1} \geqslant \alpha_0 + 1 \quad \text{при} \quad r = 2, \ldots, k+1, \quad d \in \{2r-1, 2r\}. \tag{4$'$}$$

Действительно, если $r = 2$, $d = 3$, то $\alpha_3 + \beta_1 + \beta_3 \geqslant \alpha_0 + 1$ (см. (4) при $j = 1$ и (3) при $r = 0$); если $r = 2$, $d = 4$, то $\alpha_4 + \beta_1 + \beta_3 \geqslant \alpha_2 + \beta_2 + \beta_1 \geqslant \beta_2 + \alpha_0 + 1$; если $r > 2$, то

1) $\alpha_{2r-1} + \beta_{2r-1} \geqslant \alpha_{2r-2}$ ввиду (4), и (4$'$) выполняется по индукции;
2) $\alpha_{2r} + \beta_{2r-1} \geqslant \alpha_{2r-2} + \beta_{2r-2}$ ввиду (3), и (4$'$) снова выполняется по индукции.

Замечание 2. Условие (2) не является обязательным. В конце работы мы приводим более общие, но более громоздкие условия на параметры α_i, β_j, чем (2)—(5), обеспечивающие равенство (6).

Для доказательства теоремы 1 мы применяем кратные ряды специального вида. Многие результаты будут доказаны в несколько большей общности, чем это необходимо для доказательства теоремы 1. Их можно применять для вычисления других кратных интегралов. Впервые в подобной ситуации двукратные ряды использовал Д. Васильев [3] для представления интеграла J_5 в виде (6). Наконец, заметим, что метод доказательства теоремы 1 позволил А. И. Фроловичеву получить соответствующий результат для интеграла J_{2k}:

$$J_{2k} = r_0 + r_1\zeta(2) + r_2\zeta(4) + \ldots + r_k\zeta(2k).$$

1. Кратные ряды, представляющие линейные формы от $1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2m+1)$ над $\mathbb{Q}$

Пусть $m \in \mathbb{N}$,

$$Q_j(x) = \prod_{i=1}^{d_j} (x + a_{j,i})^{\nu_{j,i}} \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m,$$

где d_j и все $a_{j,i}$ принадлежат $\mathbb{N}$, $a_{j,1}, \ldots, a_{j,d_j}$ различны,

$$\nu_{j,i} \in \{1, 2\} \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, d_j, \tag{7}$$

$\bar{Q}_m = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$, $q_j = \deg Q_j$, $j = 1, \ldots, m$. Обозначим

$$A_j = \{\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,d_j}\}, \quad A_{j2} = \{\alpha_{j,i} \in A_j \mid \nu_{j,i} = 2\}, \ A_{j2} \neq \varnothing, \quad A_{j1} = A_j \setminus A_{j2};$$
$$e_j = \min_{A_j} a_{j,i}, \quad f_j = \max_{A_j} a_{j,i}, \quad E_j = \min_{A_{j2}} \alpha_{j,i}, \quad F_j = \max_{A_{j2}} \alpha_{j,i}.$$

Очевидно, что $e_j \leqslant E_j \leqslant F_j \leqslant f_j$. Пусть, далее,

$$P = P_m \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m], \quad q_j = \deg_{x_j} P_m, \quad p_j = \deg_{x_j} P_m \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$R_m = \frac{P_m}{Q_1(x_1) \ldots Q_m(x_m)},$$

$\lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{Z}$, $\bar{\lambda}_{m-1} = (\lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Обозначим

$$(\mathrm{I}) = \mathrm{I}(P, \bar{Q}_m) = \{p_j \leqslant q_j - 2 \text{ при } j = 1, \ldots, m\},$$
$$(\mathrm{II}) = \mathrm{II}(\bar{Q}_m) = \{f_{j-1} < E_j + \lambda_j \text{ при } j = 2, \ldots, m\},$$
$$(\mathrm{III}) = \mathrm{III}(\bar{Q}_m) = \{F_{j-1} < e_j + \lambda_j \text{ при } j = 2, \ldots, m\}.$$

Соответствующие неравенства при фиксированном j обозначим I_j, II_j, III_j или, более подробно, $\mathrm{I}_j(P, \bar{Q}_m)$ и т. д.

Рассмотрим кратный ряд вида

$$\Sigma_m(P, \bar{Q}_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = \Sigma_m(R_m) = \Sigma_m =$$
$$= D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l} P_m(t_1, \ldots, t_m)}{Q_1(t_1) \ldots Q_m(t_m)}, \tag{8}$$

где оператор D_σ определяется формулой

$$D_\sigma(f(\sigma)) = f'(0);$$

суммирование в (8) проходит по 2^{m-1} векторам $\bar{\rho}_m = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$, $\rho_1 = 1$, $\rho_j \in \{1, 2\}$ при $j = 2, \ldots, m$; $l = l(\bar{\rho}_m)$ — число координат вектора $\bar{\rho}_m$, равных 1;

$$t_j = \begin{cases} s_1 + \sigma, & \text{если } j = 1, \\ s_j, & \text{если } j = 2, \ldots, m, \ \rho_j = 1, \\ t_{j-1} + s_j + \lambda_j, & \text{если } j = 2, \ldots, m, \ \rho_j = 2. \end{cases} \tag{9}$$

Определение 1. Вектор $\bar{\lambda}_{m-1} \in \mathbb{Z}^{m-1}$ назовём допустимым для $R_m \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$, если для всех $\bar{\rho}_m, s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}^+$ и $t_1, \ldots, t_m$, определённых по формулам (9) при $\sigma = 0$, рациональная функция R_m не имеет полюса в точке $(t_1, \ldots, t_m)$.

Определение 2. Вектор $\bar{\lambda}_{m-1} \in \mathbb{Z}^{m-1}$ является допустимым для $\bar{Q}_m$, если для всех $j = 2, \ldots, m$, $r = 2, \ldots, j$ справедливо неравенство

$$\lambda_r + \ldots + \lambda_j + e_j \geqslant 1. \tag{10}$$

Покажем, что, если вектор $\bar{\lambda}_{m-1}$ допустим для $\bar{Q}_m$, то он допустим для

$$R_m = \frac{P_m(x_1, \ldots, x_m)}{Q_1(x_1) \ldots Q_m(x_m)}.$$

Действительно, $t_1 = s_1 \in \mathbb{Z}^+$, $Q_1(t_1) \neq 0$. Если $j \geqslant 2$, то при $\rho_j = 1$ из (9) получим $t_j = s_j \in \mathbb{Z}^+$, $Q_j(t_j) \neq 0$, при $\rho_j = 2$ определим такое $r \in \{2, \ldots, j\}$, что $\rho_{r-1} = 1$, $\rho_r = \ldots = \rho_j = 2$. Тогда из (9) получим

$$t_j = s_{r-1} + \ldots + s_j + \lambda_r + \ldots + \lambda_j \geqslant \lambda_r + \ldots + \lambda_j,$$

$Q_j(t_j) \neq 0$ (см. (10) и определение e_j).

Покажем, наконец, что из набора неравенств $\mathrm{III}(\bar{Q}_m)$ следует неравенство (10). Из $\mathrm{III}(\bar{Q}_m)$ имеем

$$\lambda_r + \ldots + \lambda_j + e_j > \lambda_r + \ldots + \lambda_{j-1} + F_{j-1} \geqslant \\ \geqslant \lambda_r + \ldots + \lambda_{j-1} + e_{j-1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r + e_r \geqslant F_{r-1} \geqslant 1,$$

и (10) выполнено.

Нам будет полезно далее следующее утверждение о сохранении свойств (7), $\mathrm{II}(\bar{Q}_m)$ и $\mathrm{III}(\bar{Q}_m)$ при некоторых преобразованиях системы многочленов $\bar{Q}_m$.

Лемма 1. *Пусть для $\bar{Q}_m$ и $\bar{\lambda}_{m-1} \in \mathbb{Z}^{m-1}$ выполнены свойства* (7), $\mathrm{II}(\bar{Q}_m)$, $\mathrm{III}(\bar{Q}_m)$. *Тогда эти же свойства выполнены для $\bar{Q}'_{m-1}$ и $\bar{\lambda}'_{m-1}$ в следующих четырёх ситуациях*:

1) $$Q'_j(x) = \begin{cases} Q_j(x), & \text{если } j = 1, \ldots, \nu-2, \\ Q_{\nu-1}(x) Q_\nu(x + i + \lambda_\nu), & \text{если } j = \nu - 1, \\ Q_{j+1}(x), & \text{если } j = \nu, \ldots, m-1, \end{cases}$$

$$\lambda'_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } j = 2, \ldots, \nu-1, \\ \lambda_\nu + i + \lambda_{i+1}, & \text{если } j = \nu, \\ \lambda_{j+1}, & \text{если } j = \nu+1, \ldots, m-1, \end{cases}$$

где $\nu \in \{2, \ldots, m\}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i > \max(f_{\nu-1} - E_\nu - \lambda_\nu, F_{\nu-1} - e_\nu - \lambda_\nu)$;

2) $$Q'_j(x) = \begin{cases} Q_2(x + i + \lambda_2), & \text{если } j = 1, \\ Q_{j+1}(x), & \text{если } j = 2, \ldots, m-1, \end{cases}$$

$$\lambda'_j = \begin{cases} i + \lambda_2 + \lambda_3, & \text{если } j = 2, \\ \lambda_{j+1}, & \text{если } j = 3, \ldots, m-1, \end{cases}$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $i + \lambda_2 + e_2 \geqslant 1$;

3) $$Q'_j(x) = \begin{cases} Q_j(x), & \text{если } j = 1, \ldots, \nu-2, \\ Q_{\nu-1}(x)(x + i + \lambda_\nu), & \text{если } j = \nu - 1, \\ Q_{j+1}(x), & \text{если } j = \nu, \ldots, m-1, \end{cases}$$

$$\lambda'_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } j = 2, \ldots, \nu-1, \\ \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}, & \text{если } j = \nu, \\ \lambda_{j+1}, & \text{если } j = \nu+1, \ldots, m-1, \end{cases}$$

где $\nu \in \{2, \ldots, m\}$, $i \in A_\nu$;

4) $$Q'_j(x) = \begin{cases} Q_j(x), & \text{если } j = 1, \ldots, \nu-2, \\ (x+i)(x+a_\nu+\lambda_\nu)^2, & \text{если } j = \nu-1, \\ (x+\alpha_{j+1})^2, & \text{если } j = \nu, \ldots, m-1, \end{cases}$$

$$\lambda'_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } j = 2, \ldots, \nu-1, \\ \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}, & \text{если } j = \nu, \\ \lambda_{j+1}, & \text{если } j = \nu+1, \ldots, m-1, \end{cases}$$

где $\nu \in \{2, \ldots, m\}$, $j \in A_{\nu-1}$, $a_k \in A_{k2}$, $k = \nu, \ldots, m$.

Доказательство. Все четыре случая рассматриваются практически одинаково. Везде при $j \leqslant \nu-2$ и при $j > \nu$ (во втором случае при $j > 2$) $\mathrm{II}_j(\bar{Q}'_{m-1})$ и $\mathrm{III}_j(\bar{Q}'_{m-1})$ являются автоматическими следствиями из $\mathrm{II}(\bar{Q}_m)$ и $\mathrm{III}(\bar{Q}_m)$, а при $j \in \{\nu-1, \nu\}$ (во втором случае при $j = 1$) доказательство превращается в рутинную проверку. Мы приведём доказательства для случаев 1)—4) без особых комментариев.

1) Имеем $j + \lambda_\nu + e_\nu > F_{\nu-1}$, т. е. $i + \lambda_\nu + e_\nu \notin A_{\nu-1,2}$, $i + \lambda_\nu + E_\nu > f_{\nu-1}$, откуда следует (7) для $\bar{Q}'_{\nu-1}(x)$, так как многочлены $Q_{\nu-1}(x)$ и $Q_\nu(x + i + \lambda_\nu)$ могут иметь общие корни только кратности 1 для каждого многочлена. Кроме того, очевидно, что $e'_\nu - 1 = e_\nu - 1$, $E'_\nu - 1 = E'_\nu - 1$, $F'_{\nu-1} = i + \lambda_\nu + F_\nu$, $f'_{\nu-1} = i + \lambda_\nu + f_\nu$. Поэтому выполнены $\mathrm{II}_{\nu-1}(\bar{Q}'_{m-1})$ и $\mathrm{III}_{\nu-1}(\bar{Q}'_{m-1})$.

Далее, ввиду $\mathrm{II}_{\nu+1}(\bar{Q}_m)$ выполнено неравенство

$$i + \lambda_\nu + f_\nu < E_{\nu+1} + i + \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1},$$

которое имеет место тогда и только тогда, когда

$$f'_{\nu-1} < E'_\nu + \lambda'_\nu,$$

т. е. справедливо $\mathrm{II}_\nu(\bar{Q}'_{m-1})$.

Ввиду $\mathrm{III}_{\nu+1}(\bar{Q}_m)$ выполнено неравенство

$$i + \lambda_\nu + F_\nu < e_{\nu+1} + i + \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1},$$

которое имеет место тогда и только тогда, когда

$$F'_{\nu-1} < e'_\nu + \lambda'_\nu,$$

т. е. справедливо $\mathrm{III}_\nu(\bar{Q}'_{m-1})$. Тем самым утверждение леммы в случае 1) доказано.

2) Необходимо проверить лишь справедливость $\mathrm{II}_2(\bar{Q}'_{m-1})$ и $\mathrm{III}_2(\bar{Q}'_{m-1})$.

Ввиду $\mathrm{II}_3(\bar{Q}_m)$ справедливо неравенство

$$i + \lambda_2 + f_2 < E_3 + i + \lambda_2 + \lambda_3,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$i + \lambda_2 + f_2 < E_2' + \lambda_2',$$

т. е. имеет место $\mathrm{II}_2(\bar{Q}_{m-1}')$.

Ввиду $\mathrm{III}_3(\bar{Q}_m)$ имеем неравенство

$$i + \lambda_2 + F_2 < e_3 + i + \lambda_2 + \lambda_3,$$

которое справедливо тогда и только тогда, когда

$$i + \lambda_2 + F_2 < e_2' + \lambda_2',$$

т. е. имеет место $\mathrm{III}_2(\bar{Q}_{m-1}')$. Наконец, $i + \lambda_2 + e_2 \geqslant 1$, т. е. корни многочлена $Q_1'(x) = Q_2(x + i + \lambda_2)$ отрицательны, $A_1' \subset \mathbb{N}$.

3) Так как $i \in A_\nu$, то

$$\lambda_\nu + i \geqslant \lambda_\nu + e_\nu > F_{\nu-1},$$

т. е. для многочлена $Q_{\nu-1}'(x)$ выполнено (7), кроме того, $e_{\nu-1}' = e_{\nu-1}$, $E_{\nu-1}' = E_{\nu-1}$. Поэтому выполнены $\mathrm{II}_{\nu-1}(\bar{Q}_{m-1}')$ и $\mathrm{III}_{\nu-1}(\bar{Q}_{m-1}')$.

Имеем $f_{\nu-1}' = \max(f_{\nu-1}, \lambda_\nu + i)$. Далее,

$$E_\nu' + \lambda_\nu' = E_{\nu+1} + \lambda_{\nu+1} + \lambda_\nu > f_\nu + \lambda_\nu \geqslant i + \lambda_\nu,$$
$$E_\nu' + \lambda_\nu' > f_\nu + \lambda_\nu \geqslant E_\nu + \lambda_\nu > f_{\nu-1}.$$

Но тогда $E_\nu' + \lambda_\nu' > f_{\nu-1}'$, т. е. имеет место $\mathrm{II}_\nu(\bar{Q}_{m-1}')$.

Имеем $F_{\nu-1}' = F_{\nu-1}$, а тогда

$$e_\nu' + \lambda_\nu' = e_{\nu+1} + \lambda_{\nu+1} + \lambda_\nu > F_\nu + \lambda_\nu \geqslant E_\nu + \lambda_\nu > f_{\nu-1} \geqslant F_{\nu-1},$$
$$e_\nu' + \lambda_\nu' > F_{\nu-1}',$$

т. е. справедливо $\mathrm{III}_\nu(\bar{Q}_{m-1}')$. Рассмотрение случая 3) завершено.

4) Имеем $a_\nu + \lambda_\nu \geqslant E_\nu + \lambda_\nu > f_{\nu-1} \geqslant i$, так как $a_\nu \in A_{\nu 2}$, $i \in A_{\nu-1}$. Следовательно, $e_{\nu-1}' = i$, $E_{\nu-1}' = F_{\nu-1}' = f_{\nu-1}' = a_\nu + \lambda_\nu$.

Необходимо проверить справедливость четырёх неравенств.

Имеем

$$a_\nu + \lambda_\nu + \lambda_{\nu-1} \geqslant E_\nu + \lambda_\nu + \lambda_{\nu-1} > E_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1} > f_{\nu-2},$$

а $f_{\nu-2} < a_\nu + \lambda_\nu + \lambda_{\nu-1}$ справедливо тогда и только тогда, когда $f_{\nu-2}' < E_{\nu-2}' + \lambda_{\nu-2}'$, т. е. имеет место $\mathrm{II}_{\nu-1}(\bar{Q}_{m-1}')$.

Имеем

$$i + \lambda_{\nu-1} \geqslant e_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1} > F_{\nu-2},$$

а $F_{\nu-2} < i + \lambda_{\nu-1}$ справедливо тогда и только тогда, когда $F_{\nu-2}' < e_{\nu-1}' + \lambda_{\nu-1}'$, т. е. имеет место $\mathrm{III}_{\nu-1}(\bar{Q}_{m-1}')$.

Имеем

$$a_{\nu+1} + \lambda_{\nu+1} \geqslant E_{\nu+1} + \lambda_{\nu+1} > f_\nu \geqslant F_\nu \geqslant a_\nu,$$

а $a_\nu + \lambda_\nu < a_{\nu+1} + \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}$ справедливо тогда и только тогда, когда $f_{\nu-1}' < E_\nu' + \lambda_\nu'$, т. е. имеет место $\mathrm{II}_\nu(\bar{Q'}_{m-1})$.

Неравенство $F'_{\nu-1} < e'_\nu + \lambda'_\nu$ справедливо тогда и только тогда, когда $a_\nu + \lambda_\nu < a_{\nu+1} + \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}$, но последнее неравенство следует из $\mathrm{II}_\nu(\bar{Q}'_{m-1})$. Таким образом, имеет место $\mathrm{III}_\nu(\bar{Q}'_{m-1})$.

Лемма доказана.

Обозначим

$$\Omega_m = \{r_0 + r_1\zeta(3) + r_2\zeta(5) + \ldots + r_m\zeta(2m+1) \mid r_i \in \mathbb{Q}\}. \tag{11}$$

Сформулируем основной результат данной работы о кратных рядах и начнём его доказательство (оно будет завершено в разделе 4). Из этого результата легко выводится теорема 1 (см. раздел 5).

Теорема 2. *При выполнении условий* (7) *и* (I)—(III) $\Sigma_m(P, \bar{Q}_m, \bar{\lambda}_{m-1}) \in \Omega_m$.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по m. При $m = 1$, опуская везде для краткости индекс $j = 1$, получим разложение $\frac{P(t)}{Q(t)}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{i=E}^{F} \frac{b_i}{(t+i)^2} + \sum_{i=e}^{f} \frac{c_i}{t+i}, \tag{12}$$

где все b_i, c_i принадлежат $\mathbb{Q}$, $b_i = 0$ при $i \notin A_{1,2}$, $c_i = 0$ при $j \notin A_1$.

Из (7) при $j = 1$ получим, что $\deg P \leqslant \deg Q - 2$, а тогда

$$\sum_{i=e}^{f} c_i = 0. \tag{13}$$

Из (8), (9), (12) и (13) аналогично, например, [6] имеем

$$\Sigma_1 = D_\sigma \sum_{s=0}^{\infty} \biggl(\sum_{i=E}^{F} \frac{b_i}{(s+i+z)^2} + \sum_{i=e}^{f} \frac{c_i}{s+i+z_1} \biggr) =$$
$$= -2\biggl(\sum_{i=E}^{F} b_j\biggr)\zeta(3) + 2\sum_{i=E}^{F} b_i \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{k^2} - \sum_{i=e}^{f-1} \biggl(\sum_{k=e}^{f-1} c_k\biggr) \frac{1}{i^2} = r_1 + r_2\zeta(3),$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, и утверждение теоремы 2 выполняется при $m = 1$.

Везде далее предполагается, что $m \geqslant 2$ и для каждого $n = 1, \ldots, m-1$ справедливо следующее утверждение:

$$\text{если выполнены условия (7) и (I)—(III), то } \Sigma_n \in \Omega_n. \tag{U_n}$$

Для доказательства теоремы необходимо показать справедливость (U_m). Сначала установим (U_m) для важнейшего частного случая сумм Σ_m, когда $P = 1$, $Q_j(x) = (x + a_j)^2$ (здесь $a_j \in \mathbb{N}$, $d_j = 1$, $q_j = 2$, $\rho_j = 0$, $e_j = E_j = F_j = f_j = a_j$, условия (II) и (III) совпадают и сводятся к неравенствам

$$a_{j-1} < a_j + \lambda_j \quad \text{при} \quad j = 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Утверждение (U_m) принимает следующий вид.

Предложение 1. *Пусть* $m \geqslant 2$, $\bar{a}_m = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}^m$, $\bar{\lambda}_{m-1} \in \mathbb{Z}^{m-1}$, *выполнены неравенства* (14) *и справедливы все утверждения* $(\mathrm{U}_1), \ldots, (\mathrm{U}_{m-1})$,

$$S_m = S_m(\bar{a}_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l}}{(t_1+a_1)^2 \ldots (t_m+a_m)^2}, \qquad (15)$$

где l, $\bar{\rho}_m$ *определены как в* (8), *а* t_j *определены по формулам* (9). *Тогда*

1) $S_m(\bar{a}_m, \bar{\lambda}_{m-1}) \in \Omega_m$;
2) *в представлении* $S_m(\bar{\alpha}_m, \bar{\lambda}_{m-1})$ *в виде* (11) r_m *равно* -2.

Для доказательства предложения 1 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть* $a \in \mathbb{Z}$, $R_m \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$, $\bar{\lambda}_{m-1} \in \mathbb{Z}^{m-1}$,

$$S_m = S_m(a, R_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{\substack{s_2,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+ \\ s_1 = a}} (-1)^{m-l} R_m(t_1, \ldots, t_m), \qquad (16)$$

где $(t_1, \ldots, t_m)$ *определены по формулам* (9) *при* $\sigma = 0$, R_m *не имеет полюсов в точках* $(a, t_2, \ldots, t_m)$ *при всех* $s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}^+$. *Тогда* $S_m(a, R_m, \bar{\lambda}_{m-1}) \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. Проведём индукцию по m. При $m = 1$ имеем $S_1 = R_1(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Пусть утверждение леммы верно для S_{m-1}, $m \geqslant 2$. Докажем его для S_m.

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$. Введём обозначения

$$i_0(\alpha) = \min(0, \alpha), \quad i_1(\alpha) = \max(0, \alpha) - 1. \qquad (17)$$

Как обычно, $\sum\limits_{i=i_1}^{i_2} a_i = 0$, если $i_1 > i_2$. Покажем, что

$$S_m(a, R_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = \pm \sum_{i=i_0(\alpha)}^{i_1(\alpha)} S_{m-1}(i, R^*_{m-1}, \bar{\lambda}^*_{m-2}), \qquad (18)$$

где знак плюс выбираем в случае $\alpha > 0$, знак минус в случае $\alpha < 0$,

$$R^*_{m-1} = R_m(a, x_1, \ldots, x_{m-1}), \quad \bar{\lambda}^*_{m-2} = (\lambda_3, \ldots, \lambda_m).$$

Утверждение леммы следует из (18) даже в более точной форме: S_m есть конечная линейная комбинация значений функций R_m в некотором наборе точек $\bar{b} \in \mathbb{Z}^m$ с коэффициентами ± 1.

Рассмотрим 2^{m-2} пар векторов $\{\bar{\rho}_m^{(1)}, \bar{\rho}_m^{(2)}\}$, где

$$\bar{\rho}_m^{(1)} = (1, 1, \rho_3, \ldots, \rho_m), \quad \bar{\rho}_m^{(2)} = (1, 2, \rho_3, \ldots, \rho_m).$$

Пусть $l = l(\bar{\rho}_m^{(1)})$. Тогда $l(\bar{\rho}_m^{(2)}) = l - 1$, $l \geqslant 2$. Пусть $\rho_3 = \ldots = \rho_{r+1} = 2$ для $(r-1)$ координат, где $r \in \{1, \ldots, m-1\}$, $r = 1$, если $\rho_3 = 1$. Для векторов $\bar{\rho}_m^{(1)}$ из (9) $t_2^{(1)} = s_2$; при $j \in \{3, \ldots, r+1\}$ имеем $t_j^{(1)} = s_2 + \ldots + s_j + \lambda_3 + \ldots + \lambda_j$, $t_{r+2}^{(1)} = s_{r+2}$. Для векторов $\bar{\rho}_m^{(2)}$ аналогично $t_2^{(2)} = s_1 + s_2 + \lambda_2 = s_2 + a + \lambda_2$; при

$j \in \{3, \ldots, r+1\}$ $t_j^{(2)} = a + \lambda_2 + s_2 + \ldots + s_j + \lambda_3 + \ldots + \lambda_j$, $t_{r+2}^{(2)} = t_{r+2}^{(1)} = s_{r+2}$ при $r \leqslant m-2$.

Производя суммирование в (16) по переменной s_2 получим

$$\begin{aligned}
S_m &= S_m(a, R_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = \\
&= \sum_{l=2}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_2,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} (-1)^{m-l}(R_m(a, s_2, s_2+s_3+\lambda_3, \ldots) - \\
&- R_m(a, a+\lambda_2+s_2, a+\lambda_2+s_2+s_3+\lambda_3, \ldots)) = \\
&= \pm \sum_{i=i_0(\alpha+\lambda_2)}^{i_1(\alpha+\lambda_2)} \sum_{l=2}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m^{(1)}} \sum_{\substack{s_2,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+ \\ s_2 = i}} (-1)^{m-l} R_m(\alpha, s_2, s_2+s_3+\lambda_3, \ldots). \qquad (19)
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\bar{\rho}_m^{(1)} = (1, \bar{\rho}'_{m-1})$, где $\bar{\rho}'_{m-1}$ пробегает все возможные векторы $\bar{\rho}_{m-1}$, $l' = l(\bar{\rho}'_{m-1}) = l-1$. Проведём замену $(s'_j, \lambda'_j, t'_j) = (s_j, \lambda_j, t_j)$ при $j = 1, \ldots, m-1$. Из (19) получим

$$\begin{aligned}
&S_m(a, R_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = \\
&\qquad = \pm \sum_{i=i_0(\alpha+\lambda_2)}^{i_1(\alpha+\lambda_2)} \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar{\rho}'_{m-1}} \sum_{\substack{s'_2,\ldots,s'_m \in \mathbb{Z}^+ \\ s'_1 = i}} (-1)^{m-1-l'} R_m(a, s'_1, t'_2, \ldots, t'_{m-1}),
\end{aligned}$$

что соответствует (18), и лемма доказана.

Замечание 3. Из доказательства леммы видно, что при любом способе определения частичных сумм кратного ряда (треугольном, прямоугольном или сферическом) ряд S_m сходится, так как его частичные суммы стабилизируются и ряд сводится к конечной сумме.

Замечание 4. Из (I) следует, что ряды в (8) и (15) (до применения оператора D_σ) сходятся абсолютно и равномерно для $\sigma \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, так как они мажорируются для некоторого $C > 0$ рядом

$$\sum_{s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{C}{(s_1+\frac{1}{2})^2 (s_2+1)^2 \ldots (s_m+1)^2},$$

который сходится при любом способе определения частичных сумм. Это же верно для ряда, полученного из (8) почленным применением оператора $\frac{\partial}{\partial \sigma}$. Поэтому законны любые перестановки членов ряда, а также почленное применение оператора D_σ.

Нам будут полезны следующие преобразования рядов (8): пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \{1, \ldots, m\}$. Введём обозначение

$$T_{\nu,\alpha,\beta}(\Sigma_m) = D_\sigma \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{\bar\rho_m \\ \rho_\nu=1}} \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_m\in\mathbb{Z}^+ \\ s_\nu\geqslant\alpha}} (-1)^{m-l} R_m(t_1,\ldots,t_m) +$$

$$+ D_\sigma \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{\bar\rho_m \\ \rho_\nu=2}} \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_m\in\mathbb{Z}^+ \\ s_\nu\geqslant\beta}} (-1)^{m-l} R_m(t_1,\ldots,t_m), \quad (20)$$

где в случае $\nu = 1$ второй ряд отсутствует, так как $\rho_1 = 1$. Соответствующий оператор при $\nu = 1$ обозначим $T_{1,\alpha}$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha + e_\nu \geqslant 1$, где $\nu \in \{1,\ldots,m\}$, $\beta > f_{\nu-1} - E_\nu - \lambda_\nu$, $\beta > F_{\nu-1} - e_\nu - \lambda$, где $\nu \in \{2,\ldots,m\}$. Тогда в условиях теоремы 2 и в предположении, что выполнены $(\mathrm{U}_1),\ldots,(\mathrm{U}_{m-1})$,*

$$T_{\nu,\alpha,\beta}(\Sigma_m) - \Sigma_m \in \Omega_{m-1}, \quad \nu = 2,\ldots,m, \quad (21)$$

$$T_{1,\alpha}(\Sigma_m) - \Sigma_m \in \Omega_{m-1}. \quad (22)$$

Доказательство.

1. Начнём с самого простого случая: докажем (21) при $\nu = m$. Пусть $\bar\rho_m^{(1)} = (\bar\rho'_{m-1}, 1)$, $\bar\rho_m^{(2)} = (\bar\rho'_{m-1}, 2)$, где $\bar\rho'_{m-1}$ — произвольный вектор $\bar\rho_{m-1}$. В первом случае из (9) имеем $t_m = s_m$, во втором $t_m = s_m + t_{m-1} + \lambda_m$. Из (8) и (20), производя суммирование по переменной s_m, получим

$$\begin{aligned}
&T_{m,\alpha,\beta}(\Sigma_m) - \Sigma_m = \\
&\quad = -\operatorname{sign}(\alpha) \sum_{i=i_0(\alpha)}^{i_1(\alpha)} \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \sum_{s_2,\ldots,s_{m-1}\in\mathbb{Z}^+} (-1)^{m-1-l'} \times \\
&\quad \times \frac{P_m(t_1,\ldots,t_{m-1},i)}{Q_1(t_1)\ldots Q_{m-1}(t_{m-1})Q_m(i)} + \\
&\quad + \operatorname{sign}(\beta) \sum_{i=i_0(\beta)}^{i_1(\beta)} \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \sum_{s_1,\ldots,s_{m-1}\in\mathbb{Z}^+} (-1)^{m-1-l'} \times \\
&\quad \times \frac{P_m(t_1,\ldots,t_{m-1},t_{m-1}+i+\lambda_m)}{Q_1(t_1)\ldots Q_{m-2}(t_{m-2})Q_{m-1}(t_{m-1})Q_m(t_{m-1}+i+\lambda_m)}, \quad l' = l(\bar\rho'_{m-1}).
\end{aligned} \quad (23)$$

При фиксированном i каждое слагаемое первой суммы имеет вид

$$\Sigma_{m-1}\left(\frac{1}{Q_m(i)} P_m(t_1,\ldots,t_{m-1},i); \bar Q_{m-1}; \bar\lambda_{m-2}\right),$$

все условия (7), (I)—(III) для него выполнены тривиально; $Q_m(i) \neq 0$, так как при $i \geqslant 0$ это очевидно, а в случае $\alpha < 0$, $i \in \{\alpha,\ldots,-1\}$ имеем $i + e_m \geqslant \alpha + e_m \geqslant 1$. Поэтому по утверждению (U_{m-1}) все слагаемые первой суммы — элементы Ω_{m-1}.

Каждое слагаемое второй суммы при фиксированном i имеет знаменатель вида 1) из леммы 1 при $\nu=m$, поэтому выполнены условия (7), $\mathrm{II}(\bar{Q}'_{m-1})$ и $\mathrm{III}(\bar{Q}'_{m-1})$. Остаётся проверить справедливость $\mathrm{I}(P'_{m-1},\bar{Q}'_{m-1})$, где $P'_{m-1}==P_m(x_1,\ldots,x_{m-1},x_{m-1}+i+\lambda_m)$. Имеем очевидные соотношения $\rho'_j\leqslant\rho_j$ при $j=1,\ldots,m-2$, $\rho'_{m-1}\leqslant\rho_{m-1}+\rho_m$, $q'_j=q_j$ при $j=1,\ldots,m-2$, $q'_{m-1}=q_{m-1}+q_m$, откуда следует $\mathrm{I}(P'_{m-1},\bar{Q}'_{m-1})$. По утверждению (U_{m-1}) все слагаемые второй суммы в (23) — элементы Ω_{m-1}, т. е. (21) справедливо при $\nu=m$.

2. Докажем теперь (21) при $\nu\in\{2,\ldots,m-1\}$. Обозначим $\bar{\rho}_m^{(1)}=\{\bar{\rho}_m\mid\rho_\nu=1\}$, $\bar{\rho}_m^{(2)}=\{\bar{\rho}_m\mid\rho_\nu=2\}$, $\bar{\rho}_m^{(1)}=(\bar{\rho}'_{\nu-1},\bar{\rho}^*_{m-\nu+1})$, где $\bar{\rho}'_{\nu-1}$ и $\bar{\rho}^*_{m-\nu+1}$ — произвольные векторы $\bar{\rho}_{\nu-1}$ и $\bar{\rho}_{m-\nu+1}$ соответственно; $l'=l(\bar{\rho}'_{\nu-1})$, $l^*=l(\bar{\rho}^*_{m-\nu+1})$, $l'+l^*=l=l(\bar{\rho}_m^{(1)})$, $l\geqslant 2$.

Аналогично (23) получим

$$T_{\nu,\alpha,\beta}(\Sigma_m)-\Sigma_m=\sigma_1+\sigma_2, \tag{24}$$

$$\sigma_1=-\operatorname{sign}(\alpha)\sum_{i=i_0(\alpha)}^{i_1(\alpha)}\frac{1}{Q_\nu(i)}\sigma_{1,i},\quad \sigma_2=-\operatorname{sign}(\beta)\sum_{i=i_0(\beta)}^{i_1(\beta)}\sigma_{2,i}, \tag{25}$$

$$\sigma_{1,i}=D_\sigma\sum_{l'=1}^{\nu-1}\sum_{\bar{\rho}'_{\nu-1}}\sum_{s_1,\ldots,s_{\nu-1}\in\mathbb{Z}^+}\frac{(-1)^{\nu-1-l'}}{Q_1(t_1)\ldots Q_{\nu-1}(t_{\nu-1})}\times$$
$$\times\Bigg[\sum_{l^*=1}^{m-\nu+1}\sum_{\bar{\rho}^*_{m-\nu+1}}\sum_{\substack{s_{\nu+1},\ldots,s_m\in\mathbb{Z}^+\\ s_\nu=i}}(-1)^{m-\nu+1-l^*}\frac{P_m(t_1,\ldots,t_{\nu-1},s_\nu,t_{\nu+1},\ldots,t_m)}{Q_{\nu+1}(t_{\nu+1})\ldots Q_m(t_m)}\Bigg], \tag{26}$$

$$\sigma_{2,i}=D_\sigma\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{\bar{\rho}_m^{(2)}}\sum_{\substack{s_1,\ldots,s_m\in\mathbb{Z}^+\\ s_\nu=i}}\frac{(-1)^{m-l}P_m(t_1,\ldots,t_m)}{Q_1(t_1)\ldots Q_m(t_m)}. \tag{27}$$

Рассмотрим $\sigma_{1,i}$. Имеем, как в пункте 1, $Q_\nu(i)\neq 0$ ввиду $\alpha+e_\nu\geqslant 1$. Как при рассмотрении (10), из $\mathrm{III}(\bar{Q}_m)$ получим $Q_j(t_j)\neq 0$ при $j>\nu$.

Проведём суммирование по переменным $s_{\nu+1},\ldots,s_m$ в (26). По лемме 2 (см. также замечание 3) получим, что сумма в квадратных скобках есть некоторый многочлен $P^*_{\nu-1,i}(t_1,\ldots,t_{\nu-1})$, $P^*_{\nu-1,i}\in\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_{\nu-1}]$, $\deg_{x_j}P^*_{\nu-1,i}\leqslant p_j$ при $j=1,\ldots,\nu-1$. Все условия (7), (I)—(III) для $\sigma_{1,i}=\Sigma_{\nu-1}(P^*_{\nu-1,i},Q_{\nu-1},\bar{\lambda}_{\nu-2})$ выполнены ввиду (7), (I)—(III) для Σ_m. Поэтому по утверждению $(\mathrm{U}_{\nu-1})$ получаем, что $\sigma_{1,i}\in\Omega_{\nu-1}$, а тогда и $\sigma_1\in\Omega_{\nu-1}$ (см. (25)).

Рассмотрим (27). Имеем $l(\bar{\rho}_m^{(2)})=l$, $t_\nu=t_{\nu-1}+i+\lambda_\nu$. Если $\rho_{\nu+1}=2$, то

$$t_{\nu+1}=t_\nu+s_{\nu+1}+\lambda_{\nu+1}=t_{\nu-1}+s_{\nu+1}+i+\lambda_\nu+\lambda_{\nu+1}.$$

Проведём замену $(\rho_j,\lambda_j,Q_j,s_j,t_j)\to(\rho'_j,\lambda'_j,Q'_j,s'_j,t'_j)$, где Q'_j, λ'_j определены как в пункте 1) леммы 1,

$$(\rho'_j, s'_j, t'_j) = \begin{cases} (\rho_j, s_j, t_j), & \text{если } j = 1, \dots, \nu - 1, \\ (\rho_{j+1}, s_{j+1}, t_{j+1}), & \text{если } j = \nu, \dots, m - 1. \end{cases} \tag{28}$$

Обозначим

$$P_{m-1,i} = P(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu-1} + i + \lambda_\nu, x_\nu, \dots, x_{\nu-1}).$$

Из неравенств для β следуют аналогичные для i, т. е. условия пункта 1) леммы 1 выполнены (если $i \geqslant 0$, то всё ясно, так как из II_ν и III_ν следует, что $f_{\nu-1} - E_\nu - \lambda_\nu < 0$, $F_{\nu-1} - e_\nu - \lambda_\nu < 0$; если же $i < 0$, то $\beta < 0$, $i \geqslant \beta$). После замены (28) получим, что $\sigma_{2,i} = -\Sigma_{m-1}(P_{m-1,i}, \bar{Q}'_{m-1}, \bar{\lambda}'_{m-2})$, по лемме 1 выполнены (7), $\mathrm{II}(\bar{Q}'_{m-1})$ и $\mathrm{III}(\bar{Q}'_{m-1})$.

Остаётся проверить, что имеет место $\mathrm{I}(\bar{Q}'_{m-1})$. Аналогично пункту 1 $p'_j \leqslant p_j$ при $j = 1, \dots, \nu-2$, $p'_{\nu-1} \leqslant p_{\nu-1} + p_\nu$, $p'_j \leqslant p_{j+1}$ при $j = \nu, \dots, m-1$; $q'_j = q_j$ при $j = 1, \dots, \nu-2$, $q'_{\nu-1} = q_{\nu-1} + q_\nu$, $q'_j = q_{j+1}$ при $j = \nu, \dots, m-1$. Поэтому $\mathrm{I}(\bar{Q}'_{m-1})$ следует из $\mathrm{I}(Q_m)$. Итак, по утверждению (U_{m-1}) получаем, что $\sigma_{2,i} \in \Omega_{m-1}$. Из (25) следует, что $\sigma_2 \in \Omega_{m-1}$, из (24) имеем (21), так как $\sigma_1 \in \Omega_{\nu-1}$.

3. Докажем (22). Пусть

$$\bar{\rho}_m = \Bigl(1, \underbrace{2, \dots, 2}_{r-1}, 1, \rho_{r+2}, \dots, \rho_m\Bigr), \quad r \in \{1, \dots, m\}.$$

Производя суммирование по переменной s_1, имеем

$$T_{1,\alpha}(\Sigma_m) - \Sigma = -\operatorname{sign}(\alpha) \sum_{i=i(\alpha)}^{i_1(\alpha)} D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{\substack{s_2, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+ \\ s_1 = i}} (-1)^{m-1} \times \\ \times \frac{P_m(t_1, \dots, t_m)}{Q_1(s_1 + \sigma) Q_2(t_2) \dots Q_m(t_m)}, \tag{29}$$

где $t_1 = s_1 + \sigma = i + \sigma$, $t_j = s_2 + \ldots + s_j + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j + i + \sigma$ при $j = 2, \dots, r$, $t_{\nu+1} = s_{\nu+1}$, t_j при $j = r+2, \dots, m$ определены по формулам (9).

Так как в рассматриваемой ситуации

$$D_\sigma(R(t_1, \dots, t_m)) = \frac{\partial R}{\partial x_1}(t_1, \dots, t_m)\Big|_{\sigma=0} + \sum_{\nu=2}^{r} \frac{\partial R}{\partial x_\nu}(t_1, \dots, t_m)\Big|_{\sigma=0},$$

где второе слагаемое отсутствует при $r = 1$, то из (29) следует, что

$$T_{1,\alpha}(\Sigma_m) - \Sigma_m = -\operatorname{sign}(\alpha) \sum_{i=i_0(\alpha)}^{i_1(\alpha)} \sigma_{1,i} - \operatorname{sign}(\alpha) \sum_{i=i_0(\alpha)}^{i_1(\alpha)} \frac{1}{Q_1(i)} \sigma_{2,i}, \tag{30}$$

где

$$\sigma_{1,i} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{\substack{s_2, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+ \\ s_1 = i}} (-1)^{m-l} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{P_m(t_1, \dots, t_m)}{Q_1(t_1) \dots Q_m(t_m)} \right), \tag{31}$$

$t_1 = s_1$, t_j определены по формулам (9) при $j = 2, \ldots, m$,

$$\sigma_{2,i} = D_\sigma \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{\bar\rho_m \\ r>1}} \sum_{s_2,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} (-1)^{m-l} \frac{P(i, t_2, \ldots, t_m)}{Q_2(t_2)\ldots Q_m(t_m)}, \tag{32}$$

$t_2 = s_2 + i + \lambda_2 + \sigma$, $t_j = s_2 + \ldots + s_j + i + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j + \sigma$ при $j = 3, \ldots, r$, $t_{r+1} = s_{r+1}$, t_j при $j = r+2, \ldots, m$ определены по формулам (9).

Рассмотрим сначала (31). Ввиду условия $\alpha + e_1 \geqslant 1$ стандартным образом имеем $Q_1(i) \neq 0$. Для $j = 2, \ldots, r$, как при рассмотрении (10), получим, что $Q_j(t_j) \neq 0$, так как

$$t_j + e_j = s_2 + \ldots + s_j + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j + e_i + i \geqslant i + e_1.$$

Следовательно, рациональная функция в сумме (31) удовлетворяет условиям леммы 2, т. е. для всех i

$$\sigma_{1,i} \in \mathbb{Q}. \tag{33}$$

В (32) проведём стандартный сдвиг вида (28): $\bar\rho'_{m-1} = (\rho_1, \rho_3, \ldots, \rho_m)$, $\bar Q'_{m-1} = (Q_2(x + i + \lambda_2), Q_3(x), \ldots, Q_m(x))$, $\bar\lambda'_{m-2} = (\lambda_3 + i + \lambda_2, \lambda_4, \ldots, \lambda_m)$, $s'_j = s_{j+1}$ при $j = 1, \ldots, m-1$, $t'_1 = s'_1 + \sigma$, t'_j определены формулами (9), где произведена замена $(s_j, t_j, \lambda_j) \to (s'_j, t'_j, \lambda'_j)$. По пункту 2) леммы 1 выполнены условия (7), $\mathrm{II}(\bar Q'_{m-1})$, $\mathrm{III}(\bar Q'_{m-1})$. Из (32) ввиду того, что $l(\bar\rho'_{m-1}) = l(\rho_m)$ (так как $r > 1$, то $\rho_2 = 2$), получим

$$\sigma_{2,i} = -\Sigma_{m-1}(P_m(i, x_1 + i + \lambda_2, x_2, \ldots, x_{m-1}), \bar Q'_{m-1}, \bar\lambda'_{m-2}).$$

Условия $\mathrm{I}(P'_{m-1}, \bar Q'_{m-1})$ проверяются тривиально. Поэтому по утверждению (U_{m-1}) для всех i

$$\sigma_{2,i} \in \Omega_{m-1}. \tag{34}$$

Из (30), (33) и (34) следует (22), и лемма доказана.

Теперь докажем лемму, фрагменты которой уже присутствовали в доказательстве леммы 3.

Лемма 4. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и для них выполнены те же условия, что и в лемме 3, $\nu \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда*

$$T_{\gamma,\alpha,\beta}(\Sigma_m(R_m, \bar\lambda_{m-1})) = \Sigma_m(R'_m, \bar\lambda'_{m-1}), \tag{35}$$

где

$$R'_m = R_m(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu + \alpha, x_{\nu+1}, \ldots, x_m), \tag{36}$$

$$\bar\lambda'_{m-1} = (\lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu + \beta - \alpha, \lambda_{\nu+1} + \alpha, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m), \tag{37}$$

при $\nu = 1$ $T_{\nu,\alpha,\beta}$ есть $T_{1,\alpha}$, в (37) отсутствует $\lambda_\nu + \beta - \alpha$; при $\nu = m$ в (37) отсутствует $\lambda_{\nu+1} + \alpha$.

Доказательство.

1. Рассмотрим в (20) сначала первую сумму, в которой $\rho_\nu = 1$. Так как $s_\nu \geqslant \alpha$, то $s_\nu = s'_\nu + \alpha$, $s'_\nu \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $s'_j = s_j$ при $j = 1, \dots, m$, $j \neq \nu$; t'_j определяются по формулам (9), где сделана замена $(s_j, \lambda_j) \to (s'_j, \lambda'_j)$, λ'_j определены в (37). Тогда

$$\Sigma'_m = \Sigma_m(R'_m, \bar{\lambda}'_{m-1}) = D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s'_1,\dots,s'_m \in \mathbb{Z}^+} (-1)^{m-l} R'_m(t'_1, \dots, t'_m). \tag{38}$$

Покажем, что множество членов ряда (38) идентично множеству членов ряда (20) при таких $\bar{\rho}_m$, что $\rho_\nu = 1$.

1.1. Пусть $\rho_{\nu+1} = 1$. Тогда

$$t'_\nu = s'_\nu, \quad t'_{\nu+1} = s'_{\nu+1}, \quad t_\nu = t'_\nu + \alpha, \quad t_{\nu+1} = t'_{\nu+1}.$$

Из (37) имеем $t_j = t'_j$ при $j = 1, \dots, m$, $j \neq \nu$, т. е.

$$R'_m(t'_1, \dots, t'_m) = R_m(t'_1, \dots, t'_{\nu-1}, t'_\nu + \alpha, t'_{\nu+1}, \dots, t'_m) = R_m(t_1, \dots, t_m).$$

1.2. Пусть $\rho_{\nu+1} = 2$. Тогда

$$t'_\nu = s'_\nu,$$
$$t'_{\nu+1} = s'_{\nu+1} + t'_\nu + \lambda'_{\nu+1} = s_{\nu+1} + s_\nu - \alpha + \lambda_{\nu+1} + \alpha = t_{\nu+1},$$
$$t'_\nu = s_\nu - \alpha = t_\nu - \alpha.$$

Из (37) опять имеем $t_j = t'_j$ при $j = 1, \dots, m$, $j \neq \nu$ и, как в 1.1,

$$R'_m(t'_1, \dots, t'_m) = R_m(t_1, \dots, t_m).$$

2. Рассмотрим теперь в (20) вторую сумму, в которой $\rho_\nu = 2$, и докажем аналогичное пункту 1 утверждение леммы (здесь $s_\nu = s'_\nu + \beta$, $s'_\nu \in \mathbb{Z}^+$, остальное как в пункте 1).

2.1. Пусть $\rho_{\nu+1} = 1$. Тогда

$$t_\nu = t_{\nu-1} + s_\nu + \lambda_\nu,$$
$$t'_\nu = t'_{\nu-1} + s'_\nu + \lambda'_\nu = t_{\nu-1} + s_\nu - \beta + \lambda_\nu + \beta - \alpha = t_\nu - \alpha,$$

т. е., как в 1.1, $t_\nu = t'_\nu + \alpha$. Далее, $t_{\nu+1} = s_{\nu+1} = s'_{\nu+1} = t'_{\nu+1}$, т. е., как в 1.1, $t_j = t'_j$ при $j \neq \nu$,

$$R'_m(t'_1, \dots, t'_m) = R_m(t_1, \dots, t_m).$$

2.2. Пусть $\rho_{\nu+1} = 2$. Как в пункте 2.1, $t_\nu = t'_\nu + \alpha$. Имеем

$$t_{\nu+1} = t_\nu + s_{\nu+1} + \lambda_{\nu+1},$$
$$t'_{\nu+1} = t'_\nu + s'_{\nu+1} + \lambda'_{\nu+1} = t_\nu - \alpha + s_{\nu+1} + \lambda_{\nu+1} + \alpha = t_{\nu+1},$$

аналогично предыдущему

$$R'_m(t'_1, \dots, t'_m) = R_m(t_1, \dots, t_m),$$

и лемма доказана.

2. Представление кратных интегралов в виде кратных рядов

В этом разделе мы представим интеграл (1) в виде ряда (8). Ряд доказываемых лемм будет полезен для вычисления других кратных интегралов, в частности J_{2k}. Кроме того, мы докажем ещё один вспомогательный результат (лемма 9), необходимый для доказательства предложения 1. Существенную роль будет играть гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(a,b,c,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)\Gamma(c)z^s}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(s+1)\Gamma(s+c)}.$$

Лемма 5. *Пусть* $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, $a + b \geqslant c$, $z \in (0;1)$. *Тогда*

$$\int_0^1 \frac{x^a(1-x)^b\,dx}{(1-xz)^{c+1}} = \frac{(-1)^{b+c+1}}{\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+1-c)} \times$$
$$\times D_\sigma \sum_{t=\min(n,l)}^{\infty} (t-l+1+\sigma)\ldots(t+\sigma)(t-n+1+\sigma)\ldots(t+m+\sigma)(1-z)^{t-n+\sigma}, \tag{39}$$

где $n = \min(a,c)$, $m = \max(a,c) - \min(a,c)$, $l = a+b-\max(a,c)$.

Доказательство. По формуле Эйлера [1, с. 72, формула (10)]

$$\int_0^1 \frac{x^a(1-x)^b\,dx}{(1-xz)^{c+1}} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} F(c+1, a+1, a+b+2, z). \tag{40}$$

По [1, с. 82, формула (4)] для $n, m, l \in \mathbb{Z}^+$

$$F(c+1, a+1, a+b+2, z) = F(n+1, n+m+1, n+m+l+2, z) =$$
$$= \frac{(-1)^{m+1}(n+m+l+1)!}{l!\,n!\,(n+m)!\,(n+l)!} \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}\left[(1-z)^{m+l}\frac{d^l}{dz^l}\left(\frac{\ln(1-z)}{z}\right)\right], \tag{41}$$

где $n = \min(a,c) \in \mathbb{Z}^+$, $m = \max(a,c) - \min(a,c) \in \mathbb{Z}^+$, $l = a+b-\max(a,c) \in \mathbb{Z}^+$ ввиду $a+b \geqslant c$, $b \in \mathbb{Z}^+$.

При фиксированном $z \in (0,1)$ имеем

$$\ln(1-z) = D_\sigma(1-z)^\sigma, \quad \frac{1}{z} = \sum_{t=0}^{\infty}(1-z)^t.$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{(-1)^{m+1}(n+m+l+1)!}{n!\,l!\,(m+l)!\,(n+m)!}. \tag{42}$$

Из (41) и (42) имеем последовательно

$$F(c+1, a+1, a+b+2, z) = \lambda D_\sigma \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}\left[(1-z)^{m+l}\frac{d^l}{dz^l}\sum_{t=0}^{\infty}(1-z)^{t+\sigma}\right] =$$

$$= \lambda(-1)^l D_\sigma \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} \sum_{t=0}^{\infty} (t-l+1+\sigma)\dots(t+\sigma)(1-z)^{t+m+\sigma} =$$

$$= \lambda(-1)^{m+n+l} D_\sigma \sum_{t=\min(n,l)}^{\infty} (t-l+1+\sigma)\dots(t+\sigma)\times$$

$$\times (t-n+1+\sigma)\dots(t+m+\sigma)(1-z)^{t-n+\sigma}. \tag{43}$$

Мы воспользовались тем, что слагаемые ряда(43) обращаются в нуль при применении оператора D_σ для $0 < t < \min(n,l)$.

Далее, $n!\,(m+n)! = \Gamma(a+1)\Gamma(c+1)$, $l!\,(m+l)! = \Gamma(b+1)\Gamma(a+b+1-c)$, $(-1)^{l+n+1} = (-1)^{b+c+1}$. Поэтому из (42) имеем

$$(-1)^{m+n+l}\lambda = \frac{(-1)^{b+c+1}\Gamma(a+b+2)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+1-c)},$$

а тогда из (40) и (43) следует (39).

Лемма 6. *Пусть* $\mu,\nu \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1,-2,\dots$, $z \in (0,1)$,

$$J_{\mu,\nu,t}(z) = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu (1-xz)^t\,dx.$$

Тогда

$$J_{\mu,\nu,t}(z) = \frac{(-1)^\mu}{(t+1)\dots(t+\nu+\mu+1)}\times$$

$$\times\left(\sum_{s=0}^{\infty}(s-t-\mu)\dots(s-t-1)(s+1)\dots(s+\nu)(1-z)^s -\right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{\infty}(t+s+\mu+2)\dots(t+s+\mu+\nu+1)(s+1)\dots(s+\mu)(1-z)^{s+t+\mu+1}\right). \tag{44}$$

Доказательство. Везде далее считаем, что $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Если $t \in \mathbb{Z}^+$, $t = N$, то, полагая в (44) $t = N+\varepsilon$, $\varepsilon \in (0;1)$, можно сделать стандартный переход $\varepsilon \to 0+0$.

Применим одно из двадцати соотношений Куммера для гипергеометрической функции Гаусса (см. [1, с. 115, формула (33)]):

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a,b,a+b+1-c;1-z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c+1-a-b;1-z). \tag{45}$$

По формуле Эйлера, уже применявшейся в лемме 5,

$$J_{\mu,\nu,t}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+2)} F(-t,\nu+1,\nu+\mu+2;z). \tag{46}$$

Полагая в (45) $a = -t$, $b = \nu + 1$, $c = \nu + \mu + 2$, получим

$$F(-t, \nu+1, \nu+\mu+2; z) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+2)\Gamma(t+\mu+1)}{\Gamma(t+\mu+\nu+2)\Gamma(\mu+1)} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-t+s)\Gamma(\nu+s+1)}{\Gamma(-t)\Gamma(\nu+1)\Gamma(s+1)} \frac{\Gamma(-t-\mu)}{\Gamma(-t-\mu+s)} (1-z)^s +$$
$$+ \frac{\Gamma(\nu+\mu+2)\Gamma(-t-\mu-1)}{\Gamma(-t)\Gamma(\nu+1)} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(t+\mu+\nu+2+s)\Gamma(\mu+1+s)}{\Gamma(t+\mu+\nu+2)\Gamma(\mu+1)\Gamma(s+1)} \frac{\Gamma(t+\mu+2)}{\Gamma(t+\mu+2+s)} (1-z)^{s+t+\mu+1}. \quad (47)$$

Сократим ряд отношений гамма-функций в (47) с использованием следующих восьми дробей (по четыре на каждое слагаемое (47)):

1) $\dfrac{\Gamma(-t+s)}{\Gamma(-t-\mu+s)} = (-t-\mu+s)\ldots(-t+s-1) = (s-t-\mu)\ldots(s-t-1);$

2) $\dfrac{\Gamma(\nu+s+1)}{\Gamma(s+1)} = (s+1)\ldots(s+\nu);$

3) $\dfrac{\Gamma(-t-\mu)}{\Gamma(-t)} = \dfrac{1}{(-t-1)\ldots(-t-\mu)} = \dfrac{(-1)^{\mu}}{(t+1)\ldots(t+\mu)};$

4) $\dfrac{\Gamma(t+\mu+1)}{\Gamma(t+\mu+\nu+2)} = \dfrac{1}{(t+\mu+1)\ldots(t+\mu+\nu+1)};$

5) $\dfrac{\Gamma(t+\mu+\nu+2+s)}{\Gamma(t+\mu+2+s)} = (t+s+\mu+2)\ldots(t+s+\mu+\nu+1);$

6) $\dfrac{\Gamma(\mu+1+s)}{\Gamma(s+1)} = (s+1)\ldots(s+\mu);$

7) $\dfrac{\Gamma(t+\mu+2)}{\Gamma(t+\mu+\nu+2)} = \dfrac{1}{(t+\mu+2)\ldots(t+\mu+\nu+1)};$

8) $\dfrac{\Gamma(-t-\mu-1)}{\Gamma(-t)} = \dfrac{1}{(-t-\mu-1)\ldots(-t-1)} = \dfrac{(-1)^{\mu+1}}{(t+1)\ldots(t+\mu+1)}.$

Тогда из (47) и (46) получим (44), и лемма доказана.

Определим для $z \in (0;1]$ функцию (ср. (1))

$$f_{2k-1}(z) =$$
$$= \int\limits_{[0,1]^{2k-1}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{2k-1} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{\beta_j-1}\, dx_1\ldots dx_{2k-1}}{(1-x_1+x_1x_2-x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\ldots x_{2k-2}-zx_1x_2\ldots x_{2k-1})^{\alpha_0}}, \quad (48)$$

где $k \geqslant 2$.

Из (1) и (48) имеем
$$J_{2k-1} = f_{2k-1}(1). \tag{49}$$

Обозначим
$$P_{10}(x) = (x+\alpha_0-\beta_1+1)\dots(x+\alpha_0-1),$$
$$P_{j1}(x) = (x+1)\dots(x+\alpha_{2j-1}-1) \quad \text{при} \quad j=1,\dots,k;$$

для $j = 1,\dots,k-1$
$$P_{j2}(x) = (x+\alpha_{2j})\dots(x+\alpha_{2j}+\beta_{2j}-1),$$
$$P_{j3}(x) = (x+\alpha_{2j-1})\dots(x+\alpha_{2j+1}+\beta_{2j+1}-1),$$
$$G_j(x) = (x+1)\dots(x+\beta_{2j-1}-1);$$
$$R_1(x) = \frac{P_{10}(x)}{P_{12}(x)P_{13}(x)};$$
$$\Lambda_{2k-1} = \frac{(-1)^{\alpha_0+\beta_1+\beta_3+\ldots+\beta_{2k-1}-k}\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_4)\dots\Gamma(\beta_{2k-2})}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1+\beta_1-\alpha_0)}.$$

Везде далее $\sigma \in \left[-\frac{1}{2},0\right) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right]$, $D^*_\sigma(f(\sigma)) = \lim\limits_{\sigma\to 0} f'(\sigma)$. Очевидно, что для функций $f(\sigma)$, имеющих непрерывную в нуле производную,
$$D^*_\sigma(f(\sigma)) = D_\sigma(f(\sigma)).$$

Пусть, наконец, при $k \geqslant 3$, $j \in \{2,\dots,k-1\}$
$$R_j(x_{j-1},x_j) = \frac{G_j(x_j-x_{j-1}-\beta_{2j-1})}{P_{j2}(x_j)P_{j3}(x_j)}.$$

Все эти обозначения далее именуются обозначениями леммы 7.

Лемма 7. *Пусть для параметров α_j, β_i функции $f_{2k-1}(z)$ выполнены условия* (2)—(5) *и $z \in (0;1]$. Тогда*
$$f_{2k-1}(z) = \Lambda_{2k-1} D_\sigma \sum_{l=1}^{k} \sum_{\bar\rho_k} \sum_{s_1,\dots,s_k \in \mathbb{Z}^+} (-1)^{k-l} \bar R_k(t_1,\dots,t_k)(1-z)^{t_k}, \tag{50}$$

где оператор D_σ можно заменить на D^*_σ, для всех $z \in (0;1]$ ряд в (50) *сходится абсолютно и равномерно по $\sigma \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, l, $\bar\rho_k$ определены как в* (8) *при $m = k$,*
$$t_j = \begin{cases} s_1+\mu_0+\sigma, & \text{если } j=1,\ \mu_0=\min(0,\beta_1-\alpha_0),\\ s_j, & \text{если } j=2,\dots,k,\ \rho_j=1,\\ t_{j-1}+s_j+\beta_{2j-1}, & \text{если } j=2,\dots,k,\ \rho_j=2,\end{cases} \tag{51}$$
$$\bar R_k(x_1,\dots,x_k) =$$
$$= R_1(x_1)R_2(x_1,x_2)\dots R_{k-1}(x_{k-2},x_{k-1})G_k(x_k-x_{k-1}-\beta_{2k-1})P_{k1}(x_k).$$

Ряд (50) *сходится при любом из классических способов определения частичных сумм (треугольном, прямоугольном или сферическом).*

Доказательство. Проведём индукцию по k. При $k = 2$ в лемме 5 возьмём $a = \alpha_1 - 1$, $b = \beta_1 - 1$, $c = \alpha_0 - 1$ (ввиду (2) имеем $c \leqslant a$, см. условие леммы 5), тогда $n = \alpha_0 - 1$, $m = \alpha_1 - \alpha_0$, $l = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 - 1 = \beta_1 - 1$. Сделаем замену $z \to 1 - x_2 + x_2 x_3 z$ и получим из (48)

$$f_3(z) = \int\limits_{[0;1]^2} \prod_{j\in\{2;3\}} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{\beta_j-1}\biggl(\int\limits_0^1 \frac{x_1^{\alpha_1-1}(1-x_1)^{\beta_1-1}\,dx_1}{(1-x_1(1-x_2+x_2x_3z))^{\alpha_0}}\biggr)dx_2\,dx_3 =$$

$$= \frac{(-1)^{\alpha_0+\beta_1-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1+\beta_1-\alpha_0)} D_\sigma^* \sum_{s\geqslant\mu_0+\alpha_0-1} (s-\beta_1+2+\sigma)\ldots(s+\sigma)\times$$

$$\times (s-\alpha_0+2+\sigma)\ldots(s+\alpha_1-\alpha_0+\sigma)\int\limits_0^1 x_2^{s+\alpha_2-\alpha_0+\sigma}(1-x_2)^{\beta_2-1}\,dx_2\times$$

$$\times \int\limits_0^1 x_3^{\alpha_3-1}(1-x_3)^{\beta_3-1}(1-x_3z)^{s-\alpha_0+1+\sigma}\,dx_3. \tag{52}$$

В первом интеграле в (52) $s+\alpha_2-\alpha_0 \geqslant 0$ при $s \geqslant \mu_0+\alpha_0-1$. Действительно, при $\beta_1 < \alpha_0$ имеем $\mu_0 = \beta_1 - \alpha_0$ по (51), $\mu_0 + \alpha_2 - 1 = \alpha_2 + \beta_1 - \alpha_0 - 1 \geqslant 0$ ввиду (3) при $r = 0$. При $\beta_1 \geqslant \alpha_0$ имеем $\mu_0 = 0$, $\mu_0 + \alpha_2 - 1 \geqslant 0$ ввиду $\alpha_2 \in \mathbb{N}$. Поэтому данный бета-интеграл сходящийся. Применим ко второму интегралу в (52) лемму 6, где $t = s - \alpha_0 + 1 + \sigma \notin \mathbb{Z}$. Вычислим бета-интеграл по формуле

$$\frac{\Gamma(\beta_2)\Gamma(t+\alpha_2)}{\Gamma(t+\alpha_2+\beta_2)} = \frac{\Gamma(\beta_2)}{(t+\alpha_2)\ldots(t+\alpha_2+\beta_2-1)} = \frac{\Gamma(\beta_2)}{P_{12}(t)},$$

сделаем замену $s \to \mu_0 + \alpha_0 - 1 + s_1$, где $s_1 \in \mathbb{Z}^+$, положим $t_1 = s_1 + \mu_0 + \sigma$ (см. (51)). Тогда $t = t_1$, и (52) представляется в виде

$$f_3(z) = \Lambda_3 D_\sigma^* \sum_{s_1\in\mathbb{Z}^+} \frac{P_{10}(t_1)P_{11}(t_1)}{P_{12}(t_1)(t_1+1)\ldots(t_1+\alpha_3+\beta_3-1)}\times$$

$$\times\biggl(\sum_{s_2\in\mathbb{Z}^+}(s_2+1)\ldots(s_2-\alpha_3-1)(s_2-t_1-\beta_3+1)\ldots(s_2-t_1+1)(1-z)^{s_2} -$$

$$- \sum_{s_2\in\mathbb{Z}^+}(t_1+s_2+\beta_3+1)\ldots(t_1+s_2+\alpha_3+\beta_3-1)\times$$

$$\times (s_2+1)\ldots(s_2+\beta_3-1)(1-z)^{t_1+s_2+\beta_3}\biggr).$$

Произведя сокращение

$$\frac{P_{11}(t_1)}{(t_1+1)\ldots(t_1+\alpha_3+\beta_3-1)} = \frac{1}{P_{13}(t_1)}$$

при $\alpha_1 \leqslant \alpha_3 + \beta_3$ (случай $\alpha_1 > \alpha_3 + \beta_3$ отложим, см. по этому поводу замечание 7), в обозначениях леммы 7 получим

$$f_3(z) = \Lambda_3 D_\sigma^* \Bigg(\sum_{s_1,s_2 \in \mathbb{Z}^+} R_1(t_1) P_{21}(s_2) G_2(s_2 - t_1 - \beta_3)(1-z)^{s_2} - \\ - \sum_{s_1,s_2 \in \mathbb{Z}^+} R_1(t_1) P_{21}(s_2 + t_1 + \beta_3) G_2(s_2)(1-z)^{t_1+s_2+\beta_3} \Bigg). \quad (53)$$

Покажем, что ряды в (53) совпадают с рядами в (50). Действительно, для вектора $\bar{\rho}_2$ возможны два варианта:

1) $\bar{\rho}_2 = (1,1)$. Тогда $l = 2$, $(-1)^{k-l} = 1$, $t_2 = s_2$, и первые слагаемые в (50) и (53) совпадают;
2) $\bar{\rho}_2 = (1,2)$. Тогда $l = 1$, $(-1)^{k-l} = -1$, $t_2 = t_1 + s_2 + \beta_3$, и вторые слагаемые в (50) и (53) также совпадают.

Проверим сходимость при фиксированном $\sigma \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ряда в (50), имеющего при $k = 2$ вид

$$\sum_{l=1}^{2} \sum_{\bar{\rho}_2} \sum_{s_1,s_2 \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^l P_{10}(t_1) G_2(t_2 - t_1 - \beta_3) P_{21}(t_2)}{P_{12}(t_1) P_{13}(t_1)} (1-z)^{t_2}. \quad (54)$$

Если $\bar{\rho}_2 = (1,1)$, то $t_2 = s_2 \geqslant 0$. Если $\bar{\rho}_2 = (1,2)$, покажем, что

$$t_2 \geqslant s_1 + s_2 + \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Из (51) имеем

$$t_2 = s_1 + \mu_0 + \sigma + s_2 + \beta_3 \geqslant s_1 + s_2 + \mu_0 + \beta_3 - \frac{1}{2}.$$

Как при рассмотрении бета-интеграла в (52), проанализируем два случая:

1) $\beta_1 < \alpha_0$. Тогда $\mu_0 = \beta_1 - \alpha_0$, $\mu_0 + \beta_3 - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$ ввиду (5) при $k = 2$;
2) $\beta_1 \geqslant \alpha_0$. Тогда $\mu_0 = 0$, $\mu_0 + \beta_3 - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$ ввиду $\beta_3 \in \mathbb{N}$, и неравенство (55) доказано.

Покажем что при любом $z_0 \in (0,1)$, $(z,\sigma) \in [z_0, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ряд (54) мажорируется двойным числовым рядом вида

$$C \sum_{l=1}^{2} \sum_{\bar{\rho}_2} \sum_{M_1,M_2 \in \mathbb{Z}^+} \frac{(M_1+1)^{\beta_1+\beta_3-2}(M_2+1)^{\alpha_3+\beta_3-2}(1-z_0)^{M_2}}{(M_1+\frac{1}{2})^{\beta_2+\alpha_3+\beta_3-\alpha_1}}, \quad (56)$$

где $C > 0$,

$$(M_1, M_2) = \begin{cases} (s_1, s_2), & \text{если } \rho_2 = 1, \\ (s_1, s_1 + s_2), & \text{если } \rho_2 = 2. \end{cases}$$

Выпишем тривиальные оценки

$$|P_{10}(t_1)| \leqslant C_1 (M_1+1)^{\beta_1 - 1},$$
$$|G_2(t_2 - t_1 - \beta_3)| \leqslant C_2 (M_1+1)^{\beta_3-1}(M_2+1)^{\beta_3-1},$$

$$|P_{21}(t_2)| \leqslant C_3(M_2+1)^{\alpha_3-1}, \quad |P_{12}(t_1)| \geqslant C_4\left(M_1+\frac{1}{2}\right)^{\beta_2},$$
$$|P_{13}(t_1)| \geqslant C_5\left(M_1+\frac{1}{2}\right)^{\alpha_3+\beta_3-\alpha_0},$$

где все C_i больше 0 и мы воспользовались тем, что

$$t_1+\alpha_2 \geqslant M_1+\alpha_2+\mu_0-\frac{1}{2} \geqslant M_1+\frac{1}{2},$$
$$t_1+\alpha_1 = M_1+\min(\alpha_0,\beta_1)+(\alpha_1-\alpha_0)+\sigma \geqslant M_1+\frac{1}{2}$$

(см. (2)). Эти оценки доказывают (56).

Ввиду

$$(\beta_2+\alpha_3+\beta_3-\alpha_1)-(\beta_1+\beta_3-2) = \beta_2+\alpha_3-\alpha_1-\beta_1+2 \geqslant 2$$

(см. (3) при $r=1$) ряд (56) сходится. Аналогичные приведённым выше оценки применимы и для ряда, полученного из (54) почленным применением оператора $\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому ряд в (54) при любом $z \in (0,1]$ представляет собой аналитическую функцию от $\sigma \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, т. е. D_σ^* можно заменить на D_σ, и лемма полностью доказана при $k=2$.

Проведём шаг индукции $k \to k+1$, где $k \geqslant 2$.

Имеем из рекуррентного соотношения (указанного Ю. В. Нестеренко)

$$f_{2k+1}(z) = \int\limits_{[0,1]^2} \prod_{j\in\{2k,2k+1\}} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{\beta_j-1} f_{2k-1}(1-x_{2k}+x_{2k}x_{2k+1}z)\,dx_{2k}\,dx_{2k+1}$$

и (50), справедливого по предположению индукции,

$$f_{2k+1}(z) = \Lambda_{2k+1} D_\sigma^* \sum_{l=1}^{k} \sum_{\bar\rho_k} \sum_{s_1,\ldots,s_k\in\mathbb{Z}^+} (-1)^{k-l}\bar R_k(t_1,\ldots,t_k) \times$$
$$\times \int\limits_0^1 x_{2k}^{\alpha_{2k}-1+t_k}(1-x_{2k})^{\beta_{2k}-1}\,dx_{2k} \times$$
$$\times \int\limits_0^1 x_{2k+1}^{\alpha_{2k+1}-1}(1-x_{2k+1})^{\beta_{2k+1}-1}(1-x_{2k+1}z)^{t_k}\,dx_{2k+1}. \tag{57}$$

Исследуем сначала сходимость бета-интеграла в (57). Обозначим

$$\bar\rho_k^{(1)} = \Bigl(1, \underbrace{2,\ldots,2}_{k-1}\Bigr).$$

Рассмотрим два случая:

1) $\bar{\rho}_k \neq \bar{\rho}_k^{(1)}$. Тогда из (51) следует, что $t_k \geqslant 0$ (если $\rho_k = 1$, то $t_k = s_k \geqslant 0$, если $\rho_k = 2$, то для некоторого $r \in \{2, \ldots, k-1\}$ имеем $\rho_r = 1$, $\rho_{r+1} = \ldots = \rho_k = 2$, $t_k = s_r + \ldots + s_k + \beta_{2r+1} + \ldots + \beta_{2k-1} \geqslant 1$). Следовательно, $\alpha_{2k} - 1 + t_k \geqslant 0$, и бета-интеграл сходится;
2) $\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_k^{(1)}$. Тогда $t_k = s_1 + \ldots + s_k + \mu_0 + \sigma + \beta_3 + \beta_5 + \ldots + \beta_{2k-1}$. Если $\beta_1 \geqslant \alpha_0$, то $\mu_0 = 0$, $t_k \geqslant 0$, и бета-интеграл сходится. Если $\beta_1 < \alpha_0$, то $\mu_0 = \beta_1 - \alpha_0$, из (4′) при $r = k$, $d = 2k$ получаем
$$\begin{aligned}\alpha_{2k} - 1 + t_k \geqslant{}& \\ &\geqslant s_1 + \ldots + s_k + (\beta_1 + \beta_3 + \ldots + \beta_{2k-1} + \alpha_{2k} - \alpha_0 - 1) - \frac{1}{2} \geqslant \\ &\geqslant s_1 + \ldots + s_k - \frac{1}{2} \geqslant -\frac{1}{2},\end{aligned} \tag{58}$$
и бета-интеграл в (57) сходится.

Применяя ко второму интегралу в (57) лемму 5, вычисляя бета-интеграл, как в (52) $\left(\frac{\Gamma(\beta_{2k})}{P_{k2}(t_k)}\right)$, получим из (57) в обозначениях леммы 7
$$\begin{aligned}f_{2k+1}(z) = (-1)^{\beta_{2k+1}-1}\Gamma(\beta_{2k})\Lambda_{2k-1}D_\sigma^*\sum_{l=1}^{k}\sum_{\bar{\rho}_k}\sum_{s_1,\ldots,s_k\in\mathbb{Z}^+}(-1)^{k-l} \times \\ \times \bar{R}_k(t_1,\ldots,t_k)\frac{1}{P_{k2}(t_k)(t_k+1)\ldots(t_k+\alpha_{2k+1}+\beta_{2k+1}-1)} \times \\ \times \Bigg(\sum_{s_{k+1}\in\mathbb{Z}^+}G_{k+1}(s_{k+1}-t_k-\beta_{2k+1})P_{k+1,1}(s_{k+1})(1-z)^{s_{k+1}} - \\ - \sum_{s_{k+1}\in\mathbb{Z}^+}G_{k+1}(s_{k+1})P_{k+1,1}(t_k+s_{k+1}+\beta_{2k+1})(1-z)^{t_k+s_{k+1}+\beta_{2k+1}}\Bigg).\end{aligned} \tag{59}$$
Отметим, что
$$(-1)^{\beta_{2k+1}-1}\Gamma(\beta_{2k})\Lambda_{2k-1} = \Lambda_{2k+1}.$$
После сокращения в (59)
$$\frac{P_{k1}(t_k)}{(t_k+1)\ldots(t_k+\alpha_{2k+1}+\beta_{2k+1}-1)} = \frac{1}{P_{k3}(t_k)}$$
(см. структуру $\bar{R}_k$ в (50)) заметим, что первое слагаемое в (59) соответствует $\bar{\rho}_{k+1} = (\bar{\rho}_k, 1)$, а второе — $\bar{\rho}_{k+1} = (\bar{\rho}_k, 2)$, поэтому формально (50) при $k \to k+1$ выполнено.

Остаётся рассмотреть вопрос о сходимости этого ряда.

Рассмотрим сначала поведение многочленов $P_{k2}(x)$ и $P_{k3}(x)$ при $x = t_k$, $\sigma \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Из (58) следует, что
$$\alpha_{2k} + t_k \geqslant \frac{1}{2} + s_1 + \ldots + s_k. \tag{60}$$

Аналогично с помощью (4) при $r=k$, $d=2k-1$ получим

$$\alpha_{2k-1}+t_k \geqslant \frac{1}{2}+s_1+\ldots+s_k. \tag{61}$$

В частности, $P_{k2}(t_k) \neq 0$, $P_{k3}(t_k) \neq 0$. Как при доказательстве (55) и (58), с помощью (5) при $k \to k+1$ получим, что для $\bar{\rho}_{k+1}$, таких что $\rho_{k+1}=2$,

$$t_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{62}$$

Остаётся построить аналогичный (56) мажорирующий ряд для кратного ряда (50) при $k \to k+1$:

$$C\sum_{l=1}^{k+1}\sum_{\bar{\rho}_{k+1}}\sum_{M_1,\ldots M_{k+1}\in\mathbb{Z}^+}\frac{(M_1+1)^{n_1}\ldots(M_{k+1}+1)^{n_{k+1}}(1-z_0)^{M_{k+1}}}{(M_1+\frac{1}{2})^{N1}\ldots(M_1+\frac{1}{2})^{N_k}}. \tag{63}$$

Мы воспользовались (60), (61). В (63) $C>0$,

$$M_j=\begin{cases} s_j, & \text{если } j=1,\ldots,k+1,\ \rho_j=1,\\ s_r+\ldots+s_j, & \text{если } \rho_r=1,\ \rho_{r+1}=\ldots=\rho_j=2,\\ & j=2,\ldots,k+1,\ r\in 1,\ldots,j-1,\end{cases}$$

$$N_j=\beta_{2j}+\alpha_{2j+1}+\beta_{2j-1}-\alpha_{2j-1} \quad \text{при} \quad j=1,\ldots,k,$$

$$n_j=\beta_{2j-1}+\beta_{2j+1}-2 \quad \text{при} \quad j=1,\ldots,k, \quad n_{k+1}=\alpha_{2k+1}+\beta_{2k+1}-2.$$

Для всех $j=1,\ldots,k$ имеем

$$N_j-n_j=\beta_{2j}+\alpha_{2j+1}-\alpha_{2j-1}-\beta_{2j-1}+2 \geqslant 2$$

ввиду (3) при $r=2j-1$. Это доказывает сходимость ряда (63). Как при $k=2$, оператор D_σ^* можно заменить на D_σ, и (59) полностью совпадает с (50) при $k \to k+1$. Лемма доказана.

Замечание 5. При получении (52) и (57) мы использовали равномерную сходимость рядов (соответственно (39) и (50)) для почленного интегрирования. Однако ряд (39) рассматривался лишь при $z \in (0;1]$. Устраним эту неточность. Ограничимся рассмотрением (52), так как ситуация с (57) полностью аналогична. Ряд (39) при получении (52) рассматривался в точках $z'=1-x_2+x_2x_3z$ ($z'=0$ при $x_2=1$, $x_3=0$ и $z'=1$ при $x_2=0$). Проводя по переменным x_2, x_3 интегрирование по прямоугольнику $\{\varepsilon \leqslant x_2 \leqslant 1-\varepsilon,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1-\varepsilon\}$, $\varepsilon \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, вместо квадрата $[0;1]^2$ получим, что $z' \in [\varepsilon; 1-\varepsilon^2]$, т. е. почленное интегрирование в (52) законно. Предельный переход $\varepsilon \to 0+0$ тривиален, поскольку ряд (52) мажорируется рядом (56) (ряд (57) мажорируется рядом (63)).

Замечание 6. Отметим, что при доказательстве леммы 7 условия (3) применялись лишь при нечётных r.

Замечание 7. Если для некоторого $j \in \{1,\ldots,k-1\}$ справедливо

$$\alpha_{2j-1} > \alpha_{2j+1}+\beta_{2j+1},$$

то

$$P_{j3}(x)=\frac{\Gamma(x+\alpha_{2j+1}+\beta_{2j+1})}{\Gamma(x+\alpha_{2j-1})}=\frac{1}{(x+\alpha_{2j+1}+\beta_{2j+1})\dots(x+\alpha_{2j-1}-1)},$$

в остальном в доказательстве леммы 7 ничего не изменится.

Лемма 8. *Пусть для параметров* α_j, β_i *интеграла* (1) *выполнены условия* (2)—(5), $k\geqslant 2$. *Тогда*

$$J_{2k-1}=\Lambda^*_{2k-1}D_\sigma\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{\bar\rho_{k-1}}\sum_{s_1,\dots,s_{k-1}\in\mathbb{Z}^+}(-1)^{k-1-l}R^*_{k-1}(t_1,\dots,t_{k-1}), \tag{64}$$

где

$$\Lambda^*_{2k-1}=\frac{(-1)^{\alpha_0+\beta_1+\beta_3+\dots+\beta_{2k-3}-k+1}\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_4)\dots\Gamma(\beta_{2k-2})\Gamma(\alpha_{2k-1})}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1+\beta_1-\alpha_0)},$$

в обозначениях леммы 7

$$R^*_{k-1}=R_1(x_1)R_2(x_1,x_2)\dots R_{k-1}(x_{k-2},x_{k-1})G_k(x_{k-1}).$$

Доказательство. Применим лемму 7 и равенство (49). Ввиду (62) при $z=1$ обращаются в нуль все члены ряда (50), кроме тех, в которых $\bar\rho_k=(\bar\rho_{k-1},1)$, $t_k=s_k=0$. Заменим в (50) при $z=1$ $\bar\rho_k$ на $\bar\rho_{k-1}$,

$$l'=l(\bar\rho_{k-1})=l(\bar\rho_k)-1=l-1,\quad (-1)^{k-l}=(-1)^{k-1-l'}.$$

Далее,

$$P_{k2}(0)=\Gamma(\alpha_{2k-1}),\quad G_k(-t_{k-1}-\beta_{2k-1})=(-1)^{\beta_{2n-1}-1}G_k(t_k),$$
$$(-1)^{\beta_{2k-1}-1}\Gamma(\alpha_{2k-1})\Lambda_{2k-1}=\Lambda^*_{2k-1},$$

и мы получаем (64).

Замечание 8. Отметим равенство (64) при $k=2$:

$$J_3=\Lambda^*_3D_\sigma\sum_{s_1\in\mathbb{Z}^+}\frac{P_{10}(t_1)G_2(t_1)}{P_{12}(t_1)P_{13}(t_1)}. \tag{65}$$

Рассматривая, в частности, в (65) случай

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=\beta_3=n+1,\quad n\in\mathbb{Z}^+,$$

получим $P_{10}(x)=G_2(x)=(x+1)\dots(x+n)$, $\Lambda^*_3=-1$, $P_{12}=P_{13}=$ $=(x+n+1)\dots(x+2n+1)$. Условия (2)—(5) выполняются тривиально, т. е. в этом случае

$$J_3=J_3(n)=-\sum_{s\in\mathbb{Z}^+}\frac{d}{ds}\left(\frac{(s+1)\dots(s+n)}{(s+n+1)\dots(s+2n+1)}\right)^2=$$
$$=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{(s-1)\dots(s-n)}{s(s+1)\dots(s+n)}\right)^2=r_1+r_2\zeta(3),\quad r_1,r_2\in\mathbb{Q},$$

а это знаменитый результат Бейкерса [5].

Выделим ещё один частный случай равенства (64), полезный для доказательства предложения 1.

Лемма 9. *Пусть* $\bar{a}_m^0 = \big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}\big)$, $\bar{\lambda}_{m-1}^0 = \big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}\big)$. *Тогда*

$$S_m(\bar{a}_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0) = -2\zeta(2m+1).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл (1) $J_{2m+1} = J_{2m+1}(1)$, где все α_j, β_i равны 1. Тогда для всех j $P_{j1}(x) = G_j(x) = 1$, $P_{j2}(x) = P_{j3}(x) = x+1$, $\Lambda_{2m+1}^* = -1$, в (51) $\mu_0 = 0$, $\lambda_j = \beta_{2j-1} = 1$ при $j = 2, \ldots, m$. Из (61) при $k = m+1$ получим $J_{2m+1}(1) = -S_m(\bar{a}_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0)$. В [2] показано, что $J_{2m+1}(1) = 2\zeta(2m+1)$, и лемма доказана.

3. Доказательство предложения 1

Пользуясь обозначениями леммы 9 и (8), запишем

$$S_m(\bar{a}_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0) = \Sigma_m(R_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0),$$

где

$$R_m^0 = \frac{1}{(x_1+1)^2 \ldots (x_m+1)^2}.$$

Применим к $\Sigma_m(R_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0)$ оператор

$$T = T_{1,\alpha_1} T_{2,\alpha_2,\beta_2} \ldots T_{m,\alpha_m,\beta_m},$$

где $\alpha_\nu = a_\nu - 1 \in \mathbb{Z}^+$ при $\nu = 1, \ldots, m$, $\beta_\nu = \lambda_\nu + a_\nu - a_{\nu-1} - 1$ при $\nu = 2, \ldots, m$. Ввиду (14) все β_ν принадлежат $\mathbb{Z}^+$, поэтому применимы леммы 3 и 4. Применяя m раз последовательно лемму 4, получим

$$T(\Sigma_m(R_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0)) = \Sigma_m(R'_m, \bar{\lambda}'_{m-1}),$$

где из (36)

$$R'_m = \frac{1}{(x_1+a_1)^2 \ldots (x_m+a_m)^2},$$

при $\nu = 2, \ldots, m$ из (37) получаем

$$\lambda'_\nu = \lambda_\nu^0 + \beta_\nu - \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 1 + (\lambda_\nu + \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} - 1) - \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = \lambda_\nu,$$

т. е.

$$T(\Sigma_m(R_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0)) = S_m(\bar{a}_m, \bar{\lambda}_{m-1}).$$

Применяя m раз последовательно лемму 3 в сочетании с (35), получим из леммы 9

$$T_{m,\alpha_m,\beta_m}(\Sigma_m(R_m^0, \bar{\lambda}_{m-1}^0)) = \Sigma_m\big(R_m^{(m)}, \bar{\lambda}_{m-1}^{(m)}\big) = -2\zeta(2m+1) + w_m,$$

где $w_m \in \Omega_{m-1}$ по лемме 3, $(R_m^m, \bar{\lambda}_{m-1}^m)$ определены в лемме 4 (их явный вид далее не используется). Аналогично,

$$T_{m-1,\alpha_{m-1},\beta_{m-1}}\bigl(\Sigma_m\bigl(R_m^{(m)},\bar{\lambda}_{m-1}^{(m)}\bigr)\bigr) = \\ = \Sigma_m\bigl(R_m^{(m-1)},\bar{\lambda}_{m-1}^{(m-1)}\bigr) = -2\zeta(2m+1) + w_m + w_{m-1},$$

где $w_{m-1} \in \Omega_{m-1}$ по лемме 3. Наконец,

$$T(\Sigma_m(R_m^0,\bar{\lambda}_{m-1}^0)) = S_m(\bar{a}_m,\bar{\lambda}_m) = -2\zeta(2m+1) + w_m + w_{m-1} + \ldots + w_1,$$

где $w_i \in \Omega_{m-1}$ для всех i, и оба утверждения предложения 1 доказаны.

4. Завершение доказательства теоремы 2

Введём отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$ следующим образом: $a \sim b$, если $(a-b) \in \Omega_{m-1}$.

Напомним, что мы доказываем теорему индукцией по m и необходимо провести шаг индукции $\{(\mathrm{U}_1),\ldots,(\mathrm{U}_{m-1})\} \to (\mathrm{U}_m)$.

Покажем, что (см. (8))

$$\Sigma_m \sim \sum_{\bar{a}_m} r(\bar{a}_m) S_m(\bar{a}_m,\bar{\lambda}_{m-1}), \tag{66}$$

где $r(\bar{a}_m) \in \mathbb{Q}$ для всех m, $\bar{a}_m = (a_1,\ldots,a_m)$, $a_j \in A_{j2}$ при $j = 1,\ldots,m$. Условия (14) проверяются тривиально.

Тогда справедливость условия (U_m) следует из предложения 1, и утверждение теоремы 2 будет выполнено по индукции.

Доказательство формулы (66) проведём в три этапа.

1. Имеем следующее разложение в сумму простейших дробей по переменной x_m при фиксированных $x_1,\ldots,x_{m-1}$:

$$\frac{P(x_1,\ldots,x_m)}{Q_m(x_m)} = \sum_{i=E_m}^{F_m} \frac{B_i}{(x_m+i)^2} + \sum_{i=e_m}^{f_m} \frac{C_i}{x_m+i}, \tag{67}$$

где $B_i, C_i \in \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_{m-1}]$ для всех i, $B_i = 0$ при $i \notin A_{m,2}$, $C_i = 0$ при $i \notin A_m$. Ввиду $\mathrm{I}_m(P,\bar{Q}_m)$

$$\sum_{i=e_m}^{f_m} C_i = 0, \tag{68}$$

кроме того, для всех B_i, C_i имеем

$$\deg_{x_j} B_i \leqslant p_j, \quad \deg_{x_j} C_i \leqslant p_j \quad \text{при} \quad j = 1,\ldots,m-1, \tag{69}$$

так как

$$B_i = \frac{P(x_1,\ldots,x_m)(x_m+i)^2}{Q_m(x_m)}\bigg|_{x_m=-i}, \quad \text{где} \quad i \in A_{m,2},$$

$$C_i = \frac{P(x_1,\ldots,x_m)(x_m+i)^2}{Q_m(x_m)}\bigg|_{x_m=-i}, \quad \text{где} \quad i \in A_{m,1},$$

$$C_i = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{P(x_1, \ldots, x_m)(x_m+i)^2}{Q_m(x_m)} \right)\Bigg|_{x_m=-i}, \quad \text{где} \quad i \in A_{m,2}.$$

Нам в дальнейшем будет полезно утверждение, аналогичное [3, лемма 7].

Лемма 10. *Пусть* $e, f \in \mathbb{N}$, $e \leqslant f$, $C_e, \ldots, C_f \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=e}^{f} C_i = 0$, $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta + e \neq 0, -1, -2, \ldots$. *Тогда*

1) $$\sum_{s=0}^{M} \sum_{i=e}^{f} \frac{C_i}{s+\Delta+i} = \\ = \sum_{i=e}^{f-1} \left(\sum_{\nu=e}^{i} C_\nu \right) \frac{1}{\Delta+i} - \sum_{i=e+1}^{f} \left(\sum_{r=e}^{f-1} C_\nu \right) \frac{1}{M+\Delta+i}, \quad M \in \mathbb{Z}^+,$$

2) $$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=e}^{f} \frac{C_i}{s+\Delta+i} = \sum_{i=e}^{f-1} \left(\sum_{\nu=e}^{i} C_\nu \right) \frac{1}{\Delta+i}.$$

Доказательство. Докажем 1), тогда 2) следует из 1) при $M \to \infty$. Имеем

$$\sum_{s=0}^{M} \sum_{i=e}^{f} \frac{C_i}{s+\Delta+i} = \sum_{i=e}^{f} C_i \left(\sum_{\nu=e}^{M+f} \frac{1}{\nu+\Delta} - \sum_{\nu=e}^{i-1} \frac{1}{\nu+\Delta} - \sum_{\nu=i+1}^{f} \frac{1}{M+\nu+\Delta} \right) =$$

$$= - \sum_{i=e+1}^{f} C_i \sum_{\nu=e}^{i-1} \frac{1}{\nu+\Delta} - \sum_{i=e}^{f-1} C_i \sum_{\nu=i+1}^{f} \frac{1}{M+\nu+\Delta} =$$

$$= - \sum_{j=e}^{f-1} \left(\sum_{i=j+1}^{f} C_i \right) \frac{1}{\Delta+j} - \sum_{j=e+1}^{f} \left(\sum_{i=e}^{j-1} C_i \right) \frac{1}{M+\Delta+j} =$$

$$= - \sum_{j=e}^{f-1} \left(\sum_{i=e}^{j} C_i \right) \frac{1}{\Delta+j} - \sum_{j=e+1}^{f} \left(\sum_{i=e}^{j-1} C_i \right) \frac{1}{M+\Delta+j},$$

и 1), а вместе с ним и лемма доказаны.

Подставляя (67) в (8), получим, что

$$\Sigma_m(P_m, \bar{Q}_m, \bar{\lambda}_{m-1}) = \Sigma_m^{(1)} + \Sigma_m^{(2)}, \tag{70}$$

$$\Sigma_m^{(1)} = \sum_{\substack{i=E_m \\ i \in A_{m2}}}^{F_m} D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l} B_i(t_1, \ldots, t_{m-1})}{Q_1(t_1) \ldots Q_{m-1}(t_{m-1})(t_m+i)^2}, \tag{71}$$

$$\Sigma_m^{(2)} = D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l}}{Q_1(t_1) \ldots Q_{m-1}(t_{m-1})} \sum_{i=e_m}^{f_m} \frac{C_i(t_1, t_{m-1})}{s_m+\Delta+i}, \tag{72}$$

где

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho_m = 1, \\ t_{m-1} + \lambda_m, & \text{если } \rho_m = 2, \end{cases}$$

в ряде (72), который сходится абсолютно (см. утверждение 1) леммы 10), по-прежнему можно переставлять члены ряда.

Проведём в (72) суммирование по $s_m \in \mathbb{Z}^+$ с помощью леммы 10 (см. (68)). Пусть $\bar{\rho}_m = (\bar{\rho}_{m-1}, \rho_m)$. Тогда $l(\bar{\rho}_{m-1}) = l$ при $\rho_m = 2$, $l \leqslant m-1$; $l(\bar{\rho}_{m-1}) = l-1$ при $\rho_m = 1$, $l \geqslant 2$. Во втором случае сделаем стандартную замену $l-1 \to l$.

Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_m^{(2)} = D_\sigma \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\bar{\rho}_{m-1}} \sum_{s_1,\ldots,s_{m-1} \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-1-l}}{Q_1(t_1)\ldots Q_{m-1}(t_{m-1})} \times \\ \times \sum_{i=e_m}^{f_m-1} \frac{1}{i} \sum_{\nu=e}^{i} C_\nu(t_1,\ldots,t_{m-1}) - \\ - \sum_{i=e_m}^{f_m-1} D_\sigma \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\bar{\rho}_{m-1}} \sum_{s_1,\ldots,s_{m-1} \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-1-l}}{Q_1(t_1)\ldots Q_{m-1}(t_{m-1})} \times \\ \times \sum_{\nu=e_m}^{i} C_\nu(t_1,\ldots,t_{m-1}) \frac{1}{t_{m-1}+\lambda_m+i}. \end{aligned} \tag{73}$$

Для $i \in \{e_m,\ldots,f_{m-1}\}$ обозначим $Q'_{m-1}(x) = Q_{m-1}(x)(x+\lambda_m+i)$.

Мы находимся в ситуации 3) леммы 1 при $\nu = m$, поэтому выполнены условия (7), (II) и (III), это же верно и для первой суммы в (73). Условия (I) выполнены ввиду (69). По утверждению (U_{m-1}) получим, что

$$\Sigma_m \sim \Sigma_m^{(1)}. \tag{74}$$

2. Шаг индукции. Пусть для некоторого $d \in \{2,\ldots,m-1\}$ уже доказано, что

$$\Sigma_m \sim \sum_{\bar{a}^*_{m-d}} D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l} B_{\bar{a}^*_{m-d}}(t_1,\ldots,t_d)}{Q_1(t_1)\ldots Q_d(t_d) \prod\limits_{j=d+1}^{m} (t_j+a_j)^2}, \tag{V_d}$$

где $\bar{a}^*_{m-d} = (a_{d+1},\ldots,a_m)$, $a_j \in A_{j2}$ при $j = d+1,\ldots,m$, все $B_{\bar{a}^*_{m-d}}$ принадлежат $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_d]$, $\deg_{x_j} B_{\bar{a}^*_{m-d}} \leqslant p_j$ при $j = 1,\ldots,d$.

В частности, (74) ввиду (71) представляет собой соотношение вида (V_{m-1}) (база индукции). Покажем, что можно перейти от (V_d) к (V_{d-1}).

При фиксированных $\bar{a}^*_{m-d}, x_1,\ldots,x_{d-1}$ имеем разложение на сумму простейших дробей

$$\frac{B(x_1,\ldots,x_d)}{Q_d(x_d)} = \sum_{\substack{i=E_d \\ i \in A_{d2}}}^{F_d} \frac{B_i}{(x_d+i)^2} + \sum_{\substack{i=e_d \\ i \in A_d}}^{f_d} \frac{C_i}{x_d+i}, \tag{75}$$

где для краткости опущен индекс $\bar{a}^*_{m-d}$ и аналогично (67)—(69) $B_i, C_i \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{d-1}]$,

$$\sum_{i=e_d}^{f_d} C_i = 0, \tag{76}$$

$$\deg_{x_j} B_i \leqslant p_j, \quad \deg_{x_j} C_i \leqslant p_j \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, d-1. \tag{77}$$

Подставляя (75) в (V_d), получим, что

$$\Sigma_m \sim \left(\Sigma_m^{(1)} + \Sigma_m^{(2)}\right), \tag{78}$$

$$\Sigma_m^{(1)} = \sum_{\substack{i=E_d \\ i\in A_{d2}}}^{F_d} \sum_{\bar{a}^*_{m-d}} D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l} B_{i,\bar{a}^*_{m-d}}(t_1, \ldots, t_{d-1})}{\prod\limits_{j=1}^{d-1} Q_j(t_j) \prod\limits_{j=d}^{m} (t_j + a_j)^2}, \tag{79}$$

$$\Sigma_m^{(2)} = \sum_{\bar{a}^*_{m-d}} D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar{\rho}_m} \sum_{s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l}}{\prod\limits_{j=1}^{d-1} Q_j(t_j)} \sum_{\substack{i=e_d \\ i\in A_d}}^{f_d} \frac{C_{i,\bar{a}^*_{m-d}}(t_1, \ldots, t_{d-1})}{(\Delta + s_d + i) \prod\limits_{j=d+1}^{m} (t_j + a_j)^2}, \tag{80}$$

где

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho_d = 1, \\ t_{d-1} + \lambda_d, & \text{если } \rho_d = 2, \end{cases}$$

как выше, ряд (80) сходится абсолютно.

Покажем, что

$$\Sigma_m^{(2)} \in \Omega_{m-1}. \tag{81}$$

Тогда из (78) и (79) следует искомый переход от (V_d) к (V_{d-1}).

Рассмотрим при фиксированном $\bar{a}^*_{m-d}$ четыре группы рядов в (80), имеющие фиксированные координаты ρ_d и ρ_{d+1} (далее $\bar{\rho}_m^{(1)}, \ldots, \bar{\rho}_m^{(4)}$). Снова опустим для краткости индекс $\bar{a}^*_{m-d}$. Проведём в каждой группе рядов суммирование по переменной s_d. Для краткости выделим лишь множители, зависящие от переменной s_d. Обозначим

$$C^{(1)} = \sum_{i=e_d}^{f_{d-1}} \frac{1}{i} \left(\sum_{\nu=e_d}^{i} C_\nu \right), \quad C_i^{(2)} = \sum_{\nu=e_d}^{i-1} C_\nu, \quad C_i^{(3)} = \sum_{\nu=e_d}^{i} C_\nu. \tag{82}$$

I. $\rho_d = \rho_{d+1} = 1$ $(\bar{\rho}_m^{(1)})$. Имеем $t_d = s_d$, $t_{d+1} = s_{d+1}$, $\Delta = 0$. По лемме 10 и (76)

$$\sum_{s_d=0}^{\infty} \sum_{i=e_d}^{f_d} \frac{C_i}{s_d + i} = C^{(1)}. \tag{83}$$

II. $\rho_d = 1$, $\rho_{d+1} = 2$ $(\bar\rho_m^{(2)})$. Пусть $\rho_{d+1} = \ldots = \rho_{d+r} = 2$, $\rho_{d+r+1} = 1$, где $r \in \{1, \ldots, m-d\}$. Обозначим $M = s_d + s_{d+1}$, $M \in \mathbb{Z}^+$, $s_d \in \{0, \ldots, M\}$. Имеем

$$t_d = s_d, \quad t_{d+1} = M + \lambda_{d+1},$$
$$t_j = t_{j-1} + s_j + \lambda_j \ \text{ при } \ j = d+2, \ldots, d+r, \quad t_{d+r+1} = s_{d+r+1}.$$

По лемме 10, где $\Delta = 0$, учитывая (82), (83) и (76), имеем

$$\sum_{s_d=0}^{M} \sum_{i=e_d}^{f_d} \frac{C_i}{s_d + i} = C^{(1)} - \sum_{i=e_d+1}^{f_d} C_i^{(2)} \frac{1}{M+i}. \tag{84}$$

III. $\rho_d = 2$, $\rho_{d+1} = 1$ $(\bar\rho_m^{(3)})$. Тогда $t_d = t_{d-1} + s_d + \lambda_d$, $t_{d+1} = s_{d+1}$, $\Delta = t_{d-1} + \lambda_d$. Имеем

$$\sum_{s_d=0}^{\infty} \sum_{i=e_d}^{f_d} \frac{C_i}{s_d + \Delta + i} = \sum_{i=e_d}^{f_d-1} \frac{C_i^{(3)}}{t_{d-1} + \lambda_d + i}. \tag{85}$$

IV. $\rho_d = \rho_{d+1} = 2$ $(\bar\rho_m^{(4)})$. Имеем для некоторого $r \in \{1, \ldots, m-d\}$ $\rho_d = \ldots = \rho_{d+r} = 2$, $\rho_{d+r+1} = 1$. Как при рассмотрении случая II, положим $M = s_d + s_{d+1}$, $M \in \mathbb{Z}^+$, $s_d \in \{0, \ldots, M\}$,

$$t_d = s_d + \Delta, \ \text{ где } \ \Delta = t_{d-1} + \lambda_d,$$
$$t_{d+1} = s_{d+1} + t_d + \lambda_{d+1} = M + t_{d-1} + \lambda_d + \lambda_{d+1},$$
$$t_{d+j} = t_{d+j-1} + s_{d+j} + \lambda_{d+j} \ \text{ при } \ j = 2, \ldots, r, \quad t_{d+r+1} = s_{d+r+1},$$

$$\sum_{s_d=0}^{M} \sum_{i=e_d}^{f_d} \frac{C_i}{s_d + \Delta + i} = \sum_{i=e_d}^{f_d-1} \frac{C_i^{(3)}}{t_{d-1} + \lambda_d + i} - \sum_{i=e_d+1}^{f_d} \frac{C_i^{(2)}}{M + t_{d-1} + \lambda_d + i} \tag{86}$$

(см. лемму 10, (82), (76)).

Выделим после суммирования по s_d в (80) три слагаемых по наличию в них соответственно $C^{(1)}$, $C_i^{(2)}$, $C_i^{(3)}$:

$$\Sigma_m^{(2)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \tag{87}$$

где в σ_1 входит (83) и первое слагаемое из (84), в σ_2 — вторые слагаемые из (84) и (86), в σ_3 — (85) и первое слагаемое из (86).

Вычислим σ_1. Положим $Q_j(x) = (x + a_j)^2$ при $j = d+1, \ldots, m$;

$$(\rho'_j, \lambda'_j, Q'_j, s'_j, t'_j) = \begin{cases} (\rho_j, \lambda_j, Q_j, s_j, t_j), & \text{если } j = 1, \ldots, d-1, \\ (\rho_{j+1}, \lambda_{j+1}, Q_{j+1}, s_{j+1}, t_{j+1}), & \text{если } j = d, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{88}$$

кроме $j = 1$ и $j = d$ при определении λ'_j (λ'_1 отсутствует, $\lambda'_d = \lambda_d + \lambda_{d+1}$),

$$\bar\rho'_{m-1} = (\rho'_1, \ldots, \rho'_{m-1}), \quad \bar Q'_{m-1} = (Q'_1, \ldots, Q'_{m-1}),$$
$$\bar\lambda'_{m-2} = (\lambda'_2, \ldots, \lambda'_{m-1}), \quad P'_{m-1} = C^{(1)}(x_1, \ldots, x_{d-1}),$$

$$R'_{m-1} = \frac{P'_{m-1}}{Q'_1(x_1)\ldots Q'_{m-1}(x_{m-1})}, \quad \Sigma'_{m-1} = \Sigma_{m-1}(R'_{m-1}, \bar\lambda'_{m-2}).$$

Имеем $l' = l(\bar\rho'_{m-1}) = l(\bar\rho_m^{(1)}) - 1$, $l(\bar\rho_m^{(2)}) = l' + 1$,

$$\sigma_1 = D_\sigma \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\substack{\bar\rho'_{m-1}\\ \bar\rho'_d=1}} \Biggl\{ \sum_{s'_1,\ldots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+} (-1)^{m-1-l'} R'_{m-1}(t'_1,\ldots,t'_{m-1}) - \\ - \sum_{\substack{s'_1,\ldots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+\\ s'_d\geqslant\lambda_{d+1}}} (-1)^{m-1-l'} R'_{m-1}(t'_1,\ldots,t'_{m-1}) \Biggr\},$$

где во второй сумме в обозначения (88) внесены два изменения: $s'_d = M+\lambda_{d+1} \geqslant \lambda_{d+1}$, $\rho'_d = 1$ (вместо $\rho_{d+1} = 2$, тогда из (88) получаем $\rho'_d = 2$).

Из (20) получим, что $\sigma_1 = \Sigma'_{m-1} - T_{d,\lambda_{d+1},0}(\Sigma'_{m-1})$. Для $\alpha = \lambda_{d+1}$ выполнено условие леммы 3 при $\nu = d$: $\alpha + e'_d \geqslant 1$, так как $e'_d = a_{d+1} \geqslant E_{d+1}$ ввиду $a_{d+1} \in A_{d+1,2}$, $\alpha + e'_d = \lambda_{d+1} + a_{d+1} \geqslant \lambda_{d+1} + E_{d+1} > f_d \geqslant 1$. Поэтому по лемме 3 $\sigma_1 \in \Omega_{m-2}$ (условия (7), (I), (III) проверяются тривиально).

Вычислим $\sigma_2 = -\sum\limits_{i=e_j+1}^{f_d} \sigma_{2,i}$. Сохраним обозначения (88) со следующими изменениями при $j = d$: $s'_d = M + \lambda_{d+1} \geqslant \lambda_{d+1}$, $Q'_d = (x+i-\lambda_{d+1})(x+a_{d+1})^2$, $\rho'_d = \rho_d$, $\lambda'_d = \lambda_d$, $t'_d = t_d$, где произведена замена $s_d \to s'_d$, $l' = l(\bar\rho_m'^{(2)}) = l(\bar\rho_m^{(4)}) = l(\bar\rho'_{m-1})$, так как из $\bar\rho_m$ изъята координата $\rho_{d+1} = 2$. Поэтому $(-1)^{m-l} = -(-1)^{m-1-l'}$,

$$\sigma_{2,i} = -D_\sigma \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \sum_{\substack{s'_1,\ldots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+\\ s'_d\geqslant\lambda_{d+1}}} \frac{(-1)^{m-1-l'} C_i^{(3)}(t'_1,\ldots,t'_{d-1})}{Q'_1(t'_1)\ldots Q'_{m-1}(t'_{m-1})} = \\ = -T_{d,\lambda_{d+1},\lambda_{d+1}}\bigl(\Sigma_{m-1}\bigl(C_i^{(3)}, \bar Q'_{m-1}, \bar\lambda'_{m-2}\bigr)\bigr)$$

(см. (8) и (20)).

Проверим выполнение условий леммы 4 при $\nu = d$, $\alpha = \beta = \lambda_{d+1}$. Так как $a_{d+1} + \lambda_{d+1} \geqslant E_{d+1} + \lambda_{d+1} > f_d \geqslant i$, то параметры многочлена Q'_d имеют следующие значения: $e'_d = i - \lambda_{d+1}$, $E'_d = F'_d = f'_d = a_{d+1}$. Имеем $\alpha + e'_d = \lambda_{d+1} + i - \lambda_{d+1} \geqslant e_d + 1 > 1$, далее, $\beta > f_{d-1} - E'_d - \lambda'_d$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{d+1} + a_{d+1} + \lambda_d > f_{d-1}$, что очевидно; $\beta > F_{d-1} - e'_d - \lambda'_d$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{d+1} > F_{d-1} - (i-\lambda_{d+1}) - \lambda_d$, что равносильно $i + \lambda_d > F_{d-1}$. Но $i + \lambda_d > e_d + \lambda_d > F_{d-1}$.

По лемме 4

$$\sigma_{2,i} = -\Sigma_{m-1}(\tilde C_i^{(3)}, \bar Q''_{m-1}, \bar\lambda''_{m-2}), \tag{89}$$

где согласно (35)—(37) $\tilde C_i^{(3)} = C_i^{(3)}$, поскольку $C_i^{(3)} \in \mathbb{Q}\{x_1,\ldots,x_{d-1}\}$, $Q''_d(x) = Q'_d(x+\lambda_{d+1}) = (x+i)(x+a_{d+1}+\lambda_{d+1})^2$, $Q''_j(x) = Q'_j(x)$ при $j \neq d$,

$$\bar{\lambda}''_{m-2} = (\lambda'_2, \ldots, \lambda'_d, \lambda'_{d+1} + \lambda_{d+1}, \lambda'_{d+2}, \ldots, \lambda'_{m-1}) = \\ = (\lambda_2, \ldots, \lambda_d, \lambda_{d+1} + \lambda_{d+2}, \lambda'_{d+2}, \ldots, \lambda'_{m-1}).$$

Мы находимся в условиях случая 4) леммы 1, где $\nu = d+1$. Поэтому для $\sigma_{2,i}$ (см. (89)) выполнены условия (7), $\mathrm{II}(\bar{Q}''_{m-1})$, $\mathrm{III}(\bar{Q}''_{m-1})$. Выполнение условий $\mathrm{I}\big(C_i^{(3)}, \bar{Q}''_{m-1}\big)$ следует из (77) и (82). По утверждению (U_{m-1}) $\sigma_{2,i} \in \Omega_{m-1}$ для всех i, а тогда $\sigma_2 \in \Omega_{m-1}$.

Вычислим $\sigma_3 = \sum\limits_{i=e_d}^{f_d-1} \sigma_{2,i}$. Внесём в обозначения (88) небольшие изменения: $Q'_{d-1}(x) = Q_{d-1}(x)(x+\lambda_d+i)$, $\lambda'_d = \lambda_d + \lambda_{d+1}$, для первого слагаемого из (86) $M = s'_d \in \mathbb{Z}^+$. Имеем $l' = l(\bar{\rho}'_{m-1}) = l\big(\bar{\rho}_m^{(3)}\big) = l\big(\bar{\rho}_m^{(4)}\big)$, так как $\bar{\rho}'_{m-1}$ получен из $\bar{\rho}_m$ удалением $\rho_d = 2$, $(-1)^{m-l} = -(-1)^{m-1-l'}$,

$$\sigma_{3,i} = -D_\sigma \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar{\rho}'_{m-1}} \sum_{s'_1, \ldots, s'_{m-1} \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-1-l'} C_i^{(3)}(t'_1, \ldots, t'_{d-1})}{Q'_1(t'_1) \ldots Q'_{m-1}(t'_{m-1})}.$$

Мы находимся в условиях случая 3) леммы 1, поэтому (7), $\mathrm{II}(\bar{Q}'_{m-1})$, $\mathrm{III}(\bar{Q}'_{m-1})$ выполнены. Условия $\mathrm{I}\big(C_i^{(3)}, \bar{Q}'_{m-1}\big)$ выполнены ввиду (77) и (82). По утверждению (U_{m-1}) $\sigma_{3,i} \in \Omega_{m-1}$ для всех i, т. е. $\sigma_3 \in \Omega_{m-1}$.

Из (87) и рассмотрений σ_1, σ_2, σ_3 следует (81), и проверка индуктивного перехода от (V_d) к (V_{d-1}) завершена.

Тем самым по индукции доказано (V_1), и нам осталось сделать последний шаг от (V_1) к (66).

3. Докажем (66).

Имеем при фиксированном $\bar{a}^*_{m-1}$

$$\frac{B(x_1)}{Q_1(x_1)} = \sum_{\substack{i=E_1 \\ i \in A_{12}}}^{F_1} \frac{B_i}{(x_1+i)^2} + \sum_{\substack{i=e_1 \\ i \in A_1}}^{f_1} \frac{C_i}{x_1+i}, \tag{90}$$

$B_i, C_i \in \mathbb{Q}$,

$$\sum_{i=e_1}^{f_1} C_i = 0, \tag{91}$$

везде, как обычно, опущен индекс $\bar{a}^*_{m-1}$. Подставляя (90) в (V_1), получим

$$\Sigma_m \sim \sum_{\bar{a}_m} B_{\bar{a}_m} S_m(\bar{a}_m, \bar{\lambda}_{m-1}) + \Sigma_m^{(3)}, \tag{92}$$

где $\bar{a}_m$ определён как в (66),

$$\Sigma_m^{(3)} = \sum_{\bar{a}^*_{m-1}} \sigma_{\bar{a}^*_{m-1}},$$

$$\sigma_{a^*_{m-1}} = D_\sigma \sum_{l=1}^{m} \sum_{\bar\rho_m} \sum_{s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{Z}^+} \frac{(-1)^{m-l}}{\prod\limits_{j=2}^{m}(t_j+a_j)^2} \sum_{i=e_1}^{f_1} \frac{C_{i,a^*_{m-1}}}{t_1+i}. \tag{93}$$

Далее рассмотрим $\sigma_{\bar a^*_{m-1}}$ при фиксированном $\bar a^*_{m-1}$, опустим индекс $\bar a^*_{m-1}$ и докажем, что

$$\sigma \in \Omega_{m-1}. \tag{94}$$

Тогда из (92) и (93) будет следовать (66), что завершит доказательство теоремы 2.

Рассмотрим, как в пункте 2, два типа $\bar\rho_m$.

I. $\rho_2 = 1$ ($\bar\rho_m^{(1)}$). Тогда $t_1 = s_1 + \sigma$, $t_2 = s_2$. Обозначим

$$\gamma(\sigma) = \sum_{i=e_1}^{f_1-1} \biggl(\sum_{\nu=e_1}^{i} C_\nu\biggr) \frac{1}{i+\sigma}. \tag{95}$$

По лемме 10 с учётом (91) имеем

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{i=e_1}^{f_1} \frac{C_i}{s_1+\sigma+i} = \gamma(\sigma). \tag{96}$$

II. $\rho_2 = 2$ ($\bar\rho_m^{(2)}$). Для некоторого $r \in \{2,\ldots,m\}$ имеем $\rho_2 = \ldots = \rho_r = 2$, $\rho_{r+1} = 1$, $t_1 = s_1 + \sigma$, $t_2 = s_1 + s_2 + \lambda_2 + \sigma = M + \lambda_2 + \sigma$, где $M = s_1 + s_2 \in \mathbb{Z}^+$, $s_1 \in \{0,\ldots,M\}$, $t_j = M + \lambda_2 + \sigma + s_3 + \ldots + s_j + \lambda_3 + \ldots + \lambda_j$ при $j = 3,\ldots,r$, $t_{r+1} = s_{r+1}$ в случае $r < m$. Опять по лемме 10 с учётом (91), (82) и (95)

$$\sum_{s_1=0}^{M} \sum_{i=e_1}^{f_1} \frac{C_i}{s_1+\sigma+i} = \gamma(\sigma) - \sum_{i=e_1+1}^{f_1} \frac{C_i^{(2)}}{M+i+\sigma}. \tag{97}$$

Пусть аналогично пункту 2

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{98}$$

где в σ_1 входит (96) и первое слагаемое из (97), а в σ_2 — второе слагаемое из (97).

Вычислим σ_1. Опять применим (88) при $d = 1$ со следующими изменениями: $\rho'_1 = \rho_1 = 1$, для $\bar\rho_m^{(2)}$ (см. первое слагаемое в (97)) $s'_1 = M + \lambda_2 \geqslant \lambda_2$, для $\bar\rho_m^{(1)}$ (см. (96)) $t'_1 = s'_1$. Тогда $l' = l(\bar\rho'_{m-1}) = l(\bar\rho_m^{(2)}) = l(\bar\rho_m^{(1)}) - 1$. Итак,

$$\sigma_1 = D_\sigma \Biggl(\gamma_1(\sigma) \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \Biggl\{ \sum_{\substack{s'_1,\ldots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+ \\ t'_1=s'_1}} \frac{(-1)^{m-1-l'}}{(t'_1+a'_1)^2\ldots(t'_{m-1}+a'_{m-1})^2} -$$

$$- \sum_{\substack{s'_1,\ldots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+ \\ t'_1=s'_1\geqslant\lambda_2}} \frac{(-1)^{m-1-l'}}{(t'_1+a'_1)^2\ldots(t'_{m-1}+a'_{m-1})^2} \Biggr\}\Biggr) =$$

$$= \gamma'(0)\operatorname{sign}(\lambda_2) \sum_{n=i_0(\lambda_2)}^{i_1(\lambda_2)} \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \sum_{\substack{s'_1,\dots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+\\ t'_1=s'=n}} \frac{(-1)^{m-1-l'}}{(t'_1+a'_1)^2\dots(t'_{m-1}+a'_{m-1})^2} -$$

$$- \gamma(0)D_\sigma \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \sum_{\substack{s'_1,\dots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+\\ s'_1\geqslant\lambda_2\\ t'_1=s'_1+\sigma}} \frac{(-1)^{m-1-l'}}{(t'_1+a'_1)^2\dots(t'_{m-1}+a'_{m-1})^2}. \tag{99}$$

Из (95) имеем $\gamma(0), \gamma'(0) \in \mathbb{Q}$. Первый ряд в (99) по лемме 2 есть рациональное число. Второй ряд по лемме 4 имеет вид

$$T_{1,\lambda_2}(\Sigma_{m-1}(\bar a'_{m-1}, \bar\lambda'_{m-2})) = \Sigma_{m-1}(\bar a''_{m-1}, \bar\lambda''_{m-2}),$$

где $a''_1 = a'_1 + \lambda_2$, $\lambda''_2 = \lambda'_2 + \lambda_2$, остальные a''_j, λ''_j совпадают с a'_j, λ'_j. Условие $\alpha+e'_1 \geqslant 1$ леммы 4 выполнено, так как $\lambda_2+a'_1 = \lambda_2+a_2 \geqslant \lambda_2+E_2 > f_1 \geqslant 1$, условия (14) для $\Sigma_{m-1}(\bar a''_{m-1}, \bar\lambda''_{m-2})$ проверяются тривиально. Поэтому по предложению 1 второй ряд в (99) — элемент Ω_{m-1}, т. е. окончательно имеем $\sigma_1 \in \Omega_{m-1}$.

Вычислим σ_2. Имеем из (93) и (97) в тех же обозначениях, что и выше,

$$\sigma_2 = \sum_{i=e_1+1}^{f_1} C_i^{(2)} \sigma_{2,i},$$

$$\sigma_{2,i} = D_\sigma \sum_{l'=1}^{m-1} \sum_{\bar\rho'_{m-1}} \sum_{\substack{s'_2,\dots,s'_{m-1}\in\mathbb{Z}^+\\ s'_1=M+\lambda_2\geqslant\lambda_2\\ t'_1=s'_1+\sigma}} \frac{(-1)^{m-1-l'}}{(t'_1+i-\lambda_2)\prod\limits_{j=1}^{m-1}(t'_j+a'_j)^2}.$$

Опять снимем ограничение $s'_1 \geqslant \lambda_2$ по лемме 4 заменой

$$(x_1+i-\lambda_2)(x_1+a'_1)^2 \to (x_1+i)(x_1+a'_1+\lambda_2), \quad \lambda'_2 \to \lambda'_2+\lambda_2.$$

Условие $\alpha + e'_1 \geqslant 1$ принимает в этой лемме вид $i \geqslant 1$, так как $a'_1 + \lambda_2 \geqslant E_2 + \lambda_2 > f_1 \geqslant i$, следовательно, $i - \lambda_2 < a'_1$, $e'_1 = i - \lambda_2$. Мы находимся в условиях случая 4) леммы 1 при $\nu = 2$, т. е. условия (7), (I)—(III) выполнены. По утверждению (U_{m-1}) $\sigma_{2,i} \in \Omega_{m-1}$, а тогда $\sigma_2 \in \Omega_{m-1}$.

Из рассмотрения σ_1 и σ_2 и (98) следует (94), и доказательство теоремы 2 завершено.

5. Доказательство теоремы 1

Ввиду леммы 8 для функции R^*_{k-1} в (64) необходимо проверить условия (7) и (I)—(III) при $m = k-1$ и, кроме этого, привести (51) к виду (9). Тогда теорема 1 будет следовать из теоремы 2. По лемме 4 при $\alpha = \mu_0$, $\nu = 1$ из (64) и (51) получим в обозначениях леммы 7

$$J_{2k-1} = \Lambda^*_{2k-1}\Sigma_{k-1}(P, \bar Q_{k-1}, \bar\lambda_{k-2}),$$

где

$$Q_1(x) = P_{12}(x+\mu_0)P_{13}(x+\mu_0), \quad Q_j(x) = P_{j2}(x)P_{j3}(x), \quad j = 2, \ldots, k-1, \tag{100}$$

$$P = P(x_1, \ldots, x_{k-1}) = P_{10}(x_1 + \mu_0)G_2(x_2 - x_1 - \mu_0 - \beta_3) \times \\ \times \prod_{j=3}^{k-1} G_j(x_j - x_{j-1} - \beta_{2j-1})G_k(x_{k-1}), \tag{101}$$

$$\bar{\lambda}_{k-2} = (\beta_3 + \mu_0, \beta_5, \ldots, \beta_{2k-3}), \quad \text{где} \quad k \geqslant 3. \tag{102}$$

1. Условие $\alpha + e_1 \geqslant 1$ леммы 4 принимает вид $\mu_0 + \min(\alpha_1, \alpha_2) \geqslant 1$ и, по сути, было проверено ещё в доказательстве леммы 7 при рассмотрении бета-интеграла в (52). При $\beta_1 \geqslant \alpha_0$ всё очевидно ($\mu_0 = 0$), при $\beta_1 < \alpha_0$ и $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем

$$\mu_0 + \min(\alpha_1, \alpha_2) = \beta_1 - \alpha_0 + \alpha_1 \geqslant \beta_1 \geqslant 1$$

ввиду (2), наконец, в последнем случае при $\beta_1 < \alpha_0$ и $\alpha_2 < \alpha_1$ имеем

$$\mu_0 + \min(\alpha_1, \alpha_2) = \beta_1 - \alpha_0 + \alpha_2 \geqslant 1$$

ввиду (3) при $r = 0$ (именно этот основной случай рассмотрен в лемме 7).

2. Из (100) немедленно следует (7), так как сомнения по поводу $A_1 \subset N$ сняты в пункте 1 (см. также структуру многочленов $P_{j2}(x)$, $P_{j3}(x)$ в обозначениях леммы 7).

3. Проверим теперь $\mathrm{I}(P, \bar{Q}_{k-1})$. Из (101) следует, что

$$\deg_{x_j} P = p_j = \beta_{2j-1} + \beta_{2j+1} - 2$$

при $j = 1, \ldots, k-1$, из (100) получаем $q_j = \beta_{2j} + \alpha_{2j+1} + \beta_{2j+1} - \alpha_{2j-1}$ при $j = 1, \ldots, k-1$. Поэтому

$$p_j - q_j + 2 = \beta_{2j-1} + \alpha_{2j-1} - \beta_{2j} - \alpha_{2j+1} \leqslant 0$$

ввиду (3) при $r = 2j - 1$, $j = 1, \ldots, k-1$, т. е. условия $\mathrm{I}(P, \bar{Q}_{k-1})$ выполнены.

4. Проверим $\mathrm{II}(\bar{Q}_{k-1})$ и $\mathrm{III}(\bar{Q}_{k-1})$. Положим для $j = 1, \ldots, k-1$

$$\begin{gathered} e_j = \min(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}), \quad E_j = \max(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}), \\ F_j = \min(\alpha_{2j} + \beta_{2j} - 1, \alpha_{2j+1} + \beta_{2j+1} - 1), \\ f_j = \max(\alpha_{2j} + \beta_{2j} - 1, \alpha_{2j+1} + \beta_{2j+1} - 1). \end{gathered} \tag{103}$$

Из (100) получим, что при $j = 2, \ldots, k-1$ числа (103) — параметры многочленов $Q_j(x)$, а при $j = 1$ к ним нужно добавить μ_0. Рассмотрим сначала неравенства $(II)_j$ и $(\mathrm{III})_j$ при $j = 3, \ldots, k-1$:

$$\max(\alpha_{2j-2} + \beta_{2j-2} - 1, \alpha_{2j-1} + \beta_{2j-1} - 1) < \max(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}) + \beta_{2j-1}, \tag{104}$$

$$\min(\alpha_{2j-2} + \beta_{2j-2} - 1, \alpha_{2j-1} + \beta_{2j-1} - 1) < \min(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}) + \beta_{2j-1}. \tag{105}$$

Система неравенств (104) и (105) для $a, b, c \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\max(a, b) < \max(b, c), \tag{106}$$

$$\min(a, b) < \min(b, c). \tag{107}$$

Если $a > b$, то (106) равносильно $a \leqslant c$, (107) выполнено. Если $a \leqslant b$, то (106) выполнено, а (107) равносильно снова $a \leqslant c$. Таким образом, в обозначениях (104) и (105) эта система равносильна неравенству $\alpha_{2j-2} + \beta_{2j-2} \leqslant \alpha_{2j} + \beta_{2j-1}$, или неравенству (3) при $r = 2j - 2$, т. е. II_j и III_j выполнены.

Неравенства II_2 и III_2 приводят к системе, аналогичной (104) и (105) при $j = 2$, так как, как указано выше, к левым частям (104) и (105) следует добавить μ_0 (производятся замены $F_1 \to F_1 + \mu_0$, $f_1 \to f_1 + \mu_0$). Ту же процедуру нужно провести и для правых частей, так как $\lambda_2 = \beta_3 + \mu_0$ (см. (102)). Таким образом, набор неравенств (3) при чётных $r = 2, 4, \ldots, 2k - 4$ обеспечивает выполнение $\mathrm{II}(\bar{Q}_{k-1})$ и $\mathrm{III}(\bar{Q}_{k-1})$ в случае (103).

5. Из симметрии $c \leftrightarrow a$ функции Гаусса в (40) (см. также применение леммы 5 в лемме 7 и её влияние на параметры многочленов (100) и (101)) получим, что в интеграле (1) возможна замена параметров

$$(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) \to (\alpha_1, \alpha_0, \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0),$$

при которой интеграл (1) умножается на коэффициент

$$\frac{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_0 + \beta_1 - \alpha_1)}$$

(см. (39)). Поэтому в случае $\alpha_0 > \alpha_1$ можно написать список условий, аналогичный (3)—(5), обеспечивающий (6).

Литература

[1] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973.

[2] Васильев Д. В. Некоторые формулы для значений дзета-функции Римана в целых точках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1996. — № 1. — С. 81—84.

[3] Васильев Д. В. О малых линейных формах от значений дзета-функции Римана в нечётных точках. — Препринт № 1 (558). — Минск: НАН Беларуси, Ин-т математики, 2000.

[4] Злобин С. А. Разложения кратных интегралов в линейные формы // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, № 5. — С. 683—706.

[5] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. — 1979. — Vol. 11. — P. 268—272.

[6] Zudilin W. Arithmetics of linear forms involving odd zeta values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2004. — Vol. 16, no. 1. — P. 251—291.

[7] Zudilin W. Well-poised hypergeometric transformations of Euler-type multiple-integrals // J. London Math. Soc. (2). — 2004. — Vol. 70. — P. 215—230.