Оценки многочленов от логарифмов некоторых рациональных чисел*

В. Н. СОРОКИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vnsormm@mech.math.msu.su

УДК 517.5

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита—Паде, обобщённые системы Никишина.

Аннотация

Изучаются аппроксимации Эрмита—Паде второго типа для алгебры, порождённой обобщённой системой Никишина марковских функций, соответствующей некоторому бесконечному ветвящемуся графу. Даны арифметические приложения этой конструкции. А именно, получены нижние оценки многочленов с целыми коэффициентами от логарифмов некоторых рациональных чисел. Эти оценки частично дополняют известные результаты, полученные ранее методом Зигеля.

Abstract

V. N. Sorokin, Estimates for polynomials in logarithms of some rational numbers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 179—194.

The Hermite–Pade approximations of the second type for algebra generated by a generalized Nikishin system of Markov functions corresponding to an infinite branching graph are investigated. Arithmetical applications of this construction are given. Namely, lower estimates for polynomials with integer coefficients in logarithms of some rational numbers are obtained. These estimates partially refine some known results obtained earlier by the Siegel method.

Конец пятидесятых годов прошлого века ознаменовался выдающимися достижениями в теории трансцендентных чисел. Существенно развив метод К. Зигеля, А. Б. Шидловский [6] доказал окончательные теоремы об алгебраической независимости значений E-функций. Первые существенные результаты для G-функций были получены этим методом в середине семидесятых годов А. И. Галочкиным [1]. В частности, изучался такой классический объект, как алгебра $\mathfrak{L}$, состоящая из многочленов от нескольких логарифмов. С другой стороны, метод Эрмита в теории чисел был и остаётся одним из наиболее востребованных инструментов для получения эффективных оценок. Мы изучаем алгебру $\mathfrak{L}$ с позиции аппроксимаций Эрмита. Отличительной особенностью случая нескольких логарифмов оказался эффект принудительного расширения алгебры $\mathfrak{L}$ до обобщённой алгебры Линдена.

*Работа частично поддержана грантами INTAS 03-51-6637, РФФИ 05-01-00697, НШ 1551.2003.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 179—194.

1. Введение

В [3] Е. М. Никишин доказал линейную независимость над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ натуральных логарифмов рациональных чисел (вместе с единицей)

$$\theta_1 = \log\left(1+\frac{1}{q}\right), \quad \theta_2 = \log\left(1+\frac{2}{q}\right), \dots, \quad \theta_p = \log\left(1+\frac{p}{q}\right) \tag{1}$$

при условии, что

$$e^{2p}p! < q, \tag{2}$$

где q — натуральное число. При том же условии (2) он получил нижнюю оценку линейной формы

$$l = x_0 + x_1\theta_1 + \ldots + x_p\theta_p$$

с целыми рациональными коэффициентами

$$x_0, x_1, \dots, x_p \in \mathbb{Z},$$

такими что

$$X = \max\{|x_j| \colon j = 0, \dots, p\} > 0.$$

А именно,

$$|l| > \frac{c_*}{X^\mu},$$

где

$$\mu = \frac{p\log q}{\log q - \log(e^{2p}p!)},$$

а c_* — эффективная положительная постоянная. Тем самым Е. М. Никишин несколько улучшил предшествующий результат Н. И. Фельдмана [5].

В настоящей работе мы получим нижнюю оценку для произвольного ненулевого многочлена с целыми рациональными коэффициентами от тех же чисел (1).

Будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если r, p и q — натуральные числа, удовлетворяющие условию*

$$q > \kappa p^{N+1}, \tag{3}$$

где

$$\kappa = \kappa_r(p) = 6^{rN}2^{r+N} \tag{4}$$

и

$$N = N_r(p) = (p+1)^r - 1, \tag{5}$$

то для любого не равного тождественно нулю многочлена P от p переменных, имеющего целые рациональные коэффициенты, степень которого не превосходит r,

$$P(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_p], \quad P \not\equiv 0, \quad \deg P \leqslant r,$$

справедливо неравенство

$$|P(\theta_1, \dots, \theta_p)| > \frac{c}{q^N}\,\frac{1}{H^\mu}, \tag{6}$$

где $H = \mathsf{H}(P)$ — высота многочлена P, показатель μ вычисляется по формуле

$$\mu = \mu_r(p;q) = \frac{N\log q + \log\kappa}{\log q - \log(\kappa p^{N+1})}, \tag{7}$$

а c — эффективная положительная постоянная, зависящая только от чисел r и p.

Мы пользуемся стандартными обозначениями. Высотой многочлена называется максимум модулей всех его коэффициентов, а степенью — максимальная степень входящего в многочлен монома.

Из формулы (7) следует, что при $q \to \infty$ показатель μ стремится к $N = (p+1)^r - 1$. В то же время число слагаемых, входящих в многочлен P, равно

$$\nu + 1 = \nu_r(p) + 1 = \binom{r+p}{r}. \tag{8}$$

К сожалению, при $r > 1$ число ν много меньше N, поэтому оценка (6) в пределе не согласуется с теоремой Дирихле. Это связано с методом доказательства теоремы 1. Фактически она получается как частный случай более общей теоремы 2 (см. раздел 4) об оценке линейной формы от N чисел. В этой связи мы должны сравнить наш результат с результатом А. И. Галочкина. В [1] была получена предельно правильная оценка типа (6), т. е. с показателем μ, стремящимся к ν, когда q стремится к ∞. Наш результат заведомо хуже результата А. И. Галочкина при больших q, однако оценка на параметр q в [1, следствие из теоремы 4] при больших p или r имеет порядок

$$q > q_0 \approx (rp)^{4\nu^3 p}. \tag{9}$$

Если p фиксировано, а $r \to \infty$, то из (8) следует, что

$$\nu \sim \frac{r^p}{p!},$$

т. е. показатель степени в (9) растёт степенным образом. В оценке (3) показатель растёт экспоненциально. В этом случае результат А. И. Галочкина будет намного точнее нашего. Если же r фиксировано, а $p \to \infty$, то

$$\nu \sim \frac{p^r}{r!},$$

т. е. показатель степени в (9) растёт как степенная функция p^{3r}. В оценке (3) показатель растёт как p^r. В этом случае наша оценка лучше. Тем самым при p, много большем, чем r, имеется большой интервал значений q, при которых наш результат несколько дополняет и улучшает результат А. И. Галочкина.

Отметим, что в [1,5] рассматривались числа вида $\log(1-\alpha_j/q)$. Мы ограничились рассмотрением чисел (1), но, конечно же, результаты легко распространяются и на этот более общий случай.

Заметим также, что в процессе доказательства мы не стремились к асимптотически точным оценкам, а ограничивались простыми неравенствами, справедливыми при всех значениях r, p и q. Из доказательства видно, что оценка (3) может быть несколько улучшена.

В качестве прямого следствия теоремы 2 мы приводим в конце работы оценки линейных форм с алгебраическими коэффициентами.

В [3] использовались аппроксимации Эрмита—Паде второго типа (совместные рациональные аппроксимации с общим знаменателем), построенные для марковских функций

$$\lambda_j(z) = \int\limits_{j-1}^{j} \frac{dx}{z-x} = \log\frac{z-j+1}{z-j}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

образующих так называемую систему Анжелеско. Заметим, что в [5] использовались аппроксимации Эрмита—Паде первого типа (линейные формы), построенные для аналогичных функций, а в [1] применялся метод Зигеля.

С другой стороны, в [4] мы применяли аппроксимации Эрмита—Паде второго типа к изучению арифметических свойств значений обобщённых полилогарифмов

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_t<+\infty} \frac{z^{n_t}}{n_1^{s_1}\ldots n_t^{s_t}},$$

где

$$\mathbf{s} \in \mathbb{N}^t, \quad t = 1, 2, 3, \ldots,$$

составляющих базис алгебры Линдена. Эти функции, по существу, образуют обобщённую систему Никишина, соответствующую полному бинарному графу (см. [2]).

В настоящей работе мы рассмотрим естественное объединение конструкций из [3] и [4].

2. Постановка задачи Эрмита—Паде

Прежде чем приступить к построению системы специальных функций, играющих основную роль при доказательстве теорем 1 и 2, мы хотим в качестве замечания, опуская детали доказательств, описать линейную оболочку этих функций в терминах только их аналитических свойств. Это позволит нам лучше понять все дальнейшие построения. Задачу Эрмита—Паде мы также сформулируем в инвариантной, не зависящей от выбора базиса форме.

Будем говорить, что аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ *чисто логарифмическое* ветвление, если в некоторой проколотой окрестности этой точки справедливо следующее представление:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{M} A_m(z)\log^m(z-a), \tag{10}$$

где $A_m(z)$ — некоторые функции, голоморфные в точке a. Для бесконечно удалённой точки $a = \infty$ в формуле (10) следует брать $\log z$.

Зафиксируем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество

$$\mathsf{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_p\}, \tag{11}$$

состоящее из $p+1$ произвольных различных точек. Введём обозначение

$$U = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \colon R < |z| \leqslant +\infty\}, \quad R = \max_{j=0,\ldots,p} |a_j|,$$

для окрестности бесконечности. Зафиксируем произвольный круг

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < R_0\},$$

лежащий в области U.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге U_0 и аналитически продолжается по любому пути в $\mathbb{C}$, не проходящему через точки множества A. Предположим также, что особыми точками этой полной аналитической функции могут быть только чисто логарифмические особенности в точках (11) и $z=\infty$ и каждая из функций A_m, участвующая в представлении (10), обладает теми же свойствами, что и f (с заменой z_0 на a).

Множество всех таких функций f, голоморфных в круге U_0, обозначим $\hat{\mathfrak{A}}$. Тогда

1) $\hat{\mathfrak{A}}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел;
2) $\hat{\mathfrak{A}}$ — алгебра относительно обычного умножения;
3) $\hat{\mathfrak{A}}$ — градуированная алгебра.

Порядок $\operatorname{ord}(f)$ элемента $f \in \hat{\mathfrak{A}}$ может быть определён следующим образом. Будем использовать стандартное определение группы монодромии. Мы имеем сферу Римана $\bar{\mathbb{C}}$, проколотую в $p+1$ точках множества A и в точке $z=\infty$. Фундаментальная группа $\boldsymbol{\pi_1}$ этого топологического пространства, состоящая из классов гомотопных замкнутых путей, есть свободная группа с $p+1$ образующими, т. е. группа слов, составленных из букв алфавита A и обратных к ним. С другой стороны, обозначим S группу всех перестановок голоморфных ветвей полной аналитической функции f в круге U_0. Тогда аналитическое продолжение порождает монодромию, т. е. гомоморфизм групп

$$\boldsymbol{\sigma} \colon \boldsymbol{\pi_1} \to \mathsf{S},$$

и группу монодромии — образ этого гомоморфизма:

$$\mathsf{M}_f = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi_1}) = \boldsymbol{\pi_1} / \ker(\boldsymbol{\sigma}).$$

Порядок нулевого элемента формально полагаем равным $-\infty$:

$$\operatorname{ord}(\mathbf{0}) = -\infty.$$

Пусть $f \neq \mathbf{0}$. Если группа монодромии тривиальна, $\mathsf{M}_f = \mathbf{1}$, то по определению

$$\operatorname{ord}(f) = 0.$$

В противном случае рассмотрим приращения

$$\tilde{f}_s = \frac{1}{2\pi i}(f - s(f)), \quad s \in \mathsf{M}_f,$$

и положим
$$\operatorname{ord}(f) = \max_{s \in \mathsf{M}_f} \operatorname{ord}(\tilde{f}_s) + 1.$$
Легко видеть, что это определение корректно.

Обозначим $\mathfrak{A}$ множество тех элементов алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, которые имеют непосредственное аналитическое продолжение в область U. Тогда $\mathfrak{A}$ — градуированная подалгебра алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$. В дальнейшем удобно считать элементами $\mathfrak{A}$ функции, голоморфные в области U.

Заметим, что функции нулевого порядка, т. е. не имеющие особенностей в $\bar{\mathbb{C}}$, — это ненулевые константы. Функции первого порядка в алгебре $\mathfrak{A}$ — логарифмы
$$\lambda_j(z) = \log\frac{z-a_{j-1}}{z-a_j}, \quad j = 1, \dots, p, \tag{12}$$
а также любые их нетривиальные линейные комбинации плюс константы. При этом в окрестности бесконечности мы берём для определённости главные ветви логарифмов (12).

В частности, алгебра $\mathfrak{A}$ содержит подалгебру $\mathfrak{L}$, порождённую функциями (12), т. е. состоящую из всевозможных многочленов с комплексными коэффициентами от этих логарифмов.

Будем использовать обозначение
$$\mathfrak{A}_r = \{f \in \mathfrak{A}\colon \operatorname{ord}(f) \leqslant r\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$
для линейного пространства функций порядка не выше r. Положим
$$N + 1 = N_r(p) + 1 = \dim \mathfrak{A}_r.$$

Зафиксируем натуральное число r. Задача Эрмита—Паде ставится следующим образом.

Задача Эрмита—Паде (HP). Для любого целого неотрицательного числа n требуется найти многочлен Q_n, такой что

1) $Q_n \not\equiv 0$;
2) $\deg Q_n \leqslant nN$;
3) для любой функции $f \in \mathfrak{A}_r$ выполняется интерполяционное условие
$$R_n(f; z) = Q_n(z) f(z) - P_n(f; z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty,$$
с некоторым многочленом второго рода $P_n(f; z)$, зависящим от f.

Эта задача имеет решения, поскольку она равносильна системе nN линейных однородных уравнений относительно $nN + 1$ неизвестных коэффициентов многочлена Q_n.

Построим некоторый базис алгебры $\mathfrak{A}$ и, в частности, вычислим размерность $N_r(p)$. Элементы базиса будут нумероваться вершинами некоторого графа-дерева G. Рёбра этого графа раскрашены в $p + 2$ цветов
$$\mathtt{D}_0, \mathtt{D}_1, \dots, \mathtt{D}_{p+1}. \tag{13}$$

Граф строится следующим образом. Из корневой вершины $\boldsymbol{\varpi}$ выходят p вершин с рёбрами, раскрашенными в цвета $\mathtt{D}_1, \ldots, \mathtt{D}_p$. Из каждой некорневой вершины α выходят $p+1$ вершин с рёбрами, раскрашенными во все $p+2$ цветов (13), кроме цвета ребра, входящего в вершину α.

Вершины графа G естественным образом распадаются на этажи. Считаем, что корневая вершина принадлежит нулевому этажу. Пусть $\mathsf{G}^{(k)}$ — множество вершин k-го этажа. Обозначим также

$$\mathsf{G}_r = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathsf{G}^{(k)}$$

конечный подграф бесконечного графа G, образованный его первыми $r+1$ этажами. Число вершин этого графа равно

$$\sharp \mathsf{G}_r = 1 + p + p(p+1) + \ldots + p(p+1)^{r-1} = (p+1)^r.$$

Каждому из цветов (13) соответствует дифференциальный оператор, действующий на функциях, голоморфных в области U, а именно

$$\begin{aligned}
(\mathtt{D}_0 f)(z) &= (a_0 - z)\frac{d}{dz} f(z),\\
(\mathtt{D}_j f)(z) &= \frac{(z-a_{j-1})(a_j - z)}{a_j - a_{j-1}}\,\frac{d}{dz} f(z), \quad j = 1, \ldots, p,\\
(\mathtt{D}_{p+1} f)(z) &= (a_p - z)\frac{d}{dz} f(z).
\end{aligned}$$

Каждой вершине $\alpha \in \mathsf{G}$ поставим в соответствие функцию f_α. Корневой вершине соответствует функция, тождественно равная единице: $f_{\boldsymbol{\varpi}} = 1$. Далее, если из вершины α выходит вершина β и соответствующее ребро имеет цвет $\mathtt{D}_j$,

$$\alpha \xrightarrow{\mathtt{D}_j} \beta,$$

то полагаем

$$\mathtt{D}_j f_\beta = f_\alpha, \quad \beta \in \mathsf{G}, \quad \beta \neq \boldsymbol{\varpi}. \tag{14}$$

Соотношения (14) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами из поля рациональных функций $\mathbb{C}(z)$. Эта система имеет единственное решение в классе функций, голоморфных и равных нулю в бесконечности, т. е. с начальными условиями

$$f_\beta(\infty) = 0, \quad \beta \in \mathsf{G}, \quad \beta \neq \boldsymbol{\varpi}.$$

Система (14) легко решается, например в терминах рядов Лорана. Легко видеть, что

$$\{f_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{G}\}$$

и есть базис алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом,

$$N_r(p) + 1 = (p+1)^r.$$

Например, базисными функциями, отвечающими первому этажу графа, будут функции (12). Отметим также, что произведения степеней логарифмов (12) будут линейными комбинациями базисных элементов с целыми рациональными коэффициентами.

3. Решение задачи Эрмита—Паде

Выше мы построили базис $\{f_\alpha\}$ алгебры $\mathfrak{A}$, который нам понадобится для арифметических приложений. Теперь мы построим другой базис $\{g_\alpha\}$, более удобный для изучения аналитических свойств решений задачи HP. В дальнейшем полагаем, что все точки множества A лежат на вещественной прямой. Пусть для определённости

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_p.$$

Введём также обозначения для промежутков, на которые эти точки разбивают вещественную ось, а именно

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (-\infty, 0], \\ \Delta_j &= [a_{j-1}, a_j], \quad j = 1, \ldots, p, \\ \Delta_{p+1} &= [a_p, +\infty]. \end{aligned}$$

Рассмотрим $p+2$ интегральных оператора

$$\begin{aligned} \frac{(\mathtt{T}_0 f)(z)}{a_p - z} &= \int\limits_{\Delta_0} \frac{f(x)}{z-x}\,\frac{dx}{a_p - x}, \\ (\mathtt{T}_j f)(z) &= \int\limits_{\Delta_j} \frac{f(x)}{z-x}\,dx, \quad j = 1, \ldots, p, \\ \frac{(\mathtt{T}_{p+1} f)(z)}{a_0 - z} &= \int\limits_{\Delta_{p+1}} \frac{f(x)}{z-x}\,\frac{dx}{a_0 - x}. \end{aligned}$$

Для любой вершины $\alpha \in \mathsf{G}$, отличной от корневой, существует единственная цепочка рёбер

$$(\mathtt{D}_{j_1}, \ldots, \mathtt{D}_{j_m}), \quad j_k = j_k(\alpha),$$

соединяющая эту вершину с корнем. Положим

$$g_\alpha = \mathtt{T}_{j_1} \ldots \mathtt{T}_{j_m} 1.$$

По определению

$$g_{\boldsymbol{\varpi}} = 1.$$

Тогда

$$\{g_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{G}\} \,—$$

базис алгебры $\mathfrak{A}$.

Система $\{g_\alpha\}$ представляет собой обобщённую систему Никишина, соответствующую графу G (см. [2]). Она состоит из функций марковского типа

$$g_\alpha(z) = \int\limits_{\Delta_{j_1(\alpha)}} \frac{\varphi_\alpha(x)}{z-x}\,dx, \quad \alpha \in \mathsf{G}, \quad \alpha \neq \boldsymbol{\varpi},$$

где интегрирование ведётся по одному из отрезков $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$, а $\varphi_\alpha(x)$ — некоторая весовая функция (знакопостоянная на этом отрезке). Например, для первого этажа графа все весовые функции равны единице.

Задача НР равносильна соотношениям ортогональности

$$\int\limits_{\Delta_{j_1(\alpha)}} Q_n(x)x^m\varphi_\alpha(x)dx = 0, \quad m = 0, \ldots, n-1, \quad \alpha \in \mathsf{G}_r, \quad \alpha \neq \boldsymbol{\varpi},$$

которые лежат в основе доказательства следующих двух лемм.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Решение задачи* НР *единственно* (*с точностью до нормировки*).
2. *Многочлен* Q_n *имеет максимальную степень* nN.
3. *Многочлен* Q_n *имеет* nN/p *простых нулей внутри каждого из отрезков* $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$.

Все утверждения леммы 1 вытекают из результатов [2], для случая $p = 1$ подробное доказательство приведено в [4]. Для произвольного p доказательство аналогично. То же замечание относится и к следующей лемме 2.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_M = \frac{1}{M!}\left(\frac{d}{dx}\right)^M \prod_{j=0}^{p}(x-a_j)^M.$$

Лемма 2. *Имеет место формула Родрига*

$$Q_n = D_n D_{(p+1)n} \ldots D_{(p+1)^{r-1}n} 1. \tag{15}$$

Написав формулу (15), мы тем самым зафиксировали некоторую стандартную нормировку многочленов Q_n. Заметим, что Q_n — многочлен с целыми рациональными коэффициентами от переменной x и параметров $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

Отметим, что утверждения 1 и 2 леммы 1 не следуют из общих результатов работы [2] в случае произвольного расположения точек множества A на комплексной плоскости. То же замечание относится и к доказательству леммы 2 (хотя формула Родрига (15) даёт решение задачи НР и в случае общего расположения точек на плоскости). Это — открытая проблема.

Отметим также, что необходимость построения аппроксимаций Эрмита—Паде для всей алгебры $\mathfrak{A}$ обусловлена тем, что для алгебры $\mathfrak{L}$ (при $p > 1$), по-видимому, не существует таких аппроксимаций с хорошими арифметическими свойствами.

Имея в виду дальнейшее приложение нашей конструкции к исследованию чисел (1), мы остановимся теперь на конкретном выборе параметров (11), а именно

$$a_j = j, \quad j = 0, 1, \dots, p.$$

Обозначим

$$\omega_M = \text{НОК}\{1, \dots, M\}$$

наименьшее общее кратное первых M натуральных чисел. Тогда, как следует из уравнений (14), коэффициенты s_k ряда Лорана

$$f_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{z^{k+1}}$$

любой базисной функции f_α, $\alpha \in \mathsf{G}$, $\alpha \neq \boldsymbol{\varpi}$, — рациональные числа. При этом если $\alpha \in \mathsf{G}^{(m)}$, то первые M коэффициентов этого ряда имеют общий знаменатель, который делит число ω_M^m. Отсюда следует лемма 3.

Лемма 3. *Если $\alpha \in \mathsf{G}^{(m)}$, то*

$$\omega_{nN}^m P_n(f_\alpha; z) \in \mathbb{Z}[z] - \tag{16}$$

многочлены с целыми рациональными коэффициентами.

Заметим, что оценка (16) может быть немного улучшена.

Оценим многочлены $Q_n(x)$.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$|Q_n(x)| \leqslant \left(2^{r(N+1)}(|x| + p)^N\right)^n. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим q_n старший коэффициент многочлена $Q_n(x)$. По лемме 1 многочлен $Q_n(x)$ имеет nN/p нулей внутри каждого из отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_p$, поэтому

$$Q_n(x) = q_n \prod_{j=1}^{p} \prod_{k} (x - x_{j,k}),$$

где $x_{j,k}$ — нули многочлена $Q_n(x)$, лежащие на отрезке Δ_j. Следовательно,

$$|Q_n(x)| \leqslant q_n(|x| + p)^{nN}.$$

По лемме 2 вычислим старший коэффициент:

$$q_n = \prod_{j=0}^{r-1} \binom{(p+1)^r n}{(p+1)^j n}.$$

Тогда

$$q_n \leqslant 2^{r(p+1)^r n},$$

откуда и следует неравенство (17). Лемма доказана.

Оценим функции второго рода.

Лемма 5. *Для всех $\alpha \in \mathsf{G}_r$, $\alpha \neq \varpi$, при $|z| > p$ справедливы неравенства*

$$|R_n(f_\alpha; z)| \leqslant \frac{c_1}{|z| - p} \left(\frac{\varkappa p}{|z|}\right)^n,$$

где

$$\varkappa = 2^{r(N+1)}(2p)^N,$$

а c_1 — эффективная постоянная, зависящая только от чисел p и r.

Доказательство. Вначале рассмотрим функции второго рода для базисных функций g_α, образующих обобщённую систему Никишина:

$$R_n(z) = R_n(g_\alpha; z) = \int\limits_{\Delta_j} \frac{Q_n(x)}{z - x} \varphi(x)\, dx,$$

где интегрирование ведётся по отрезку, соответствующему функции g_α, и $\varphi = \varphi_\alpha$ — её весовая функция на этом отрезке.

При $|z| > p$ разложим функцию $R_n(z)$ в ряд Лорана:

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{z^{k+1}}, \tag{18}$$

где

$$t_k = \int\limits_{\Delta_j} Q_n(x) x^k \varphi(x)\, dx.$$

Оценим коэффициенты ряда:

$$|t_k| \leqslant \|Q_n\|_{\Delta_j} p^k \left| \int\limits_{\Delta_j} \varphi(x)\, dx \right|,$$

где $\|\cdot\|_{\Delta_j}$ — равномерная норма. Мы также воспользовались тем, что функция $\varphi(x)$ не меняет знак на отрезке Δ_j. Последний интеграл представляет собой коэффициент при $1/z$ ряда Лорана функции g_α. Таким образом,

$$|t_k| \leqslant c_2 \|Q_n\|_{\Delta_j} p^k, \quad \alpha \in \mathsf{G}_r, \quad \alpha \neq \varpi.$$

По лемме 4 имеем $\|Q_n\|_{\Delta_j} \leqslant \varkappa^n$. В силу соотношений ортогональности первые n коэффициентов ряда (18) равны нулю. Таким образом,

$$|R_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t_k}{z^{k+1}} \right| \leqslant c_2 \varkappa^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p^k}{|z|^{k+1}} = \frac{c_2}{|z| - p} \left(\frac{\varkappa p}{|z|}\right)^n.$$

Для функций второго рода, отвечающих базису f_α, имеем такую же оценку, но с другой постоянной. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь обобщение задачи НР. Зафиксируем целое неотрицательное число s. Для каждого целого неотрицательного числа n будем искать не равный тождественно нулю многочлен $Q_{n,s}(x)$, принадлежащий линейной оболочке

$$\operatorname{span}\{x^{s+k}\colon k=0,\dots,nN\},$$

такой что по-прежнему выполнены интерполяционные условия 3) задачи HP. Соответствующие многочлены второго рода и функции второго рода будем обозначать $P_{n,s}$ и $R_{n,s}$.

Все рассмотренные выше свойства многочленов Q_n легко обобщаются и на многочлены $Q_{n,s}$. А именно, справедливы следующие утверждения.

1°. *Многочлен $Q_{n,s}$ определён формулой Родрига*

$$Q_{n,s}(x)=D_nD_{(p+1)n}\dots D_{(p+1)^{r-1}n}x^s.$$

2°. *Следующие многочлены имеют целые рациональные коэффициенты*:

$$\omega_{nN+s}^m P_{n,s}(f_\alpha;z)\in\mathbb{Z}[z],\quad \alpha\in\mathsf{G}^{(m)},\quad m=0,\dots,r.$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$|Q_{n,s}(x)|\leqslant 2^{rs}(|x|+p)^s\bigl(2^{r(N+1)}(|x|+p)^N\bigr)^n.$$

4°. *Для всех $\alpha\in\mathsf{G}_r$, $\alpha\neq\boldsymbol{\varpi}$, при $|z|>p$ справедливы неравенства*

$$|R_{n,s}(f_\alpha;z)|\leqslant\frac{c_1}{|z|-p}2^{rs}(2p)^s\left(\frac{\varkappa p}{|z|}\right)^n.$$

Заметим, что в соответствии с условием 3) задачи HP мы используем обозначения

$$Q_{n,s}(x)=P_{n,s}(1;x).$$

Рассмотрим следующий определитель $(N+1)$-го порядка:

$$\boldsymbol{\Delta}_n(x)=\det\{P_{n,s}(f_\alpha;x)\colon \alpha\in\mathsf{G}_r,\ s=0,\dots,N\}.$$

При этом мы зафиксировали произвольный порядок индексов α. Из доказанного в [2] свойства нормальности задачи Эрмита—Паде для обобщённых систем Никишина вытекает лемма 6.

Лемма 6. *Многочлен $\boldsymbol{\Delta}_n(x)$ есть отличная от нуля константа (зависящая от n).*

4. Основная теорема

Теорема 2. *Если r, p и q — натуральные числа, удовлетворяющие условию*

$$q>\kappa_r(p)p^{N_r(p)+1},\tag{19}$$

где

$$\kappa_r(p)=6^{rN_r(p)}2^{r+N_r(p)},\quad N_r(p)=(p+1)^r-1,\tag{20}$$

то числа

$$f_\alpha(-q),\quad \alpha\in\mathsf{G}_r,$$

линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. *При этом для любых целых рациональных чисел*

$$x_\alpha \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \mathsf{G}_r,$$

таких что

$$X = \max\{|x_\alpha| \colon \alpha \in \mathsf{G}_r\} > 0,$$

линейная форма

$$l = \sum_{\alpha \in \mathsf{G}_r} x_\alpha f_\alpha(-q)$$

допускает следующую нижнюю оценку:

$$|l| > \frac{c}{q^N} \frac{1}{X^\mu}, \tag{21}$$

где

$$\mu = \mu_r(p; q) = \frac{N_r(p) \log q + \log \kappa_r(p)}{\log q - \log \kappa_r(p) - (N_r(p) + 1) \log p}, \tag{22}$$

а c — *эффективная положительная постоянная, зависящая только от чисел* r *и* p.

Доказательство. Имеем

$$\omega_{nN+s}^r Q_{n,s}(-q) l = \sum_{\alpha \in \mathsf{G}_r} x_\alpha \omega_{nN+s}^r P_{n,s}(f_\alpha; -q) + \sum_{\substack{\alpha \in \mathsf{G}_r \\ \alpha \neq \boldsymbol{\varpi}}} x_\alpha \omega_{nN+s}^r R_{n,s}(f_\alpha; -q). \tag{23}$$

Поскольку не все числа x_α равны нулю, то по лемме 6 найдётся индекс $s = 0, \ldots, N$, такой что первая сумма в правой части равенства (23) отлична от нуля. Согласно утверждению 2° это целое рациональное число, поэтому оно по модулю не меньше единицы. Таким образом, имеем оценку

$$|\omega_{nN+s}^r Q_{n,s}(-q) l| \geqslant 1 - X \sum_{\substack{\alpha \in \mathsf{G}_r \\ \alpha \neq \boldsymbol{\varpi}}} \omega_{nN+s}^r |R_{n,s}(f_\alpha; -q)|.$$

Заметим, что $\omega_M \leqslant 3^M$. Воспользуемся также утверждениями 3° и 4°. Тогда получим неравенство

$$|l| \cdot A \cdot a^{n+1} \geqslant 1 - X \cdot B \cdot b^{n+1}, \tag{24}$$

где

$$a = \kappa_r(p) q^{N_r(p)}, \quad b = \frac{1}{q} \kappa_r(p) p^{N_r(p)+1},$$

A и B — эффективные постоянные, зависящие только от r и p. Условия (19), (20) означают, что $b < 1$. Тогда из неравенства (24) следует, что $l \neq 0$. Более того, перепишем неравенство (24) в виде

$$|l| \geqslant \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} - X \cdot \frac{B}{A} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

и положим в нём

$$n = \left[\left[\frac{\log \left(X^{\frac{\log \frac{a}{b}}{\log a}} \right)}{\log \frac{1}{b}} \right]\right],$$

где $[[\cdot]]$ — ближайшее целое. Тогда получим неравенство (21) с показателем

$$\mu = \frac{\log a}{\log \frac{1}{b}}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что при $q \to \infty$ показатель μ стремится к N, где N — количество чисел $f_\alpha(-q)$ (не считая единицы) в линейной форме l. Таким образом, согласно теореме Дирихле оценка (21) в пределе неулучшаема.

Сформулированная в разделе 1 теорема 1 является прямым следствием теоремы 2.

В качестве следствия из теоремы 2 приведём также оценку линейной формы с алгебраическими коэффициентами.

Высотой $\mathsf{H}(\xi)$ и степенью $\deg(\xi)$ алгебраического числа ξ мы, как обычно, называем соответственно высоту и степень основного многочлена этого числа. Если $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$ — некоторое множество алгебраических чисел, то через $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\xi})$ мы обозначаем поле, полученное присоединением к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всех чисел ξ_α, а степенью поля $\deg \mathbb{Q}(\boldsymbol{\xi})$ называем размерность этого линейного пространства над полем $\mathbb{Q}$.

Следствие. *Если r, s, p и q — натуральные числа, удовлетворяющие условию*

$$q > \kappa_{rs}(p) p^{N_{rs}(p)+1},$$

то для любого набора целых алгебраических чисел

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{G}_r\},$$

таких что

$$H = \max_{\alpha \in \mathsf{G}_r} \mathsf{H}(\xi_\alpha) > 0, \quad \deg \mathbb{Q}(\boldsymbol{\xi}) \leqslant s,$$

линейная форма

$$\delta = \sum_{\alpha \in \mathsf{G}_r} \xi_\alpha f_\alpha(-q)$$

допускает следующую нижнюю оценку:

$$|\delta| > \frac{\tilde{c}}{q^N} \frac{1}{H^\lambda},$$

где

$$\lambda = s\mu_{rs}(p, q) + s - 1,$$

а $\tilde{c}$ — эффективная положительная постоянная, зависящая только от чисел r, s и p.

Параметры κ, N и μ определены формулами (4), (5) и (7) соответственно.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся целые алгебраические числа ξ_α, $\alpha \in \mathsf{G}_r$, не все равные нулю, такие что выполнено неравенство

$$|\delta| \leqslant \frac{\tilde{c}}{q^N} \frac{1}{H^\lambda}. \tag{25}$$

Обозначим

$$\xi \mapsto \xi^{(k)}, \quad k = 1, \dots, s, \tag{26}$$

все алгебраические сопряжения поля $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\xi})$. (Без ограничения общности считаем, что $\deg \mathbb{Q}(\boldsymbol{\xi}) = s$.) Положим

$$\delta^{(k)} = \sum_{\alpha \in \mathsf{G}_r} \xi_\alpha^{(k)} f_\alpha(-q), \quad k = 1, \dots, s, \tag{27}$$

и рассмотрим произведение

$$\Delta = \delta^{(1)} \dots \delta^{(s)}.$$

Тогда Δ — многочлен от $N_r(p)$ переменных f_α, $\alpha \in \mathsf{G}_r$, $\alpha \neq \boldsymbol{\varpi}$. Степень многочлена не превосходит s. Коэффициенты этого многочлена — симметрические относительно подстановок (26) многочлены от переменных $\xi_\alpha^{(k)}$, поэтому они являются целыми рациональными числами. Другими словами, Δ — это нетривиальная линейная форма с целыми рациональными коэффициентами от чисел $f_\alpha(-q)$, $\alpha \in \mathsf{G}_{rs}$. Поскольку для любого алгебраического числа ξ справедлива оценка

$$|\xi| \leqslant \mathsf{H}(\xi) \cdot \deg(\xi),$$

для коэффициентов многочлена Δ получаем следующее неравенство:

$$h = \mathsf{H}(\Delta) \leqslant c_3 H^s.$$

Для одной из линейных форм (27) мы по предположению имеем верхнюю оценку (25). Кроме того, для всех форм (27) имеет место следующая тривиальная верхняя оценка:

$$|\delta^{(k)}| \leqslant c_4 H.$$

Следовательно,

$$|\Delta| \leqslant \frac{\tilde{c}}{q^N} \frac{1}{H^\lambda} (c_4 H)^{s-1} = \frac{c_5}{q^N} \frac{1}{H^{\lambda - s + 1}} \leqslant \frac{c_6}{q^N} \frac{1}{h^{\lambda_0}},$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\lambda - s + 1}{s}.$$

Но в теореме 2 было доказано противоположное неравенство

$$|\Delta| > \frac{c}{q^N} \frac{1}{h^\mu},$$

где $\mu = \mu_{rs}(p; q)$. Таким образом, при $\lambda_0 = \mu$ мы приходим к противоречию. Следствие доказано.

Выражаю искреннюю благодарность всем участникам кафедрального семинара по теории чисел за внимание, проявленное к этой работе.

Литература

[1] Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Мат. сб. — 1974. — Т. 95 (137), № 3 (11). — С. 396—417.

[2] Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н. Об аппроксимациях Эрмита—Паде для систем функций марковского типа // Мат. сб. — 1997. — Т. 188, № 5. — С. 33—58.

[3] Никишин Е. М. О логарифмах натуральных чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 6. — С. 1319—1327; 1980. — Т. 44. — С. 972.

[4] Сорокин В. Н. О линейной независимости значений обобщённых полилогарифмов // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 8. — С. 139—154.

[5] Фельдман Н. И. Об оценке модуля линейной формы от логарифмов некоторых алгебраических чисел // Мат. заметки. — 1967. — Т. 2, № 3. — С. 245—256.

[6] Шидловский А. Б. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — Т. 23. — С. 35—66.