О статистиках Гаусса—Кузьмина для конечных цепных дробей*

А. В. УСТИНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ustinov@mech.math.msu.su

УДК 511.37+511.336

Ключевые слова: конечные цепные дроби, статистики Гаусса—Кузьмина.

Аннотация

В статье рассматриваются конечные цепные дроби для чисел a/b, когда целые точки (a, b) лежат внутри расширяющейся области. Для таких цепных дробей доказываются свойства, аналогичные статистикам Гаусса—Кузьмина.

Abstract

A. V. Ustinov, On Gauss–Kuz'min statistics for finite continued fractions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 195—208.

The article is devoted to finite continued fractions for numbers a/b when integer points (a, b) are taken from a dilative region. Properties similar to the Gauss–Kuz'min statistics are proved for these continued fractions.

1. Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \ldots, x_s]$ означает цепную дробь
$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \ddots + \cfrac{1}{x_s}}$$
длины s с формальными переменными $x_0, x_1, \ldots, x_s$.
2. Для рационального r представление $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ есть каноническое разложение r в цепную дробь, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), $t_1, \ldots, t_s$ — натуральные числа и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$.
3. Для $x \in [0, 1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ $s_x(r)$ есть количество номеров $j \in \{1, \ldots, s\}$, для которых $[0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x$. В частности, длина цепной дроби $s = s(r)$ есть $s_1(r)$.

*Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 03-51-5070.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 195—208.

4. Знак звёздочки в двойных суммах вида
$$\sum_n \sum_m{}^* \dots$$
означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m,n)=1$.
5. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.
6. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:
$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod p] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$
7. Конечные разности функции $a(u,v)$ обозначаются
$$\Delta_{1,0}a(u,v) = a(u+1,v) - a(u,v), \quad \Delta_{0,1}a(u,v) = a(u,v+1) - a(u,v),$$
$$\Delta_{1,1}a(u,v) = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(u,v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(u,v)).$$
8. Сумма степеней делителей обозначается
$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

2. Введение

Детальный анализ алгоритма Евклида приводит к различным задачам о статистических свойствах конечных цепных дробей (см. [5, раздел 4.5.3]). Если на вход алгоритма подаётся пара натуральных чисел a и b ($a < b$), то основной интерес представляет число делений $s(a,b) = s(a/b)$, которое совпадает с количеством неполных частных в цепной дроби числа
$$\frac{a}{b} = [0; t_1, \dots, t_s].$$

Первый результат о средней длине алгоритма Евклида принадлежат Хейльбронну [10], который доказал, что
$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\log b + O\left(\frac{b}{\varphi(b)}\sigma_{-1}^3(b)\right).$$
Позднее Портер [14] для той же суммы получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами
$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\log b + C_P + O\big(b^{-1/6+\varepsilon}\big),$$

где

$$C_P = \frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(3\log 2 + 4\gamma - 4\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 2\right) - \frac{1}{2} -$$

константа, получившая название константы Портера; её окончательный вид был найден Ренчем (см. [12]). Промежуточные результаты в этом направлении принадлежат Тонкову [6, 15].

При усреднении по обоим параметрам a и b можно получать более детальную информацию. Так, Диксон [9] показал, что для любого положительного ε найдётся такая константа $c_0 > 0$, что

$$\left| s\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{12\log 2}{\pi^2}\log b \right| < (\log b)^{1/2+\varepsilon}$$

для всех пар чисел (a, b) лежащих в области $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant R$, за исключением, быть может, $R^2 \exp(-c_0(\log R)^{\varepsilon/2})$ пар.

Хенсли [11] уточнил результат Диксона и доказал, что разность между величиной $s(a/b)$ и её средним значением асимптотически имеет нормальное распределение, параметры которого можно указать явно.

В настоящее время Валле развиты методы, которые при усреднении по a и b позволяют исследовать среднее время работы различных вариантов алгоритма Евклида [17], включая бинарный [16].

Кроме того, во многих случаях разность между длиной работы алгоритма и её средним значением оказывается гауссовской величиной [8].

Более точную информацию о цепной дроби числа a/b даёт величина $s_x(a/b)$ являющаяся дискретным аналогом статистик Гаусса—Кузьмина $F_n(x)$. Для фиксированного $x \in [0, 1]$ функция $F_n(x)$ определяется как мера тех чисел

$$\alpha = [0; t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots] \in [0, 1],$$

для которых

$$\alpha_n = [0; t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots] \in [0, x].$$

В [13] Кузьмин доказал предположение Гаусса

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \log_2(x+1).$$

Окончательный результат в этом направлении принадлежит Бабенко [3], который доказал, что

$$F_n(x) = \log_2(x+1) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n \psi_j(x),$$

где $\lambda_j \to 0$, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots$ и $\psi_j(x)$ — функции, аналитические в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1)$.

Арнольдом (см. [4, № 1993-11]) была поставлена задача о статистических свойствах элементов цепных дробей для чисел a/b, когда точки (a, b) берутся внутри сектора $a, b > 0$, $a^2 + b^2 \leqslant R^2$ или внутри расширяющейся области

$\Omega(R)$ общего вида. Более общим является вопрос об асимптотическом поведении суммы

$$N_x(R) = \sum_{(a,b)\in\Omega(R)} s_x\left(\frac{a}{b}\right),$$

аналогичный вопросу о статистиках Гаусса—Кузьмина. В случае сектора ответ на него был впервые получен Авдеевой и Быковским в [2]. Затем в [1] была доказана более точная асимптотическая формула

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi}\log(1+x)R^2\log R + O(R^2),$$

в которой остаточный член на $\sqrt{\log R}$ лучше, чем в [2]. Устиновым в [7] для величины $N_x(R)$ получена асимптотическая формула с двумя значащими членами

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi}R^2[\log(1+x)\log R + C(x)] + O(R^{17/9}\log^2 R)$$

со сложно устроенной функцией $C(x)$.

В настоящей работе рассматривается аналогичный вопрос для произвольной области $\Omega(R)$, которая получается гомотетией с коэффициентом $R > 1$ из некоторой фиксированной области Ω_0:

$$\Omega(R) = R\cdot\Omega_0 = \left\{(x,y)\colon x,y>0,\ \left(\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right)\in\Omega_0\right\}.$$

Область Ω_0 задаётся в полярных координатах,

$$\Omega_0 = \left\{(\rho,\varphi)\colon 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant r(\varphi)\right\},$$

и имеет площадь

$$V_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

При условии, что на всем отрезке $[0,\pi/4]$ функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям

$$r(\varphi)\geqslant\varepsilon_0>0,\quad r'(\varphi)\leqslant r(\varphi)\operatorname{arctg}\varphi,$$

для величины

$$N_x(R) = \sum_{(a,b)\in\Omega(R)} s_x\left(\frac{a}{b}\right)$$

доказывается асимптотическая формула с двумя значащими членами

$$N_x(R) = \frac{2V_0}{\zeta(2)}R^2(\log(x+1)\log R + C(x)) + O(R^{2-1/5}\log^3 R).$$

Она уточняет предыдущий частный результат, полученный в [7], и показывает, что главный значащий член в статистиках Гаусса—Кузьмина для конечных цепных дробей зависит не от формы области Ω_0, а лишь от её площади.

3. Вспомогательное преобразование

Обозначим через $N_x^*(R)$ сумму

$$N_x^*(R) = \sum_{\substack{(a,b)\in\Omega(R)\\(a,b)=1}} s_x\left(\frac{a}{b}\right).$$

Так как

$$N_x(R) = \sum_{d\leqslant R} N_x^*\left(\frac{R}{d}\right),$$

то для решения задачи достаточно получить асимптотическую формулу для $N_x^*(R)$.

Пусть $T_x^*(R)$ — число решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1,\\ mP + nP' = a,\\ mQ + nQ' = b,\\ a^2 + b^2 \leqslant R^2 r^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant m \leqslant xn, \quad (m,n) = 1. \tag{2}$$

Аналогично [7, лемма 3] проверяется, что для любого $R \geqslant 2$ и $x \in [0;1]$ справедливо равенство

$$N_x^*(R) = T_x^*(R) + \frac{R^2}{\zeta(2)}[x<1]V_0(x) + O(R\log R), \tag{3}$$

где

$$V_0(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} x} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Для дальнейшего исследования величины $T_x^*(R)$ введём параметр U, лежащий в пределах $1 \leqslant U \leqslant R$. Через T_1 обозначим число решений системы (1) с ограничениями (2), которые удовлетворяют дополнительному условию $Q' \leqslant U$. Число решений, для которых $Q' > U$, обозначим через T_2. Тогда

$$T_x^*(R) = T_1 + T_2.$$

Каждую из величин T_1 и T_2 исследуем отдельно.

4. Вычисление величины T_1

Лемма 1. *Пусть $q \geqslant 1$ — целое и функция $a(u,v)$ задана в целых точках (u,v), где $1 \leqslant u,v \leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет* *неравенствам*

$$a(u,v) \geqslant 0, \quad \Delta_{1,0}a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{0,1}a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{1,1}a(u,v) \geqslant 0 \tag{4}$$

во всех точках, где эти условия определены. Тогда для суммы

$$W = \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv-1)a(u,v)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=1}^{q} a(u,v) + O(A\psi(q)\sqrt{q}\,),$$

где $\psi(q) = \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$ *и* $A = a(1,1)$ — *наибольшее значение функции* $a(u,v)$.

Доказательство см. в [7].

Пусть q — натуральное и $x \in [0,1]$. Для целых u и v, лежащих в пределах $1 \leqslant u, v \leqslant q$ через $I_q(u,v)$ будем обозначать отрезок

$$\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} - \frac{x}{q(q+vx)}\right), \operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right].$$

Лемма 2. *Пусть* $r(\varphi) \in C^{(1)}([0,\pi/4])$ — *неотрицательная функция, удовлетворяющая условию* $r'(\varphi) \leqslant r(\varphi)\operatorname{tg}\varphi$ *при* $\varphi \in [0,\pi/4]$. *Тогда для суммы*

$$W_1(q) = \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv-1) \int\limits_{I_q(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_1(q) = V_0 \log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

где

$$V_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Доказательство. Из условий $r(\varphi) \geqslant 0$ и $r'(\varphi) \leqslant r(\varphi)\operatorname{tg}\varphi$ вытекает, что функция

$$a(u,v) = \int\limits_{I_q(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

удовлетворяет условиям (4). Следовательно, по лемме 1

$$W_1(q) = \frac{\varphi(q)}{2q^2}\sum_{u,v=1}^{q} \int\limits_{I_q(u,v)} r^2(\varphi)d\varphi + O\left(\frac{\psi(q)\sqrt{q}}{q^2}\right).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении (с учётом того, что $r(\varphi) = O(1)$ и $r'(\varphi) = O(1)$) находим

$$\int\limits_{I_q(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{x}{q(q+vx)}\,\frac{1}{1+\frac{u^2}{q^2}}\left(r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right) + O\left(\frac{1}{q^2}\right)\right),$$

$$\frac{x}{q+vx} = \log(q+vx) - \log(q+(v-1)x) + O\left(\frac{1}{q^2}\right),$$

$$\frac{1}{q(1+\frac{u^2}{q^2})}r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right) = \int\limits_{u-1}^{u} r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{q}\right)\,d\operatorname{arctg}\frac{z}{q} + O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W_1(q) = \frac{\varphi(q)}{2q^2}\sum_{u=1}^{q}\int\limits_{u-1}^{u} r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{q}\right)\,d\operatorname{arctg}\frac{z}{q}\,\times \\ \times\sum_{v=1}^{q}[\log(q+vx) - \log(q+(v-1)x)] + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right) = \\ = V_0\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Из леммы 2 легко выводится следующее утверждение.

Следствие 1. *При $N \geqslant 1$ для суммы*

$$W_2 = \sum_{q\leqslant N} W_1(q)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_2 = V_0\frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(\log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + f(x) + O\left(\frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}}\right), \tag{5}$$

где $f(x)$ — функция, задаваемая рядом

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty}\left(W_1(q) - V_0\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2}\right). \tag{6}$$

Замечание. Аналогично для суммы

$$W_3(q) = \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{q}\delta_q(uv-1)\int\limits_{I'_q(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$I'_q(u,v) = \left[\operatorname{arctg}\frac{u}{q}, \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} + \frac{x}{q(q+vx)}\right)\right],$$

при $q \geqslant 2$ доказывается асимптотическая формула

$$W_3(q) = \frac{\pi}{4}\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

и соответственно для суммы

$$W_4 = \sum_{2\leqslant q\leqslant N} W_3(q)$$

при $N \geqslant 1$ получается представление

$$W_4 = V_0\frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(\log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + g(x) + O\left(\frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}}\right), \quad (7)$$

где

$$g(x) = \sum_{q=2}^{\infty}\left(W_3(q) - V_0\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2}\right). \quad (8)$$

Суммирование начинается с $q = 2$, так как при $q = 1$ получается четвёрка $Q' = Q = P' = 1$, $P = 2$, которая не удовлетворяет условиям (2).

Точно так же, как в [7], с помощью формул (5) и (7) доказывается асимптотическая формула для величины T_1.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant U \leqslant R$. Тогда для величины T_1, равной числу решений системы* (1), (2) *с дополнительным ограничением $Q' \leqslant U$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_1 = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)}R^2(\log(x+1)\log U + C_1(x)) + O(R^2U^{-1/2}\log^5 R) + O(RU\log R),$$

где

$$C_1(x) = \log(x+1)\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{\zeta(2)}{2V_0}(f(x)+g(x)), \quad (9)$$

а функции $f(x)$ и $g(x)$ определены равенствами (6) *и* (8).

5. Вычисление величины T_2

Лемма 3 ([7, лемма 7]). *Пусть $q \geqslant 1$ и $f(u)$ — неотрицательная невозрастающая функция на отрезке $[0; q]$, причём $f(0) \leqslant q$. Тогда*

$$\sum_{u=1}^{q}\sum_{1\leqslant v\leqslant f(u)}\delta_q(uv\pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2}V(\Omega) + O(q^{3/4}\sigma_0(q)\log(q+1)),$$

где Ω — область на плоскости Ouv, задаваемая условиями

$$0 \leqslant u \leqslant q, \quad 0 \leqslant v \leqslant f(u),$$

и $V(\Omega)$ — её площадь.

Далее будем рассматривать функцию $v(u)$, которая в области $1 \leqslant u \leqslant q-1$, $0 \leqslant v \leqslant q$ неявно задана уравнением

$$a^2+b^2 = R^2 r^2 \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right), \tag{10}$$

где

$$a = m\frac{uv\pm 1}{q} + nu, \quad b = mv+nq.$$

В следующем утверждении будем считать, что функция $v(u)$ определена хотя бы в одной точке.

Лемма 4. *Пусть $R \geqslant 1$ — действительное, m, n, q — натуральные числа и $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим также, что задана функция $r(\varphi) \in C^{(1)}([0,\pi/4])$, которая на всем отрезке $[0,\pi/4]$ удовлетворяет условиям*

$$r(\varphi) \geqslant \varepsilon_0 > 0, \quad r'(\varphi) \leqslant r(\varphi)\operatorname{arctg}\varphi.$$

Тогда при

$$q^2 > U_0 = \frac{13}{\varepsilon_0^2}\max_{\varphi\in[0,\pi/4]} r(\varphi)|r'(\varphi)| \tag{11}$$

функция $v(u)$ имеет областью определения отрезок $[q_0, q-1]$ $(1 \leqslant q_0 \leqslant q-1)$ и на этом отрезке является невозрастающей функцией.

Доказательство. Во-первых, заметим, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(a^2+b^2)}{\partial v} = 2a\frac{mu}{q} + 2bm \geqslant 2m,$$
$$\left|\frac{R^2\partial r^2(\operatorname{arctg} a/b)}{\partial v}\right| = \frac{2R^2 r|r'|m}{(a^2+b^2)q^2} \leqslant \frac{2R^2 r|r'|m}{n^2q^4},$$

где $r = r(\operatorname{arctg} a/b)$, $r' = r'(\operatorname{arctg} a/b)$.

Так как функция $v(u)$ должна быть определена хотя бы в одной точке, то параметр R удовлетворяет неравенству

$$\left(m\frac{q^2+1}{q} + nq\right)^2 + (mv+nq)^2 \geqslant R^2\varepsilon_0^2.$$

Отсюда $R^2 \leqslant 13n^2q^2/\varepsilon_0^2$, и при $q^2 > U_0$

$$\left|\frac{R^2\partial r^2(\operatorname{arctg} a/b)}{\partial v}\right| \leqslant \frac{2\cdot 13}{\varepsilon_0^2}\,\frac{r|r'|m}{q^2} < 2m \leqslant \frac{\partial(a^2+b^2)}{\partial v}.$$

Значит, при фиксированном u равенство (10) определяет не более одного значения v.

Дифференцируя $v(u)$ как неявную функцию, находим

$$\frac{dv}{du} = -\frac{b^2}{m}\,\frac{a/b - r'/r}{au+bq\pm mr'/r}.$$

По условию леммы $r'/r \leqslant a/b$, значит, числитель полученного выражения неотрицателен. Далее, так как $m/n \leqslant 1$ и $q^2 > r'/r$, то

$$au + bq \pm m\frac{r'}{r} \geqslant nq^2 \pm m\frac{r'}{r} = n\left(q^2 \pm \frac{m}{n}\,\frac{r'}{r}\right) > 0.$$

Следовательно, функция $v(u)$ не возрастает и определена на некотором отрезке $[u_0, q-1]$, где $1 \leqslant u_0 \leqslant q-1$.

Лемма 5. *Пусть функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям из леммы 4, U_0 определено формулой (11), $U_0^{1/2} \leqslant U < R$ и $R_1 = R/U$. Тогда для величины T_2, равной числу решений системы (1), (2) с дополнительным ограничением $Q' > U$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_2 = 2\sum_{n<R_1}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx}\ \sum_{U<q\leqslant R}\frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q) + O(R^2U^{-1/4}\log^2 R),$$

где $V(m,n,q)$ — площадь области $\Omega(m,n,q)$ на плоскости Ouv, задаваемой условиями

$$0 \leqslant u, v \leqslant q, \quad \left(\frac{u^2}{q^2}+1\right)(mv+nq)^2 \leqslant R^2r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right).$$

Доказательство. Согласно определению величины T_2

$$T_2 = \sum_{1\leqslant n<R_1}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx}\ \sum_{U<q\leqslant R/n}\ \sum_{u,v=1}^{q}\delta_q(uv\pm 1)\left[a^2+b^2 \leqslant R^2r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right],$$

где

$$a = m\frac{uv\pm 1}{q} + nu, \quad b = mv + nq.$$

Применяя леммы 4 и 3, находим

$$T_2 = \sum_{1\leqslant n<R_1}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx}\ \sum_{U<q\leqslant R/n}\left(\frac{\varphi(q)}{q^2}V_\pm(m,n,q) + O(q^{3/4}\sigma_0(q)\log q)\right),$$

где $V_\pm(m,n,q)$ — площадь области $\Omega_\pm(m,n,q)$ на плоскости Ouv, задаваемой условиями

$$0 \leqslant u, v \leqslant q, \tag{12}$$

$$\left(m\frac{uv\pm 1}{q} + nu\right)^2 + (mv+nq)^2 \leqslant R^2r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv+nq)}\right). \tag{13}$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$V_\pm(m,n,q) = V(m,n,q) + O(q). \tag{14}$$

Действительно, из этого равенства будет следовать асимптотическая формула

$$T_2 = 2\sum_{n<R_1}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx}\ \sum_{U<q\leqslant R/n}\frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q) + O(R^2U^{-1/4}\log^2 R),$$

которая равносильна утверждению леммы, поскольку условие $q \leqslant R/n$ можно заменить более простым $q < R$ (при $nq > R$ область $\Omega(m,n,q)$ пуста и $V(m,n,q) = 0$).

Для доказательства формулы (14) рассмотрим, на сколько могут отличаться отрезки изменения переменной v, задаваемые неравенствами (12), (13) при фиксированном u в пределах $1 \leqslant u \leqslant q-1$. Хотя бы один из этих отрезков не должен быть пустым, поэтому должно выполняться одно из неравенств

$$\left(m\frac{uv \pm 1}{q} + nu\right)^2 + (mv+nq)^2 > R^2 r^2 \left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv+nq)}\right),$$

а значит, $R \ll nq$. Пусть пара (u,v) лежит в области $\Omega(m,n,q)$, но не лежит в одной из областей $\Omega_\pm(m,n,q)$ (или наоборот). Так как

$$\sqrt{\left(m\frac{uv \pm 1}{q} + nu\right)^2 + (mv+nq)^2} = (mv+nq)\sqrt{\frac{u^2}{q^2}+1} + O\left(\frac{m}{q}\right)$$

и

$$r\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv+nq)}\right) = r\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right) + O\left(\frac{m}{nq^2}\right),$$

то

$$Rr\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right) - (mv+nq)\sqrt{\frac{u^2}{q^2}+1} \ll \frac{Rm}{nq^2} + \frac{m}{q} \ll \frac{m}{q}.$$

Поэтому при фиксированном значении u переменная v меняется внутри интервала длины $O(1/q)$.

Учитывая, что площади областей $\Omega(m,n,q)$ и $\Omega_\pm(m,n,q)$, попавшие внутрь полос $0 \leqslant u \leqslant 1$ и $q-1 \leqslant u \leqslant q$, отличаются не больше чем на q, приходим к равенству (14). Лемма 5 доказана.

Лемма 6 ([7, лемма 9]). *Пусть $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$. Тогда для суммы*

$$W_5 = \sum_{n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m \leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m,n,q)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_5 = \frac{U^2}{\zeta(2)} \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R_1(t)} \xi F^*(\xi)\, d\xi + O(R^2 U^{-1} \log R),$$

где $R_1(t) = R_1 r(\operatorname{arctg} t)/\sqrt{t^2+1}$ и

$$F^*(\xi) = \sum_{n<\xi} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right)[\xi \geqslant m+n] + \\ + \sum_{n<\xi} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\xi}\right)[\xi < m+n].$$

Следствие 2. *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$ *и*

$$R_1(t) = R_1 \frac{r(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Тогда для величины T_2 *справедлива асимптотическая формула*

$$T_2 = 2\frac{U^2}{\zeta(2)} \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R_1(t)} \xi F^*(\xi)\, d\xi + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R).$$

Доказательство вытекает из лемм 5 и 6.

Лемма 7 ([7, лемма 10]). *При* $N > 1$ *для суммы*

$$F^*(N) = \sum_{n<N} \sideset{}{^*}\sum_{m \leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) - \sum_{n<N} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{m \leqslant nx\\ m+n>N}} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m+n}\right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$F^*(N) = \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)} \log N + \frac{H(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(N+1)}{N}\right),$$

где

$$H(x) = \log(x+1)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2}\log(x+1) + \gamma - 1\right) + h(x)$$

и

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{m/x \leqslant n < m/x+m} \frac{1}{n} - \log(x+1)\right). \tag{15}$$

Непосредственным вычислением проверяется следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть* $R_1 > 0$ *и при* $t \in [0,1]$

$$R_1(t) = R_1 \frac{r(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R_1(t)} \xi\, d\xi = V_0 R_1^2,$$

$$\int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R_1(t)} \xi \log \xi\, d\xi = V_0 R_1^2 \left(\log R_1 - \frac{1}{2}\right) + V_1 R_1^2,$$

где

$$V_1 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi) \log(r(\varphi)\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$. *Тогда для величины* T_2, *равной числу решений системы* (1) *с дополнительным ограничением* $Q' > U$, *справедлива асимптотическая формула*

$$T_2 = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2(\log(x+1)\log R_1 + C_2(x)) + O(R^2 U^{-1/4}\log^2 R) + O(RU\log^2 R),$$

где

$$C_2(x) = \log(x+1)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{V_1}{V_0}\right) + h(x), \qquad (16)$$

а функция $h(x)$ *определена равенством* (15).

Доказательство получается подстановкой результатов лемм 7 и 8 в следствие 2.

6. Основной результат

Теорема 3. *Пусть* $R \geqslant 2$. *Тогда для величины* $N_x(R)$ *справедлива асимптотическая формула*

$$N_x(R) = \frac{2V_0}{\zeta(2)} R^2(\log(x+1)\log R + C(x)) + O(R^{2-1/5}\log^3 R),$$

где

$$C(x) = \log(x+1)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2\gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{V_1}{V_0}\right) + \\ + h(x) + \frac{\zeta(2)}{2V_0}(f(x) + g(x) + V_0(x)[x<1]),$$

а функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены равенствами* (6) *и* (8).

Доказательство. Из теорем 1 и 2 вытекает равенство

$$T_x^*(R) = T_1 + T_2 = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2(\log(x+1)\log R + C_1(x) + C_2(x)) + \\ + O(R^2U^{-1/2}\log^5 R) + O(R^2U^{-1/4}\log^2 R) + O(RU\log^2 R).$$

Выбирая $U = R^{4/5}$ и подставляя результат в формулу (3), получаем

$$N_x^*(R) = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2(\log(x+1)\log R + C_3(x)) + O(R^{9/5}\log^2 R),$$

где

$$C_3(x) = C_1(x) + C_2(x) + \frac{\zeta(2)}{2}\,\frac{V_0(x)}{V_0}[x<1].$$

Наконец, применяя равенство

$$N_x(R) = \sum_{d \leqslant R} N_x^* \left(\frac{R}{d} \right),$$

приходим к утверждению теоремы.

Литература

[1] Авдеева М. О. О статистиках неполных частных конечных цепных дробей // Функцион. анализ и его прил. — 2004. — Т. 38, № 2. — С. 1—11.

[2] Авдеева М. О., Быковский В. А. Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса—Кузьмина. — Препринт. — Владивосток: Дальнаука, 2002.

[3] Бабенко К. И. Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 5. — С. 1021—1024.

[4] Задачи Арнольда. — М.: Фазис, 2000.

[5] Кнут Д. Э. Искусство программирования. — М.; Санкт-Петербург; Киев: Вильямс, 2000. — Т. 2: Получисленные алгоритмы.

[6] Тонков Т. О средней длине конечных цепных дробей // Math. Balkanica. — 1974. — Т. 4. — С. 617—629.

[7] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей // Труды по теории чисел. — СПб., 2005. — С. 186—211. — (Зап. научн. семин. ПОМИ; т. 322).

[8] Baladi V., Valle B. Euclidean algorithms are Gaussian // J. Number Theory. — 2005. — Vol. 110, no. 2. — P. 331—386.

[9] Dixon J. D. The number of steps in the Euclidean algorithm // J. Number Theory. — 1970. — Vol. 2. — P. 414—422.

[10] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions // Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. — Berlin: VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften; New York: Plenum Press, 1968. — P. 89—96.

[11] Hensley D. The number of steps in the Euclidean algorithm // J. Number Theory. — 1994. — Vol. 49, no. 2. — P. 142—182.

[12] Knuth D. E. Evaluation of Porter's Constant // Comput. Math. Appl. — 1976. — Vol. 2. — P. 137—139.

[13] Kuz'min R. O. Sur un problème de Gauss // Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. — Bologna, 1928. — P. 83—89.

[14] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn // Mathematika. — 1975. — Vol. 22, no. 1. — P. 20—28.

[15] Tonkov T. On the average length of finite continued fractions // Acta Arith. — 1974. — Vol. 26. — P. 47—57.

[16] Vallée B. Dynamics of the binary Euclidean algorithm: Functional analysis and operators // Algorithmica. — 1998. — Vol. 22. — P. 660—685.

[17] Vallée B. A unifying framework for the analysis of a class of Euclidean algorithms // Proceedings of LATIN'2000. — Springer. — P. 343–354. — (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 1776).