

О мере алгебраической независимости значений эллиптических функций Якоби

Я. М. ХОЛЯВКА

Львовский национальный университет
им. И. Франко, Украина
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua

УДК 511.3

Ключевые слова: мера алгебраической независимости, эллиптическая функция Якоби.

Аннотация

В статье доказывается оценка меры алгебраической независимости значений в различных алгебраических точках эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn}(z)$.

Abstract

Ya. M. Kholiyavka, *On a measure of algebraic independence of values of Jacobi elliptic functions*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 209–219.

In the paper, an estimate for the measure of algebraic independence is proved for values of the Jacobi elliptic function $\operatorname{sn}(z)$ at different algebraic points.

1. Введение

Пусть $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами g_2, g_3 и с комплексным умножением над полем $\mathbb{Q}(\tau)$, $\operatorname{sn}(z)$ — эллиптическая функция Якоби, κ — эллиптический модуль $\operatorname{sn}(z)$, κ — алгебраическое число, $\kappa \neq 0, 1$. В [21, 24] доказан эллиптический аналог теоремы Линдемана.

Теорема 1. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — алгебраические числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}(\tau)$, то числа

$$\wp(\alpha_1), \dots, \wp(\alpha_k)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Из соотношений между $\wp(z)$ и $\operatorname{sn}(z)$ и доказательства теоремы 1 в [9] следует аналог теоремы Линдемана для $\operatorname{sn}(z)$.

Теорема 2. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$, то среди чисел

$$\operatorname{sn}(\alpha_1), \dots, \operatorname{sn}(\alpha_n)$$

имеется не менее $[n/2]$ алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 209–219.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Оценка меры алгебраической независимости значений в алгебраических точках эллиптической функции Вейерштрасса анонсирована в [7, 14, 25], а также следует из опубликованных в [17] результатов. Оценка, доказанная в [9, 20], является лучшей из известных. В нашей работе получена соответствующая оценке в [9] оценка меры алгебраической независимости значений в алгебраических точках эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn}(z)$.

Теорема 3. Пусть $\operatorname{sn}(z)$ — эллиптическая функция Якоби, $\varkappa$ — алгебраическое число ($\varkappa \neq 0, 1$), $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$, $\beta_1, \dots, \beta_k$, $k = [n/2]$, — такие числа, что $\operatorname{sn}(\alpha_1), \dots, \operatorname{sn}(\alpha_n)$ алгебраичны над $\mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_k)$. Тогда для любого полинома $A \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$, $A \neq 0$, степень которого не превышает D и коэффициенты которого по абсолютной величине не больше H , справедливо неравенство

$$|A(\beta_1, \dots, \beta_k)| \geq H^{-c_1 D^k}, \quad (1)$$

где H и D — такие положительные числа, что

$$\ln \ln H \geq c_2 D^k \ln(D+1), \quad D \geq 1,$$

c_1, c_2 — положительные константы, зависящие только от $\varkappa$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Отметим, что подобные оценки могут быть получены и для других эллиптических функций Якоби.

Необходимые для доказательства теоремы 3 утверждения содержатся в разделе 2. В разделе 3 доказана теорема 4, из которой следует доказательство оценки (1).

2. Вспомогательные утверждения

Доказательство теоремы 3 проводится методом Нестеренко, изложенном в [3–6, 8, 10]. Этот метод обобщает на основе алгебраической техники метод Гельфонда доказательства алгебраической независимости.

Напомним, что идеал I кольца многочленов называется несмешанным, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность, равную размерности идеала I . Под размерностью $\dim I$ однородного идеала I мы понимаем его проективную размерность (см., например, [2]). Обозначим через $\deg I$ и $h(I)$ степень и логарифмическую высоту идеала I .

Для $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^m$ положим $|\bar{\gamma}| = \max_{1 \leq j \leq m} |\gamma_j|$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\varkappa, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathbb{K}[\bar{x}]$ — кольцо многочленов от переменных $x_0, \dots, x_m$ над $\mathbb{K}$. Обозначим для каждого однородного несмешанного идеала I , $I \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$, и ненулевой точки $\bar{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ через $|I(\bar{\gamma})|$ величину, аналогичную по своей роли $|P(\bar{\gamma})|$.

Лемма 1. Пусть I — несмешанный однородный идеал кольца $\mathbb{K}[\bar{x}]$, $\dim I \geq 0$, $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ — несократимое примарное разложение, $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j — показатель примарного идеала I_j . Пусть $\bar{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\bar{\gamma} \neq 0$. Тогда

- 1) $\sum_{j=1}^s k_j \deg \mathfrak{p}_j = \deg I$;
- 2) $\sum_{j=1}^s k_j h(\mathfrak{p}_j) \leq h(I) + m^2 \deg I$;
- 3) $\sum_{j=1}^s k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\gamma})| \leq \ln |I(\bar{\gamma})| + m^3 \deg I$.

Доказательство леммы 1 приведено в [10, предложение 1.2].

Обозначим $\deg P$ степень многочлена P , $|P| = \max |a_i|$, где a_i — коэффициенты многочлена P , $h(P)$ — логарифмическая высота многочлена P ,

$$\|P\|_{\bar{\gamma}} = |P(\bar{\gamma})| \cdot |P|^{-1} \cdot |\bar{\gamma}|^{-\deg P}$$

(см., например, [10]).

Для любых двух ненулевых точек $\bar{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ и $\bar{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ через

$$\|\bar{\gamma} - \bar{\vartheta}\| = \left(\max_{0 \leq i < j \leq m} |\bar{\gamma}_i \bar{\vartheta}_j - \bar{\gamma}_j \bar{\vartheta}_i| \right) |\bar{\gamma}|^{-1} |\bar{\vartheta}|^{-1}$$

обозначим расстояние между точками $\bar{\gamma}$ и $\bar{\vartheta}$.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал кольца $\mathbb{K}[\bar{x}]$, $\dim \mathfrak{p} \geq 0$, Q — однородный многочлен из $\mathbb{K}[\bar{x}]$, $Q \notin \mathfrak{p}$. Если $r = 1 + \dim \mathfrak{p} \geq 2$, то существует такой однородный несмешанный идеал $J \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$, что его нули совпадают с нулями идеала $(\mathfrak{p}, Q)$, $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1$,

- 1) $\deg J \leq \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q$;
- 2) $h(J) \leq h(\mathfrak{p}) \deg Q + h(Q) \deg \mathfrak{p} + m(r+1) \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q$;
- 3) для любой точки $\bar{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ и $\rho = \min \|\bar{\gamma} - \bar{\vartheta}\|$, где минимум берётся по всем нетривиальным нулям $\bar{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ идеала $\mathfrak{p}$, справедливо неравенство

$$\ln |J(\bar{\gamma})| \leq \ln \delta + h(Q) \deg \mathfrak{p} + h(\mathfrak{p}) \deg Q + 11m^2 \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q, \quad (2)$$

где

$$\delta = \begin{cases} \|Q\|_{\bar{\gamma}}, & \text{если } \rho < \|Q\|_{\bar{\gamma}}, \\ |\mathfrak{p}(\bar{\gamma})|, & \text{если } \rho \geq \|Q\|_{\bar{\gamma}}. \end{cases}$$

Неравенство (2) справедливо и при $r = 1$, если в этом случае формально считать $|J(\bar{\gamma})| = 1$.

Доказательство леммы 2 приведено в [10, предложение 1.4].

Связь между величиной $|I(\bar{\gamma})|$ и расстоянием от точки $\bar{\gamma}$ до многообразия нулей однородного несмешанного идеала I указана в следующем утверждении.

Лемма 3. Пусть $I \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$ — однородный несмешанный идеал, $r = 1 + \dim I$, $r \geq 1$. Для каждой ненулевой точки $\bar{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ существует нуль $\bar{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ идеала I , такой что

$$\deg I \cdot \ln \|\bar{\gamma} - \bar{\vartheta}\| \leq \frac{1}{r} (\ln |I(\bar{\gamma})| + h(I)) + 4m^3 \deg I.$$

Доказательство леммы 3 приведено в [10, предложение 1.5].

Лемма 4. Если Q — однородный многочлен кольца $\mathbb{K}[\bar{x}]$ и $\bar{\gamma}, \bar{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ — ненулевые точки, причём $Q(\bar{\vartheta}) = 0$, то справедливо неравенство

$$\|Q\|_{\bar{\gamma}} \leq \|\bar{\gamma} - \bar{\vartheta}\| \cdot e^{(2m-1) \deg Q}.$$

Доказательство леммы 4 приведено в [10, следствие 1 из леммы 1.11].

Определения понятий, введённых выше, а также полные формулировки и доказательства необходимых свойств идеалов имеются в [10]. Определение основных понятий, связанных с мерой алгебраической независимости, а также многие вспомогательные утверждения имеются, например, в [12, 15, 16].

В дальнейшем будем придерживаться стандартных обозначений в теории функций Вейерштрасса и Якоби (см., например, [1, 11]). Напомним некоторые свойства эллиптических функций Якоби.

Пусть $\operatorname{sn}(z)$ — эллиптическая функция Якоби, её эллиптический модуль $\varkappa$ — алгебраическое число, $\varkappa \neq 0, 1$. Обозначим через $4K$ и $2iK'$ её основные периоды, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$. Положим

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_{2j-1} = \operatorname{sn}(\alpha_j), \quad \omega_{2j} = \operatorname{sn}'(\alpha_j), \quad 1 \leq j \leq n, \quad m = 2n.$$

Лемма 5. Для любого вектора $\bar{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{l} \neq 0$, существуют однородные многочлены $S_{\bar{l}}, T_{\bar{l}}, U_{\bar{l}} \in \mathbb{Z}[\varkappa^2][\bar{x}]$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) их степень по совокупности переменных не выше $c_3(l_1^2 + \dots + l_n^2)$;
- 2) их коэффициенты не превосходят $\exp(c_3(l_1^2 + \dots + l_n^2))$ по абсолютной величине

и

$$\operatorname{sn}(l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n) = \frac{T_{\bar{l}}(\bar{\omega})}{U_{\bar{l}}(\bar{\omega})}, \quad \operatorname{sn}'(l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n) = \frac{S_{\bar{l}}(\bar{\omega})}{U_{\bar{l}}(\bar{\omega})}.$$

Кроме того, выполняется неравенство

$$|U_{\bar{l}}(\bar{\omega})| \geq \exp(-c_3(l_1^2 + \dots + l_n^2)).$$

Доказательство леммы 5 подобно доказательству леммы 7.2 в [13] и леммы 1 в [19].

Пусть Λ — двумерная решётка в $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}$. Число α назовём $\mathfrak{M}$ -допустимым относительно Λ , если α конгруэнтно по модулю Λ некоторой точке множества $\mathfrak{M}$.

Лемма 6. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — комплексные числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$ по модулю решётки Λ . В комплексной плоскости существует компактное множество $\mathfrak{M}$, не содержащее точек Λ , со свойством, что для любого действительного числа L_1 , $L_1 \geq L_0$, среди точек $l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n$, $0 \leq l_j < L_1$, $l_j \in \mathbb{Z}$, имеется не менее чем $\frac{7}{8}L_1^n$ точек, являющихся $\mathfrak{M}$ -допустимыми. Здесь множество $\mathfrak{M}$ и граница L_0 зависят только от Λ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Доказательство леммы 6 приведено в [22, лемма 5].

Лемму 6 будем применять, предполагая, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ удовлетворяют условиям теоремы 3 и Λ — решётка полупериодов $\operatorname{sn}(z)$, а в дальнейшем множество $\mathfrak{M}$ определено именно для этих чисел и решётки.

Лемма 7. *Функции*

$$\sigma\left(\frac{z + iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right), \quad \sigma\left(\frac{z + iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) \operatorname{sn}(z)$$

целые, и для $M_0 > 1$

$$\left| \sigma\left(\frac{z + iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) \operatorname{sn}(z) \right|_{|z| \leq M_0} \leq c_4^{M_0^2}, \quad \left| \sigma\left(\frac{z + iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) \right|_{|z| \leq M_0} \leq c_4^{M_0^2}.$$

Если δ — расстояние от z_0 до ближайшего полюса $\operatorname{sn}(z)$ и $|z_0| \leq M_0$, то

$$\left| \sigma\left(\frac{z + iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) \right| \geq \delta c_5^{-M_0^2},$$

где c_4, c_5 — постоянные, зависящие только от $\operatorname{sn}(z)$.

Доказательство леммы 7 подобно доказательству леммы 7.1 в [18].

Лемма 8. Пусть $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ аналитична в круге $|z| \leq R_2$, E — множество из N^2 точек, которые принадлежат кругу $|z| \leq R_1$ и расстояние между которыми для каждой пары точек не меньше ε , $0 < \varepsilon < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(z)|_{|z| \leq R_1} &\leq \\ &\leq 2|f(z)|_{|z| \leq R_2} \left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{N^2 S} + 2NR_1^{-1} \left(\frac{33R_1}{\varepsilon N}\right)^{N^2 S} \max_{x \in E, 0 \leq s \leq S} \left| \frac{f^{(s)}(x)}{s!} \right|. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 8 приведено в [23].

3. Доказательство теоремы 3

В этой части теорема 3 будет выведена из следующего утверждения.

Теорема 4. Для каждого целого числа r , $1 \leq r \leq n/2$, существуют постоянные $\mu_r \geq 0$, $\gamma_r \geq 1$, такие что для любых чисел D и H , удовлетворяющих неравенствам

$$\ln \ln H \geq \gamma_r D^{n/2} \ln(D + 1), \quad D \geq 1,$$

и для любого однородного несмешанного идеала $I \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$ с условиями $\dim I = r - 1$, $\deg I \leq D^{1-r+n/2}$, $h(I) \leq D^{-r+n/2} \ln H$ выполняется неравенство

$$\ln |I(\bar{\omega})| \geq -\mu_r(Dh(I) + \deg I \ln H) D^{r-1}.$$

Покажем, как из теоремы 4 следует теорема 3.

Для любого $B \in \mathbb{Z}[x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}]$, $B(\operatorname{sn}(\alpha_1), \dots, \operatorname{sn}(\alpha_n)) \neq 0$, обозначим

$$C(x_0, x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}) = x_0^{\deg B} B\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}, \dots, \frac{x_{2n-1}}{x_0}\right).$$

Тогда

$$C(1, \operatorname{sn}(\alpha_1), \dots, \operatorname{sn}(\alpha_n)) = B(\operatorname{sn}(\alpha_1), \dots, \operatorname{sn}(\alpha_n)). \quad (3)$$

Пусть $\text{sn } \alpha_1, \dots, \text{sn } \alpha_k$ алгебраически независимы. Тогда существуют многочлены R_{k+i}, Q_j кольца $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$, $i = 1, \dots, n-k$, $j = 1, \dots, n$, такие что $R_{k+i}(\text{sn } \alpha_1, \dots, \text{sn } \alpha_k, \text{sn } \alpha_{k+i}) = 0$ и $Q_j(\text{sn } \alpha_j, \text{sn}' \alpha_j) = 0$. Идеал $\mathfrak{J}$, порождённый однородными многочленами, соответствующими R_{k+i} и Q_j , имеет размерность k . Обозначим через $\mathfrak{p}$ однородный простой идеал, порождённый всеми однородными многочленами кольца $\mathbb{K}[\bar{x}]$, обращающимися в нуль в точке $\bar{\omega}$. Тогда $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$ и из условия теоремы 4 следует, что $\dim \mathfrak{p} = k$.

Обозначим через J однородный несмешанный идеал в кольце $\mathbb{K}[\bar{x}]$, построенный для $\mathfrak{p}$ и C в соответствии с леммой 2. Тогда $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1 = k - 1$, $\deg J \leq c_6 \deg C$, $h(J) \leq c_7(h(C) + \deg C)$. Кроме того,

$$\ln |J(\bar{\omega})| \leq \ln \|C\|_{\bar{\omega}} + c_8(h(C) + \deg C). \quad (4)$$

Применяя к идеалу J теорему 4 при $r = k$ и учитывая (3), из (4) получим неравенство

$$\ln |B(\text{sn}(\alpha_1), \dots, \text{sn}(\alpha_n))| \geq -c_9(Dh(J) + \deg J \ln H)D^{k-1}. \quad (5)$$

Из условия теоремы 3 следует, что числа $\beta_1, \dots, \beta_k$ алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(\text{sn}(\alpha_1), \dots, \text{sn}(\alpha_n))$. Тогда для некоторого целого алгебраического над кольцом $\mathbb{Q}[\text{sn}(\alpha_1), \dots, \text{sn}(\alpha_n)]$ числа d все числа $d\beta_i$ целые алгебраические над $\mathbb{Q}[\text{sn}(\alpha_1), \dots, \text{sn}(\alpha_n)]$. Положим

$$B(\text{sn}(\alpha_1), \dots, \text{sn}(\alpha_n)) = \text{Norm}(d^{\deg A} A(\beta_1, \dots, \beta_k)). \quad (6)$$

Так как $\deg B \leq c_{10} \deg A$, $\ln H(B) \leq c_{11} \ln H(A)$, то, учитывая (5) и (6), получаем оценку теоремы 3.

Будем доказывать теорему 4 индукцией по r . Пусть r — наименьшее целое число, $1 \leq r \leq n/2$, для которого утверждение теоремы 4 неверно. Выберем достаточно большое целое число λ .

Лемма 9. Множество чисел D , для которых существует простой однородный идеал $\mathfrak{p}$ кольца $\mathbb{K}[\bar{x}]$ с условиями

$$\begin{aligned} \ln \ln H &\geq \gamma_r D^{n/2} \ln(D+1), \quad D \geq 1, \\ \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} &= (0), \quad \dim \mathfrak{p} = r-1, \\ \deg \mathfrak{p} &\leq D^{1-r+n/2}, \quad h(\mathfrak{p}) \leq 2D^{-r+n/2} \ln H, \\ \ln |\mathfrak{p}(\bar{\omega})| &< -\lambda^{2n^2+4n+4} (Dh(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1} \end{aligned}$$

неограниченно.

Действительно, в противном случае с некоторой положительной постоянной c_{12} для всех однородных простых идеалов $\mathfrak{p} \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$, $\dim \mathfrak{p} = r-1$, выполнялось бы неравенство

$$\ln |\mathfrak{p}(\bar{\omega})| \geq -c_{12}(Dh(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}. \quad (7)$$

Применяя теперь лемму 1 к произвольному однородному несмешанному идеалу $I \subset \mathbb{K}[\bar{x}]$ размерности $r-1$ и учитывая (7), получим

$$\ln |I(\bar{\omega})| \geq -c_{13}(Dh(I) + \deg I \ln H) D^{r-1}.$$

Но это противоречит предположению о том, что для идеалов размерности $r - 1$ утверждение теоремы 4 не имеет места, что доказывает лемму 9.

Пусть теперь H достаточно велико, а число D и простой однородный идеал $\mathfrak{p}$ размерности $r - 1$ удовлетворяют условиям леммы 9. Определим число M равенством

$$\lambda D^{n/2} M \ln M = \min \left(\lambda^{2n^2+4n+4} (Dh(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}, \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\rho} \right) \right), \quad (8)$$

где ρ определено в лемме 2. Используя лемму 3 и (8), имеем

$$M \ln M \geq \ln H (\ln \ln H)^{-1}. \quad (9)$$

Из леммы 4 и (8) получим следующую оценку.

Лемма 10. Пусть однородный многочлен $P \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ содержится в идеале $\mathfrak{p}$ и удовлетворяет неравенству

$$h(P) + (2m + 1) \deg P \leq \lambda D^{n/2} M \ln M.$$

Тогда

$$|P(\bar{\omega})| |\bar{\omega}|^{-\deg P} \leq \exp(-\lambda D^{n/2} M \ln M).$$

Из леммы 5, леммы 10 и (9) получим следующее утверждение.

Лемма 11. Если $\bar{l} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $|l_j| \leq \lambda^{2n+1} D^{1/2}$, то $U_{\bar{l}}(\bar{x}) \notin \mathfrak{p}$.

Используя лемму 2, лемму 9, (8), (9) и индуктивное предположение, получим следующую оценку снизу.

Лемма 12. Пусть однородный многочлен $P \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ не содержится в идеале $\mathfrak{p}$ и удовлетворяет неравенствам

$$\deg P \leq \lambda^{4n+5} D, \quad h(P) \leq \lambda^{4n+5} \ln H.$$

Тогда

$$|P(\bar{\omega})| |\bar{\omega}|^{-\deg P} \geq \exp \left(-\frac{1}{4} \lambda D^{n/2} M \ln M \right).$$

Применив лемму 12 к каждому базисному идеалу, получим следующее утверждение.

Лемма 13. Если $\mathfrak{J}$ — идеал $\mathbb{K}[\bar{x}]$, порождённый всеми однородными многочленами $P \in \mathbb{K}[\bar{x}]$, такими что $P(\bar{\omega}) = 0$, то $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$.

Положим теперь

$$L = [\lambda^{2n} D^{1/2}], \quad K_0 = [D^{n/2} M], \quad K_1 = \lambda^2, \quad S = [\lambda^{1-2n^2} M]. \quad (10)$$

Лемма 14. Существуют однородные многочлены $A_{\bar{k}} \in \mathbb{K}[\bar{x}]$, $\bar{k} = (k_0, k_1)$, $0 \leq k_0 < K_0$, $0 \leq k_1 < K_1$, с условиями

- 1) $\deg A_{\bar{k}} \leq \lambda^{4n+4} D$, $\ln H(A_{\bar{k}}) \leq 4\lambda^{1-2n^2} M \ln M$;
- 2) по крайней мере один из этих многочленов не лежит в $\mathfrak{p}$;

3) если

$$F(z) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\bar{k}}(\bar{\omega}) z^{k_0} \operatorname{sn}^{k_1}(z),$$

то для всех целых чисел s , $0 \leq s \leq S$, и всех $\mathfrak{M}$ -допустимых точек $l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq l_j < L$, выполняются неравенства

$$|F^{(s)}(l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n)| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda D^{n/2} M \ln M\right). \quad (11)$$

Доказательство леммы 14 подобно доказательству леммы 10 в [9]. В обозначениях [9] получим

$$F^{(s)}(z) = \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \left(\frac{d}{dw}\right)^{s-t} \left[\prod_2^{-K_1} (\operatorname{sn}(z), \varphi(w)) \right]_{w=0} \times \\ \times \left\{ \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\bar{k}}(\bar{\omega}) \sum_{i=0}^t \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} z^{k_0-i} G_{t-i, k_1, K_1-k_1}(\operatorname{sn}(z), \operatorname{sn}'(z)) \right] \right\}.$$

Для всех целых $s, l_1, \dots, l_n$, $0 \leq s < S$, $0 \leq l_j < L$, определим

$$R_{s, \bar{l}}(\tilde{x}) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} B_{\bar{k}}(\tilde{x}) \sum_{i=0}^t \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} (l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n)^{k_0-i} U_{\bar{l}}^{10K_1}(1, \tilde{x}) \times \right. \\ \left. \times G_{t-i, k_1, K_1-k_1} \left(\frac{T_{\bar{l}}(1, \tilde{x})}{U_{\bar{l}}(1, \tilde{x})}, \frac{S_{\bar{l}}(1, \tilde{x})}{U_{\bar{l}}(1, \tilde{x})} \right) \right],$$

где $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$, многочлены $G_{t, k, l}(x, y)$ определены для $\operatorname{sn}(z)$ таким же образом, как и в [9].

Применяя к системе

$$R_{s, \bar{l}}(\tilde{x}) = 0, \quad 0 \leq s < S, \quad 0 \leq l_j < L, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

лемму Зигеля о решениях системы линейных уравнений с алгебраическими коэффициентами (см., например, [12]), получим, что существуют не все равные нулю многочлены $B_{\bar{k}}(\tilde{x}) \in \mathbb{K}[\tilde{x}]$, такие что $\deg B_{\bar{k}} \leq \lambda^{4n+4} D$, $\ln H(B_{\bar{k}}) \leq 3\lambda^{1-2n^2} M \ln M$. Как и в [9], пусть ${}^a\mathfrak{p}$ — дегомогенизация идеала $\mathfrak{p}$. Обозначим буквой u наименьшее целое число, такое что

1) существует вектор

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{Z}^m, \quad u_i \geq 0, \quad u_1 + \dots + u_m = u;$$

2) существуют индексы k_0^*, k_1^* , такие что $\delta_{\bar{u}} B_{k_0^*, k_1^*} \notin {}^a\mathfrak{p}$, где

$$\delta_{\bar{u}} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{u_i!} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{u_i}.$$

Тогда из (12) следует, что $\partial_{\bar{u}} R_{s, \bar{l}}(\tilde{x}) \in {}^a\mathfrak{p}$.

Пусть $A_{\bar{k}}(\bar{x})$ — гомогенизация $\partial_{\bar{u}} B_{k_0, k_1}(\tilde{x})$. Положим

$$Q_{s, \bar{l}}(\bar{x}) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\bar{k}}(\bar{x}) \sum_{i=0}^t \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} (l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n)^{k_0-i} U_{\bar{l}}^{10K_1}(\bar{x}) \times \right. \\ \left. \times G_{t-i, k_1, K_1-k_1} \left(\frac{T_{\bar{l}}(\bar{x})}{U_{\bar{l}}(\bar{x})}, \frac{S_{\bar{l}}(\bar{x})}{U_{\bar{l}}(\bar{x})} \right) \right].$$

Так как $\partial_{\bar{u}} R_{s, \bar{l}}(\tilde{x}) \in {}^a \mathfrak{p}$, то $Q_{s, \bar{l}}(\bar{x}) \in \mathfrak{p}$ и, используя лемму 10, получим оценку

$$|Q_{s, \bar{l}}(\bar{\omega})| < \exp \left(-\frac{2}{3} \lambda D^{n/2} M \ln M \right).$$

Из этой оценки аналогично [9] следует оценка леммы 14.

Обозначим

$$G(z) = \sigma \left(\frac{z + iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}} \right) F(z).$$

Из свойств $\operatorname{sn}(z)$, используя лемму 7, лемму 8, (10) и (11), получим следующее утверждение.

Лемма 15. В круге $|z| \leq \lambda^{2n+2} D^{1/2}$ справедливо неравенство

$$|G(z)| \leq \exp \left(-\frac{3}{8} \lambda D^{n/2} M \ln M \right).$$

Используя леммы 5, 6, 7, 9, 12, 13, 15, получим следующее утверждение.

Лемма 16. Для всех чисел $s, l_1, \dots, l_n$, таких что $0 \leq s \leq S, 0 \leq l_j \leq \lambda^{2n+1} D^{1/2}$ и точка $l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n \notin \mathfrak{M}$ -допустима,

$$|F^{(s)}(l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n)| \leq \exp \left(-\frac{1}{3} \lambda D^{n/2} M \ln M \right).$$

Введём следующие обозначения: $\mathcal{R}$ — фактор-кольцо $\mathbb{K}[\tilde{x}]/{}^a \mathfrak{p}$, η_i — образы x_i , $1 \leq i \leq m$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, $\mathcal{L}$ — поле частных $\mathcal{R}$. Согласно лемме 11 $U_{\bar{l}}(\bar{\eta}) \notin \mathfrak{p}$. Определим $\bar{\xi}_{\bar{l}} = (\bar{\xi}_{\bar{l},1}, \bar{\xi}_{\bar{l},2}, \bar{\xi}_{\bar{l},3})$ следующим образом:

$$\bar{\xi}_{\bar{l}} = \left(l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n, \frac{T_{\bar{l}}(\bar{\eta})}{U_{\bar{l}}(\bar{\eta})}, \frac{S_{\bar{l}}(\bar{\eta})}{U_{\bar{l}}(\bar{\eta})} \right), \quad \bar{\xi}_{\bar{l}} \in \mathcal{L}^3.$$

Так как точка $(\operatorname{sn}(l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n), \operatorname{sn}'(l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n)), \bar{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{l} \neq 0$, лежит на кривой $y^2 = (1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)$, то справедливо равенство

$$U_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) S_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) = (U_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) - T_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}))(U_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) - \kappa^2 T_{\bar{l}}^2(\bar{\omega})).$$

Отсюда и из леммы 13 следует, что две последние координаты точки $\bar{\xi}_{\bar{l}}$ удовлетворяют уравнению $\bar{\xi}_{\bar{l},3}^2 = (1 - \bar{\xi}_{\bar{l},2}^2)(1 - \kappa^2 \bar{\xi}_{\bar{l},2}^2)$.

Лемма 17. Пусть $\bar{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3})$, $1 \leq i \leq N_2$, — точки с различными первыми координатами, $R \in \mathcal{L}[z, x]$, $\deg_z R \leq L_2$, $\deg_x R \leq L_3$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N_2} \operatorname{ord}_{\bar{\xi}_i} R \leq (4L_3 + 2)L_2 + 2N_2 L_3.$$

Доказательство леммы 17 подобно доказательству леммы 16 в [9].

Пусть

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial x} + (2\kappa^2 x^3 - (1 + \kappa^2)x) \frac{\partial}{\partial y} -$$

дифференциальный оператор в кольце $\mathcal{L}[z, x, y]$. Используя леммы 5 и 16, получим следующее утверждение.

Лемма 18. Для каждого набора целых $s, l_1, \dots, l_n$, $0 \leq s \leq S$, $0 \leq l_j \leq \lambda^{2n+1} D^{1/2}$, такого что точка $l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n$ $\mathfrak{M}$ -допустима, выполняются равенства $\mathcal{D}^s F(z)|_{l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n} = 0$.

Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно привести в противоречие оценки в леммах 17 и 18. Для многочлена F , построенного в лемме 14, согласно лемме 18 имеем

$$\sum \text{ord}_{\xi_i} F \geq \frac{1}{2} \lambda^{n+1} D^{n/2} M.$$

Согласно лемме 17 эта сумма не превосходит величины $6\lambda^2 D^{n/2} M$. Полученное при $n > 1$ противоречие доказывает теорему 4.

Литература

- [1] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968.
- [2] Зариский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1, 2. — М.: Изд. иностр. лит., 1963.
- [3] Нестеренко Ю. В. Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Изв. АН СССР. — Сер. мат. — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 253—284.
- [4] Нестеренко Ю. В. Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел // Мат. сб. — 1984. — Т. 123 (165), № 4. — С. 435—459.
- [5] Нестеренко Ю. В. Оценки характеристической функции простого идеала // Мат. сб. — 1984. — Т. 123 (165), № 1. — С. 11—34.
- [6] Нестеренко Ю. В. О мере алгебраической независимости значений некоторых функций // Мат. сб. — 1985. — Т. 128 (170), № 4. — С. 545—568.
- [7] Нестеренко Ю. В. О мере алгебраической независимости значений эллиптических функций в алгебраических точках // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 4. — С. 221—222.
- [8] Нестеренко Ю. В. О степени трансцендентности некоторых полей, порождённых значениями экспоненциальной функции // Мат. заметки. — 1989. — Т. 46, № 3. — С. 40—49.
- [9] Нестеренко Ю. В. О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции // Изв. РАН. Сер. мат. — 1995. — Т. 59, № 4. — С. 155—178.
- [10] Нестеренко Ю. В. О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1997. — Т. 218. — С. 299—334.
- [11] Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1963.

- [12] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.
- [13] Chudnovsky G. V. Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann—Weierschtrass theorem // *Invent. Math.* — 1980. — Vol. 61. — P. 267—290.
- [14] Chudnovsky G. V., Contributions to the Theory of Transcendental Numbers. — AMS Math. Surveys Monographs. No. 19. — Providence: AMS, 1984.
- [15] Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V. Transcendental Numbers. — Springer, 1998.
- [16] Introduction to Algebraic Independence Theory / Nesterenko Yu. V., Philippon P., eds. — Springer, 2001. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1752).
- [17] Jabbouri E. M. Mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions elliptiques et abéliennes // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1.* — 1986. — Vol. 303, No. 9. — P. 375—378.
- [18] Masser D. Elliptic Functions and Transcendence. — Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 437).
- [19] Masser D. W., Wüstholz G. Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions // *Invent. Math.* — 1983. — Vol. 72. — P. 407—464.
- [20] Nesterenko Yu. V. On a measure of algebraic independence of the values of elliptic functions // *Diophantine Approximations and Transcendental Numbers: Proceedings of the Colloquium C.I.R.M. Lumini, 1990* / ed. P. Philippon. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992. — P. 239—248.
- [21] Philippon P. Variétés abéliennes et indépendance algébrique // *Invent. Math.* — 1983. — Vol. 72. — P. 389—405.
- [22] Ramachandra K. Contributions to the theory of transcendental numbers. II // *Acta Arith.* — 1968. — Vol. XIV. — P. 73—88.
- [23] Reyssat E. Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exp // *Bull. Soc. Math. France.* — 1980. — No. 1. — P. 47—79.
- [24] Wüstholz G. Über das abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes // *Invent. Math.* — 1983. — Vol. 72. — P. 363—388.
- [25] Wüstholz G. Recent progress in transcendence theory // *Number Theory.* — Berlin: Springer, 1984. — P. 280—296. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1068).

