

Метод Зигеля—Шидловского в p -адической области

В. Г. ЧИРСКИЙ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: глобальные соотношения, p -адические числа.

Аннотация

В работе дан обзор арифметических свойств так называемых F -рядов.

Abstract

V. G. Chirskii, Siegel–Shidlovsky method in p -adic domain, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 221–230.

The paper presents a review of the arithmetic properties of F -series.

Метод Зигеля—Шидловского в теории трансцендентных чисел, в основном, был предназначен для исследования арифметической природы значений E -функций, определённых К. Зигелем [16] в 1929 году. Эти функции представляют собой степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!},$$

у которых коэффициенты a_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени κ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. При этом для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{a_n} = O(n^{\varepsilon n}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где через $\overline{\alpha}$ для числа α из поля $\mathbb{K}$ обозначается наибольшая из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел. Кроме того, существует такая последовательность чисел $q_n \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots$, что для всех $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$

$$q_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},$$

причём

$$q_n = O(n^{\varepsilon n}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из этого определения сразу следует, что E -функции являются целыми функциями. Также из этого определения вытекает, что если рассматривать произвольное

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 6, с. 221–230.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

простое число p и рассматривать E -функции как отображения поля $\mathbb{C}_p$ (представляющего собой пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$ — поля p -адических чисел) в поле $\mathbb{C}_p$, то радиусы сходимости этих рядов меньше 1.

Типичный пример E -функции даёт так называемый обобщённый гипергеометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} \left(\frac{z}{t}\right)^{tn},$$

где $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Q}$, $t = m - l > 0$ и $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$ при $n \geq 1$. Он является решением линейного дифференциального уравнения порядка m .

Теория E -функций получила удивительное по красоте развитие в работах А. Б. Шидловского. Сформулируем, например, его вторую основную теорему.

Теорема ([7, с. 127]). Пусть $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ — E -функции, составляющие решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=0}^m Q_{i,j}(z)y_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$, пусть число ξ отлично от 0 и полюсов коэффициентов этой системы дифференциальных уравнений. Тогда числа $f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Эта общая теорема может быть применена для доказательства алгебраической независимости значений в отличных от 0 алгебраических точках упомянутых выше гипергеометрических E -функций. Ученик А. Б. Шидловского В. Х. Салихов в цикле работ (см., например, [4]) получил условия, при которых гипергеометрические ряды и их последовательные производные до порядка $m - 1$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

В работах самого А. Б. Шидловского, его учеников и ряда других авторов теория E -функций получила значительное развитие. Обзор этой теории и доказательства большинства утверждений можно найти в [7]. В последние годы Д. Браунвеллом, Г. Хекманном, И. Андре, Д. Бертраном, Ф. Бейкерсом был решён ряд важных задач, и теория значений E -функций получила ещё более совершенный вид.

В [16] было сделано указание на возможность использования предложенного метода для исследования арифметической природы значений другого класса степенных рядов, G -функций. Определение G -функции подобно определению E -функции. Точнее говоря, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

называется G -функцией, если коэффициенты a_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных

чисел. При этом

$$\overline{|a_n|} = O(C^n), \quad n \rightarrow \infty,$$

с некоторой постоянной C и существует такая последовательность чисел $q_n \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots$, что для всех $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$

$$q_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},$$

причём

$$q_n = O(C^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из приведённого определения следует, что G -функции представляются рядами, имеющими конечные радиусы сходимости как в поле $\mathbb{C}$, так и в любом поле $\mathbb{C}_p$.

Пример G -функции даёт обобщённый гипергеометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_m)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} (z)^n,$$

где $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Q}$.

Арифметические свойства значений G -функций изучались многими авторами. Значительные результаты были получены Г. В. Чудновским [14]. p -адические значения G -функций изучались Ю. Фликером [15], Е. М. Матвеевым [2] и др.

В 1981 году Э. Бомбьери [13] ввёл понятие глобального соотношения, определяемого следующим образом. Пусть

$$f_i(z) \in \mathbb{K}[[z]], \quad i = 1, \dots, m, \quad P(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m],$$

многочлен $P(y_1, \dots, y_m)$ отличен от тождественного нуля. Пусть v — нормирование поля $\mathbb{K}$, соответствующее пополнение обозначаем $\mathbb{K}_v$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_i(\xi)$, $i = 1, \dots, m$.

Глобальные соотношения для G -функций и их приложения к алгебраической геометрии, диофантовым уравнениям изучались в работах Э. Бомбьери [13] и И. Андре [8].

Естественный способ дополнить E - и G -функции — рассмотреть ряды вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n.$$

Сформулируем условия на коэффициенты a_n . Во-первых, a_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. При этом

$$\overline{|a_n|} \leq C_1^n$$

с некоторой постоянной C_1 . Во-вторых, существует такая последовательность натуральных чисел d_n , $n = 0, 1, \dots$, что для всех $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$

$$d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},$$

причём

$$d_n = d_{1,n} q^n,$$

где целые числа $d_{1,n}$ делятся только на простые числа p , $p \leq C_2 n$, кроме того,

$$\text{ord}_p d_{1,n} \leq C_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Выполнение сформулированных условий будем обозначать

$$f(z) \in F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q),$$

сам ряд $f(z)$ будем называть F -рядом. F -ряд, в частности, является рядом Жевре арифметического типа порядка 1 (см. [9]). Важное свойство F -рядов состоит в том, что их радиус сходимости больше 1 в любом поле $\mathbb{C}_p$, где простое число p не делит q .

Пример F -ряда даёт обобщённый гипергеометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_l)_n}{(b_1)_n \cdots (b_m)_n} (zt)^{tn},$$

где $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Q}$, $t = l - m > 0$.

Рассмотрение F -рядов вызвано также существованием равенств, примером которых служит известное ещё Л. Эйлеру равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n! = -1,$$

верное во всех полях $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 1 (см. [6]). Пусть $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ — F -ряды, составляющие решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = \sum_{j=0}^m A_{i,j}(z) y_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

линейно независимые над $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$, пусть число ξ отлично от 0 и полюсов коэффициентов этой системы дифференциальных уравнений. Тогда не существует линейных глобальных соотношений, связывающих $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$, точнее говоря, для любой отличной от нуля линейной формы $L(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которой принадлежат $\mathbb{K}$, существуют простое число p и нормирование v , продолжающее p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие что в поле $\mathbb{K}_v$

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Теорема 2 (см. [6]). Пусть $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ — F -ряды, составляющие решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=0}^m Q_{i,j}(z) y_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

алгебраически независимые над $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$, пусть число ξ отлично от 0 и полюсов коэффициентов этой системы дифференциальных уравнений. Тогда не существует алгебраических глобальных соотношений, связывающих $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$, точнее говоря, для любого отличного от нуля многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которого принадлежат $\mathbb{K}$, существуют простое число p и нормирование v , продолжающее p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие что в поле $\mathbb{K}_v$

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Как и ранее, приложения этой теоремы к гипергеометрическим рядам можно получить, используя условия из работ В. Х. Салихова, например из [3].

Эта теорема служит некоторым аналогом для случая F -рядов второй основной теоремы А. Б. Шидловского. Это будет более очевидным, если дать несколько другую интерпретацию сформулированным теоремам. Для этого рассмотрим произвольную совокупность рядов $f_i(z) \in \mathbb{K}[[z]]$, $i = 1, \dots, m$, и точку $\xi \in \mathbb{K}$, а также рассмотрим все те поля $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_i(\xi)$. Образует прямое произведение этих полей. При этом получится коммутативное кольцо (с делителями нуля). Обозначим $\underline{f}(\xi)$ элемент, координаты которого в полях $\mathbb{K}_v$ как раз равны $f(\xi)$. Отсутствие линейных (алгебраических) глобальных соотношений для рядов $f_i(z)$ в точке $z = \xi$ означает линейную (соответственно алгебраическую) независимость элементов $\underline{f}_i(\xi)$, $i = 1, \dots, m$, рассматриваемого прямого произведения. Поэтому утверждение, например, теоремы 2 можно переформулировать так: при условии теоремы 2 элементы $\underline{f}_i(\xi)$ алгебраически независимы.

Назовём глобальное соотношение

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0$$

тривиальным, если оно получается в результате подстановки $z = \xi$ в тождественное по z равенство

$$P(f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0,$$

где

$$P(y_1, \dots, y_m) —$$

отличный от нуля многочлен с коэффициентами из рассматриваемого поля, в противном случае будем называть это соотношение *нетривиальным*.

В [5] доказано, что при условиях теоремы 1 нетривиальных глобальных линейных соотношений, связывающих $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$, нет.

В частности, приведённое выше равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n! = -1$$

получается при подстановке $z = 1$ в тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! n z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! z^{n+1} - z \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = -1.$$

При исследовании арифметической природы значений E - и G -функций, кроме качественных вопросов алгебраической независимости, возникают важные количественные вопросы, так называемые оценки мер линейной и алгебраической независимости (определение см. в [7]). В случае F -рядов эти вопросы принимают следующий вид. Отсутствие, например, линейного глобального соотношения для рядов $f_i(z)$ в точке $z = \xi$ означает, что для любой отличной от тождественного нуля линейной формы $L(y_1, \dots, y_m)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ существуют простое число p и нормирование v , продолжающее p -адическое нормирование на поле $\mathbb{K}$, такие что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Имеет смысл дать оценку сверху для числа p через высоту линейной формы и заменить предыдущее неравенство оценкой снизу величины

$$|L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v.$$

При этом вызывают интерес эффективные оценки, т. е. оценки, в которых оцениваемые величины явно выражаются через параметры рассматриваемых F -рядов, системы дифференциальных уравнений и точки ξ . В [12] эта задача была решена. Сформулируем теоремы из этой работы. Для этого вначале дадим некоторые определения.

Пусть $\text{Disc}(\mathbb{K})$ обозначает дискриминант поля $\mathbb{K}$. Пусть $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ — многочлен минимальной степени, старший коэффициент которого равен 1, такой что $T(z)A_{i,j} \in \mathbb{K}[z]$ для всех i, j . Пусть $\xi = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $b \in \mathbb{N}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, положим $h(\xi) = \ln(1 + |\xi|) + \ln b$.

Как обычно, *знаменателем* $\text{den}(\alpha)$ алгебраического числа α называем наименьшее натуральное число d , такое что число $d\alpha$ является целым алгебраическим. Ниже будет удобно называть *высотой* $H(\alpha)$ алгебраического числа наибольшее из чисел $\text{den}(\alpha), |\alpha|$. *Высотой совокупности многочленов* с алгебраическими коэффициентами будем называть максимум из наименьшего общего знаменателя коэффициентов всех этих многочленов и всех высот этих коэффициентов. *Степень совокупности многочленов* определяем как наибольшую из степеней этих многочленов. *Высотой* $H(A)$ (*степенью* $\deg(A)$) *совокупности рациональных функций* $A_1, \dots, A_r$ будем называть высоту (соответственно степень) совокупности многочленов $T, TA_1, \dots, TA_r$, где T — многочлен с алгебраическими коэффициентами, со старшим коэффициентом, равным 1, и минимальной степени, такой что $TA_1, \dots, TA_r$ — многочлены с алгебраическими коэффициентами. Считаем далее, что *высота* $H(\mathbf{D})$ и *степень* $\deg(\mathbf{D})$ для системы дифференциальных уравнений определены как высота и степень совокупности её коэффициентов — рациональных функций.

Положим

$$c_4 = c_1 + \ln d + \frac{5}{4}c_2c_3 + 2c_3 + 5, \quad c_5 = m^2c_4 + 2$$

и

$$N_0 = \max \left(n_0(d), \left(\ln 2 + \frac{1}{\kappa} \text{Disc}(\mathbb{K}) \right)^2, \right. \\ \left. \exp(4(2(m+3) + c_4(m-1))^2), \exp(h(\xi)^2 + \deg(\mathbf{D})(h(\xi) + 2) + 2 \ln H(\mathbf{D}) + 1) \right), \\ H_0 = \exp \left(N_0 \ln N_0 \left(1 - \frac{m+3+(m-1)c_5}{\sqrt{\ln N_0}} \right) \right).$$

Пусть

$$l(x) = \exp \sqrt{\ln x}, \quad u(x) = m(x+1) - [x(\ln x)^{-\frac{1}{2}}], \\ P_{\text{lower}}(x) = l\left(\frac{x}{\ln x}\right), \quad P_{\text{upper}}(x) = u\left(\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{2(m+3+(m-1)c_5)}{\sqrt{\frac{\ln x}{\ln \ln x}}} \right)\right).$$

Теорема 3 ([12, теорема 1.1]). Пусть $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ — F -ряды, составляющие решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = \sum_{j=0}^m Q_{i,j}(z)y_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\mathbf{D})$$

линейно независимые над $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$, пусть число ξ отлично от 0 и полюсов коэффициентов этой системы дифференциальных уравнений. Тогда для любой отличной от нуля линейной формы

$$\Lambda(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m,$$

коэффициенты которой принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и высота которой определена равенством

$$H(\Lambda) = \max_{i=1, \dots, m} H(h_i),$$

при $H \geq \max(H(\Lambda)H_0)$ существуют простое число p , удовлетворяющее неравенствам

$$P_{\text{lower}}(\ln H) < p < P_{\text{upper}}(\ln H),$$

и нормирование v , продолжающее в поле $\mathbb{K}$ p -адическое нормирование, такие что в поле $\mathbb{K}_v$

$$\Lambda(\xi) = \Lambda(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0,$$

точнее говоря,

$$|\Lambda(\xi)|_v \geq H^{-m - \frac{m+3+2mc_5}{\sqrt{\ln \ln H}}}.$$

Сделаем важное примечание: последняя оценка означает, что есть эффективный способ проверки отличия от 0 величины $|\Lambda(\xi)|_v$. Он состоит в том, что можно рассмотреть лишь конечное число $\tilde{N}$ начальных членов рядов $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$. Точнее говоря, если

$$H_0 \geq \exp \exp(8m^{2(m+3+(m-1)c_5)^2})$$

и $H = \max(H(\Lambda), H_0)$, то в качестве $\tilde{N}$ можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\tilde{N} \geq 8\kappa(m+1)^2 \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \right)^2.$$

Величина $n_0(\mathbf{D})$, входящая в определение величин перед формулировкой теоремы, непосредственно связана с величиной N_0 из формулировки фундаментальной леммы А. Б. Шидловского [7, лемма 9, с. 106]. Для того чтобы получить полностью эффективные оценки мер линейной и алгебраической независимости методом Зигеля—Шидловского, требуется оценка сверху этой величины. В [12] на основе [10, 11, 17] такая оценка была получена.

Теорема 4 ([12, теорема 1.2]). Для любой системы дифференциальных уравнений $(\mathbf{D})$ с коэффициентами из $\mathbb{K}(z)$ существуют положительные числа C, c , эффективно выражаемые через $m, q = \deg(\mathbf{D}), \kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, такие что

$$n_0(\mathbf{D}) \leq C(\kappa, m, q).$$

Более точно, можно взять

$$c(\kappa, m, q) = \log_2, \quad C(\kappa, m, q) = (2\kappa(q+1)m)^{(2(q+1)m)^{8m}}.$$

Как отметил Д. Бертран, полученная оценка $n_0(\mathbf{D})$ может использоваться и в случае E -функций, а для G -функций она может быть улучшена.

В 1970 г. А. И. Галочкин в [1] доказал теорему об алгебраической независимости значений функций в трансцендентных точках, допускающих высокий порядок приближения алгебраическими числами. Обобщим понятие глобального соотношения на ряды, сходящиеся во всех неархимедовских локальных полях к элементам этих полей, допускающим высокий порядок приближения алгебраическими числами.

Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k,$$

где $\theta_k \in \mathbb{K}$, причём для любого простого числа p и для любого нормирования v , продолжающего p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, пусть этот ряд сходится в поле $\mathbb{K}_v$. Обозначим

$$\Theta_n = \sum_{k=0}^n \theta_k.$$

Теорема 5. Пусть $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ — F -ряды, составляющие решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = \sum_{j=0}^m Q_{i,j}(z)y_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

линейно независимые над $\mathbb{K}(z)$. Пусть ряд ξ удовлетворяет приведённым выше условиям, и пусть $\theta_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Пусть $\varepsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное

множество номеров n , таких что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\Theta_n|)$$

и любого нормирования v , продолжающего p -адическое нормирование на поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(m-1+\delta)(\exp \ln^{1+\varepsilon} |\Theta_n|) \ln^{1+\varepsilon} |\Theta_n|).$$

Тогда для любой линейной формы $L(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которой, не все равные нулю, принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, существуют простое число p и нормирование v , продолжающее p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие что в поле $\mathbb{K}_v$

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Примером ряда, к которому применима сформулированная теорема, может служить ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k!,$$

где n_k — достаточно быстро растущая последовательность натуральных чисел.

Литература

- [1] Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1970. — № 5. — С. 58—63.
- [2] Матвеев Е. М. Линейные формы от значений G -функций и диофантовы уравнения // Мат. сб. — 1982. — Т. 117 (159), № 3. — С. 379—396.
- [3] Салихов В. Х. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Тр. ММО. — 1988. — Т. 51. — С. 223—256.
- [4] Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций // Acta Arith. — 1990. — Vol. 53. — P. 453—471.
- [5] Чирский В. Г. О нетривиальных глобальных соотношениях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 5. — С. 33—36.
- [6] Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, № 2. — С. 123—127.
- [7] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.
- [8] André Y. G -Functions and Geometry. — Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn, 1989. — (Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn. Aspects of Math.; Vol. 13).
- [9] André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. II: Transcendance sans transcendance // Ann. Math. — 2000. — Vol. 151. — P. 741—756.
- [10] Bertrand D. On André's proof of the Siegel–Shidlovsky theorem // Publ. Keio Univ. — 1999. — Vol. 27. — P. 51—63.
- [11] Bertrand D., Beukers F. Equations différentielles linéaires et majorations de multiplicités // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1985. — Vol. 18. — P. 181—192.

- [12] Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. — 2004. — Vol. XIII, no. 2. — P. 241–260.
- [13] Bombieri E. On G -functions // Recent Progress in Analytic Number Theory, Symp. Durham 1979. Vol. 2. — London: Academic Press, 1981. — P. 1–67.
- [14] Chudnovsky G. V. On applications of Diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1985. — Vol. 81. — P. 7261–7265.
- [15] Flicker Yu. On p -adic G -functions // J. London Math. Soc. — 1977. — Vol. 15, no. 3. — P. 395–402.
- [16] Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. — 1929. — No. 1. — S. 1–70.
- [17] Yebbou J. Calcul de facteurs déterminants // J. Differential Equations. — 1988. — Vol. 72. — P. 140–148.