

# Методы формирования приближённых математических моделей движения

**И. В. НОВОЖИЛОВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

УДК 531.8

**Ключевые слова:** механическая модель, математическая модель, приближённая математическая модель, фракционный анализ.

## Аннотация

В работе обсуждаются различные концепции построения приближённых математических моделей.

## Abstract

*I. V. Novozhilov, Approximate mathematical modelling of motions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 5—9.*

This paper discusses different approaches to constructing approximate mathematical models.

По прагматической традиции, сложившейся в прикладной механике, под математической моделью будем понимать замкнутую систему дифференциальных уравнений, которая с приемлемой для исследователя точностью описывает те или иные частные особенности поведения реального объекта, интересующие исследователя.

В этом не слишком чётком определении появляются два обстоятельства, которые обычно не присутствуют в дефинициях классической механики и теории дифференциальных уравнений, — цель исследования и его точность.

Классическая процедура математического моделирования механической задачи проводится в три этапа. На первом оговаривается набор допущений (абсолютная жёсткость конструкции, идеальность связей и т. п.), формирующих механическую модель объекта. На втором этапе составляются уравнения этой механической модели — математическая модель, адекватная своему механическому аналогу. На третьем проводится аналитическое или численное исследование математической модели.

Допущения о разных целях и приближённости результата дают возможность перейти от классической одномерно-последовательной схемы математического моделирования к ветвящейся схеме — формированию для одного и того же объекта разных математических моделей, ориентированных на достижение разных

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 7, с. 5—9.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

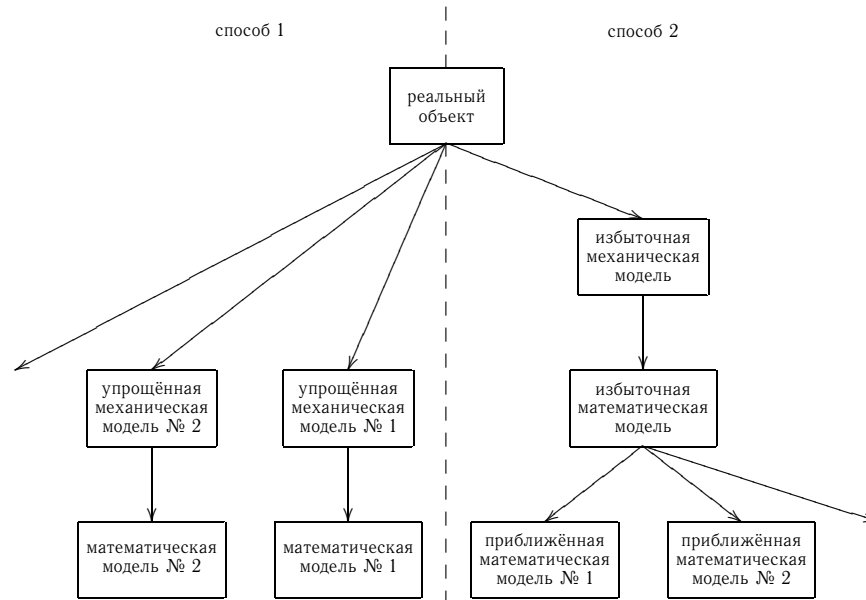


Рис. 1

целей. Раздельное изучение различных составляющих движения, так сказать разделение движений на «фракции» [8, 10], значительно уменьшает трудоёмкость матмоделировочных изысканий для любой сколь-нибудь сложной задачи. Такая возможность может реализоваться двояко (рис. 1).

При первом способе исследователем принимается набор исходных допущений, которые определяют «парциальную» механическую модель, сразу ориентированную на описание конкретных составляющих движения. Подобными допущениями определялась, например, А. Ю. Ишлинским прецессионная модель трёхосного силового гиросtabilизатора [6], М. В. Келдышем — неголономная модель качения деформируемого колеса [7], Н. Е. Жуковским — модель планирующего полёта [5]. Формирование таких феноменологических моделей требует незаурядного опыта, интуиции, таланта и вряд ли поддаётся алгоритмизации.

Второй способ составления упрощённых математических моделей формализуется процедурой так называемого «фракционного анализа» [8, 10]. Фракционный анализ системы выполняется в три шага.

1. ПОСТРОЕНИЕ ИСХОДНОЙ МОДЕЛИ. Принимается набор допущений, заведомо избыточный по отношению к поставленной частной цели исследования: избыточный по числу обобщённых координат, по перечню постоянных параметров и т. д. Механическая и математическая модели, соответствующие этим допущениям, также избыточны. Будем называть такую математическую модель исходной. Идентификация параметров, аналитическое или численное исследование

дование её уравнений обычно представляются неоправданно трудоёмкими по отношению к тому частному эффекту, который требуется изучить.

2. НОРМАЛИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ. Невнятные словосочетания «частные особенности поведения», «составляющие движения» и т. п. определяются заданием класса движения — характерных значений всех постоянных и переменных величин, участвующих в описании исходной модели и соответствующих поставленной цели. Характерное время оценивается величиной интервала времени, на котором исследователю хотелось бы изучить движение системы. Характерные значения фазовых переменных оцениваются максимальными значениями их абсолютных величин на выбранном характерном интервале времени. За характерное значение параметров одинаковой размерности берётся абсолютная величина наибольшего из этих параметров. Характерные значения находятся по данным эксперимента, при помощи грубых оценок решения исходных уравнений, исходя из цели исследования и т. д. Уравнения исходной модели записываются, далее, в новой системе размерностей, за единицы которой принимаются выбранные характерные значения. Деление каждого уравнения на комбинацию характерных значений, имеющую размерность этого уравнения, приводит уравнения к нормализованной безразмерной форме. Все переменные нормализованной системы уравнений не превосходят по модулю величин порядка единицы, а некоторые из безразмерных комплексов, составленных из характерных значений, могут оказаться много меньшими единицы. Они принимаются за малые параметры, соответствующие изучаемому классу движения.

3. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. Слагаемые, зависящие от малых параметров, рассматриваются как возмущения по малым параметрам — регулярные или сингулярные, смотря по способу их вхождения в уравнения. Это позволяет воспользоваться для приближённого анализа задачи широким спектром методов теории возмущений.

В большинстве этих методов решение возмущённой по малому параметру задачи строится в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра [2, 9]. Системы дифференциальных уравнений, определяющие решение с точностью до нулевого, первого и т. д. порядка малости по малому параметру, естественно называть приближёнными математическими моделями соответствующей точности для исходной математической модели. Таких приближённых моделей может быть несколько для одной и той же исходной модели: в зависимости от числа и вида классов движения, для которых эти приближённые модели строятся, и в зависимости от требуемой точности приближения.

Заметим, что, в отличие от теории асимптотических разложений, в механике управляемых систем акцент смещается с вычисления приближённого решения исходной системы уравнений к построению приближённых математических моделей. Такие модели используются в реальном времени при полунатурных испытаниях, в составе имитационно-тренажёрных комплексов, в алгоритмах управления мехатронных систем и т. д. Работа в реальном времени заставляет отказаться от итерационных вариантов уточнения математических моде-

лей, когда модели первого и более высокого порядков точности формируются по уже известным решениям уравнений предшествующих уровней точности. В этом случае возможны безытерационные способы построения уточнённых моделей [4, 11].

Оценки точности приближённых моделей даются оценками точности использованных асимптотических разложений [2, 9]. Строго говоря, эти оценки справедливы, когда величина малого параметра стремится к нулю. Это не может не смущать при исследовании конкретных систем, для которых малые параметры — всегда конечные величины [1, 10]. Такие сомнения обычно снимаются после численного сравнения исходной и приближённой моделей, хотя бы для простейших, тестовых ситуаций. Практика расчётов показывает, что асимптотические оценки точности остаются справедливыми и для весьма «больших» величин малых параметров. Так, например, при малых параметрах 0,1, 0,3 модели нулевого приближения имеют погрешность порядка 10 %, 30 % [3, 4, 10, 12].

Обсудим взаимодействие обоих вариантов формирования приближённых моделей, представленных на рис. 1. Естественно предположить, что цели, преследуемые при построении одинаково занумерованных моделей, одни и те же. Тогда, в идеале, одноимённые модели в левой и правой частях схемы должны совпадать.

Формализм асимптотических разложений, использованных «справа», позволяет обосновать механические допущения, принятые «слева», оценить точность полученных приближённых моделей, величину интервала времени, на котором эта точность гарантируется.

С другой стороны, опыт и смелость построения упрощённых механических моделей, навык проведения оценок для этих моделей, приобретённые при первом, феноменологическом, варианте моделирования, становятся важнейшим инструментом при определении характерных значений величин — важнейшем этапе реализации второго, фракционного, варианта моделирования.

## Литература

- [1] Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. — М.: Наука, 1983.
- [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
- [3] Влахова А. В. Математические модели движения железнодорожного вагона конечной жёсткости // Изв. РАН. МТТ. — 2000. — № 4. — С. 30—38.
- [4] Влахова А. В. О безытерационных приближениях по малому параметру // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. — 2003. — № 5. — С. 29—37.
- [5] Жуковский Н. Е. О парении птиц // Собр. соч. Т. 4. — Гостехиздат, 1949.
- [6] Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976.
- [7] Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трёхколёсного шасси // Тр. ЦАГИ. — 1945. — Т. 564.

- [8] Клайн С. Дж. Подобие и приближённые методы. — М.: Мир, 1968.
- [9] Кузьмина Р. П. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
- [10] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1995.
- [11] Новожилов И. В. Об уточнении предельных моделей механики // Нелинейная механика. — М.: Физматлит, 2001. — С. 174—191.
- [12] Новожилов И. В., Павлов И. С. Приближённая математическая модель колёсного экипажа // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 2. — С. 196—204.

