

К оценке пределов применимости модели Н. Е. Жуковского для планирующего полёта

А. В. ВЛАХОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 531.8

Ключевые слова: динамика полёта, приближённая математическая модель, плотность воздуха, высота полёта, модель Жуковского.

Аннотация

Ранее при исследовании задачи о планирующем полёте, т. е. о плоском продольном движении самолёта с выключенным двигателем, предполагалось, что самолёт является абсолютно твёрдым телом, Земля — плоской и невращающейся, а окружающая среда — спокойной. Кроме того, принимались дополнительные допущения о неизменности угла атаки самолёта и постоянстве плотности воздуха. В данной работе обсуждаются пределы применимости этих дополнительных допущений.

Abstract

A. V. Vlahova, On applicability limits of Zhukovsky's model for the gliding flight, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 21–33.

In the studies of the problem of the gliding flight, i.e., aircraft longitudinal movement with its engines switched off, the aircraft was traditionally assumed to be an absolutely rigid body, the Earth was not rotating and had a plane surface and the atmosphere was quiet. Further, the attack angle and the air density were assumed constant. The aim of this paper is to discuss the applicability limits of these assumptions.

Запишем традиционные уравнения продольного движения самолёта [2, 3, 8]:

$$\begin{aligned} M \frac{dV}{dT} &= -Mg \sin \Theta + P^T \cos A - \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S C_x, \\ MV \frac{d\Theta}{dT} &= -Mg \cos \Theta + P^T \sin A + \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S C_y, \\ \frac{dH}{dT} &= V \sin \Theta, \quad \frac{dX}{dT} = V \cos \Theta, \\ \frac{d\vartheta}{dT} &= \Omega_z, \\ I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S b_a M_z, \\ A &= \vartheta - \Theta, \quad C_x = C_x(A, \Delta_B), \quad C_y = C_y(A, \Delta_B), \\ M_z &= M_z \left(A, \frac{b_a}{V}, \frac{dA}{dT}, \frac{b_a}{V} \Omega_z, \Delta_B \right), \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(H). \end{aligned} \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 21–33.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

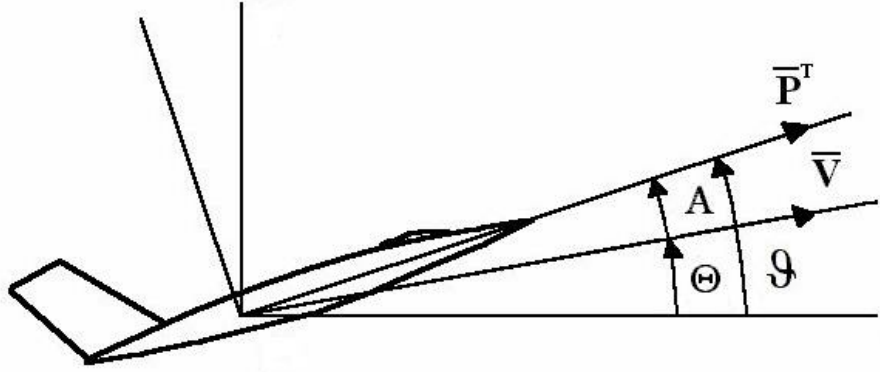


Рис. 1

Здесь T — размерное время, H, X, V — координаты и скорость центра масс, $\Theta, \vartheta, A, \Delta_B$ — углы возвышения траектории, тангажа, атаки и поворота руля высоты (рис. 1), M, I_z, S, b_a — масса, момент инерции, площадь крыльев, средняя аэродинамическая хорда крыла самолёта, g — ускорение силы тяжести, P^T — тяга двигателя, \mathfrak{S} — плотность воздуха, C_x, C_y, M_z — коэффициенты силы лобового сопротивления, подъёмной силы и аэродинамического момента.

Система (1) записана в предположениях, что вектор тяги проходит через центр масс и самолёт движется на дозвуковых скоростях, т. е. зависимость аэродинамических коэффициентов от числа Маха может не учитываться [2, 3, 8].

Будем, далее, считать, что высота полёта не превышает величин порядка 11 км. Тогда, в соответствии с [2, 3, 8, 9], плотность воздуха задаётся следующим выражением:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0(1 - \beta H)^{\gamma-1}. \quad (2)$$

Здесь $\mathfrak{S}_0, \beta, \gamma > 0$ — константы, соответствующие характеристикам стандартной атмосферы. Примем дополнительные допущения о малости углов атаки ($A \sim 0,1$ рад) и о статической устойчивости самолёта ($\partial M_z / \partial A < 0$).

Построим для системы (1), (2) приближённую математическую модель движения. Возможность упрощения этой системы связана с сильным разнесением характерных временных масштабов изменения угла атаки и вектора скорости центра масс, а также со слабой зависимостью плотности воздуха от изменения высоты полёта [2, 3, 8].

Приведём систему (1), (2) к виду, допускающему применение тихоновской процедуры разделения движений [4, 7, 10, 11]. Для этого заменим исходный набор переменных $V, \Theta, H, X, \vartheta, \Omega_z$ набором $V, \Theta, H, X, A, \Omega = dA/dT$, содержащим «быстрые» переменные A, Ω . Прделаем также замену $H = H_* + \Delta H$, где H_* — характерная высота полёта. Система (1), (2) перейдёт в следующую:

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV}{dT} &= -Mg \sin \Theta + P^T \cos A - \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S C_x, \\
 MV \frac{d\Theta}{dT} &= -Mg \cos \Theta + P^T \sin A + \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S C_y, \\
 \frac{d\Delta H}{dT} &= V \sin \Theta, \quad \frac{dX}{dT} = V \cos \Theta, \\
 \frac{dA}{dT} &= \Omega, \\
 I_z \frac{d\Omega}{dT} &= \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S b_a M_z - \\
 &- r_z^2 \left\{ \frac{1}{V} \left[\left(-M \frac{dV}{dT} + Mg \sin \Theta \right) \frac{d\Theta}{dT} + \left(P^T \cos A + \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S \frac{\partial C_y}{\partial A} \right) \Omega + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{dP^T}{dT} \sin A + \frac{1}{2} \mathfrak{S} V^2 S \frac{\partial C_y}{\partial \Delta_B} \frac{d\Delta_B}{dT} \right] + \left(\mathfrak{S} \frac{dV}{dT} + \frac{1}{2} V \frac{d\mathfrak{S}}{d\Delta H} \frac{d\Delta H}{dT} \right) S C_y \right\}, \\
 C_x &= C_x(A, \Delta_B), \quad C_y = C_y(A, \Delta_B), \\
 M_z &= M_z \left(A, \frac{b_a}{V} \Omega, \frac{b_a}{V} \left(\Omega + \frac{d\Theta}{dT} \right), \Delta_B \right), \\
 \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_* (1 - \lambda \Delta H)^{\gamma-1}, \quad \mathfrak{S}_* = \mathfrak{S}_0 (1 - \beta H_*)^{\gamma-1}, \quad \lambda = \frac{\beta}{1 - \beta H_*}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь r_z — радиус инерции самолёта, выражения dV/dT , $d\Theta/dT$, $d\Delta H/dT$, стоящие в правой части последнего дифференциального уравнения, заменяются соответствующими выражениями из правых частей первых трёх уравнений.

Рассмотрим задачу на классе движения модели Жуковского, т. е. на таких манёврах самолёта, при которых параметры движения центра масс V , Θ изменяются существенно. Нормализуем систему (3), заменив переменные их безразмерными аналогами

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{T}{T_*}, \quad v = \frac{V}{V_*}, \quad \theta = \frac{\Theta}{\Theta_*}, \quad \Delta h = \frac{\Delta H}{\Delta H_*}, \quad x = \frac{X}{X_*}, \quad \alpha = \frac{A}{A_*}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_*}, \\
 \delta_B &= \frac{\Delta_B}{\Delta_{B*}}, \quad \rho = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_*}, \quad p^T = \frac{P^T}{P_*^T}, \quad c_x = \frac{C_x}{C_{x*}}, \quad c_y = \frac{C_y}{C_{y*}}, \quad m_z = \frac{M_z}{M_{z*}}.
 \end{aligned}$$

Здесь T_*, \dots, M_{z*} — характерные для рассматриваемого класса движения значения соответствующих величин, выбираемые так, чтобы их нормализованные аналоги t, \dots, m_z по модулю не превосходили величин порядка единицы. В отличие от [7, 11], учтём малость угла атаки и вид (2) зависимости плотности воздуха от высоты полёта.

В качестве характерного времени для выбранного класса движения возьмём $T_* = T_1 = V_*/g$, т. е. время, за которое скорость центра масс под действием сил порядка веса изменяется на величину порядка V_* . Естественно предположить, что на тех же временах $T \sim T_1$ существенно изменяются управления — сила тяги P^T и угол отклонения руля высоты Δ_B .

Будем считать характерные значения подъёмной силы и силы тяги величинами порядка веса самолёта: $\Im V_*^2 S C_{y*} / 2 = P_*^T = Mg$. Тогда из первого и второго уравнений системы (3) следует $(dV/dT)_* = g$, $(d\Theta/dT)_* = g/V_*$. Примем $\Theta_* = 1$. Тогда из третьего уравнения системы (3) следует $(d\Delta H/dT)_* = V_*$. Выберем $A_* = \Delta_{B*}$, $M_{z*} = |(\partial M_z / \partial A)_*| A_*$, $C_{y*} = (\partial C_y / \partial A)_* A_*$, $(\partial C_y / \partial A)_* = (\partial C_y / \partial \Delta_B)_*$. Полагая в третьем и четвёртом уравнениях системы (3) $T \sim T_*$, $V \sim V_*$, $\Theta \sim \Theta_*$, получим оценки характерного изменения высоты и дальности полёта: $\Delta H_* = X_* = V_*^2 / g$. Оценку $\Omega_* = A_* / T_2$ получим, как и в [7, 11], из упрощённого уравнения

$$I_z \frac{d^2 A}{dT^2} = \frac{1}{2} \Im_* V_*^2 S b_a \left(\frac{\partial M_z}{\partial A} \right)_* A,$$

описывающего угловые колебания с постоянной времени

$$T_2 = \sqrt{\frac{2I_z}{\Im_* V_*^2 S b_a \left| \left(\frac{\partial M_z}{\partial A} \right)_* \right|}}.$$

Нормализованным аналогом системы (3) будет

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\sin \theta + p^T \cos \varepsilon \alpha - \frac{1}{K_*} \rho v^2 c_x, \\ v \frac{d\theta}{dt} &= -\cos \theta + p^T \sin \varepsilon \alpha + \rho v^2 c_y, \\ \frac{d\Delta h}{dt} &= v \sin \theta, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \\ \mu \frac{d\alpha}{dt} &= \omega, \\ \mu \frac{d\omega}{dt} &= \rho v^2 m_z - \lambda_1 \left\{ \frac{1}{v} \left[\mu \left(-\frac{dv}{dt} + \sin \theta \right) \frac{d\theta}{dt} + \left(\varepsilon p^T \cos \varepsilon \alpha + \rho v^2 \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \right) \omega + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu \left(\frac{dp^T}{dt} \sin \varepsilon \alpha + \rho v^2 \frac{\partial c_y}{\partial \delta_B} \frac{d\delta_B}{dt} \right) \right] + \mu \left(2\rho \frac{dv}{dt} + v \frac{d\rho}{d\Delta h} \frac{d\Delta h}{dt} \right) c_y \right\}, \\ c_x &= c_x(\alpha, \delta_B, \varepsilon), \quad c_y = c_y(\alpha, \delta_B, \varepsilon), \\ m_z &= m_z \left(\alpha, \varepsilon_1 \frac{\omega}{v}, \frac{\varepsilon_1}{v} \frac{d\theta}{dt}, \delta_B, \varepsilon, \mu \right), \quad \delta_B = \delta_B(\varepsilon, \mu, t), \\ \rho &= \left(1 - \lambda V_*^2 \frac{\Delta h}{g} \right)^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\mu = \frac{T_2}{T_1}, \quad \varepsilon = A_*, \quad \varepsilon_1 = \frac{T_3}{T_2}, \quad K_* = \frac{C_{y*}}{C_{x*}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{1 - \beta H_*}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

$T_3 = b_a / V_*$ — характерное время пролетания частиц воздуха вдоль крыла самолёта.

Для числовых значений параметров самолётов и атмосферы из [2, 3, 8] и высот полёта $H_* \sim 5 \div 10$ км имеем $T_1 \sim 10 \div 30$ с, $T_2 \sim 0,5 \div 1$ с, $T_3 \sim 0,01$ с, $K_* > 1$, $\lambda \sim 0,2 \cdot 10^{-4}$ 1/м, $\gamma = 5,26$, т. е. $\mu, \varepsilon \sim 0,1$, $\varepsilon_1 \sim 0,01$, $\lambda_1 \sim 1$. Отсюда видно, что μ и ε имеют одинаковые порядки малости, ε_1 — величина второго порядка малости по μ, ε . В диапазоне рабочих скоростей $V_* = 100 \div 300$ м/с дозвуковых самолётов имеем $\lambda V_*^2/g \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$. Представим разложение Маклорена для ρ в виде

$$\rho = \left(1 - \lambda V_*^2 \frac{\Delta h}{g}\right)^{\gamma-1} = 1 - \xi \Delta h + \frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)} (\xi \Delta h)^2 - \dots, \quad (5)$$

где параметр $\xi = (\gamma-1)\lambda V_*^2/g$ может принимать следующие значения:

- I. $\xi \sim \mu \sim \varepsilon \sim 0,1$ для V_* , не превосходящих величин порядка 100 м/с,
- II. $\xi \sim 1$ для V_* , превышающих величины порядка 200 м/с.

В случае I будем рассматривать систему (4), (5) как возмущённую [4, 10] по малым параметрам $\mu, \varepsilon, \varepsilon_1, \xi \ll 1$, в случае II — как возмущённую по малым параметрам $\mu, \varepsilon, \varepsilon_1 \ll 1$.

В соответствии с [4, 10] запишем вырожденные по этим малым параметрам системы, полагая $\mu, \varepsilon, \varepsilon_1, \xi$ или соответственно $\mu, \varepsilon, \varepsilon_1$ равными нулю.

В случае I получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\sin \bar{\theta} + p^T - \frac{1}{K_*} \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{c}_x, & \bar{v} \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= -\cos \bar{\theta} + \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{c}_y, \\ \frac{d\Delta \bar{h}}{dt} &= \bar{v} \sin \bar{\theta}, & \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{v} \cos \bar{\theta}, \\ 0 &= \bar{\omega}, & 0 &= \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{m}_z, \\ \bar{c}_x &= c_x(\bar{\alpha}, \bar{\delta}_B, 0), & \bar{c}_y &= c_y(\bar{\alpha}, \bar{\delta}_B, 0), \\ \bar{m}_z &= m_z(\bar{\alpha}, 0, 0, \bar{\delta}_B, 0, 0), & \bar{\delta}_B &= \delta_B(0, 0, t), & \bar{\rho} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае II вырожденной системой будет

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\sin \bar{\theta} + p^T - \frac{1}{K_*} \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{c}_x, & \bar{v} \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= -\cos \bar{\theta} + \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{c}_y, \\ \frac{d\Delta \bar{h}}{dt} &= \bar{v} \sin \bar{\theta}, & \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{v} \cos \bar{\theta}, \\ 0 &= \bar{\omega}, & 0 &= \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{m}_z, \\ \bar{c}_x &= c_x(\bar{\alpha}, \bar{\delta}_B, 0), & \bar{c}_y &= c_y(\bar{\alpha}, \bar{\delta}_B, 0), \\ \bar{m}_z &= m_z(\bar{\alpha}, 0, 0, \bar{\delta}_B, 0, 0), & \bar{\delta}_B &= \delta_B(0, 0, t), & \bar{\rho} &= \left(1 - \frac{\xi \Delta \bar{h}}{\gamma-1}\right)^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обсудим корректность проделанных предельных переходов от исходной системы (4), (5) к вырожденным системам (6) или (7). Воспользуемся теоремами А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой [4, 10], определяющими условия близости

решений сингулярно возмущённой по малому параметру $\mu \ll 1$ системы общего вида

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y, z, t, \mu), & y(0) &= y_0, \\ \mu \frac{dz}{dt} &= Z(y, z, t, \mu), & z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (8)$$

и вырожденной системы, получающейся из (8) при $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} &= Y(\bar{y}, \bar{z}, t, 0), & \bar{y}(0) &= y_0, \\ 0 &= Z(\bar{y}, \bar{z}, t, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь y, z — векторы произвольной размерности.

Пусть системы (8), (9) удовлетворяют следующим требованиям [4].

1. Функции Y, Z вместе с их частными производными до второго порядка непрерывны при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ в некоторой замкнутой ограниченной области $G = \{\|y\| \leq a, \|z\| \leq b, 0 \leq t \leq t'\}$.
2. Второе, конечное, уравнение вырожденной системы (9) в некоторой ограниченной по y, t области $D \subset G$ имеет изолированный корень $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$.
3. Точка покоя $z = \varphi(y, t)$ «присоединённой» по А. Н. Тихонову системы

$$\frac{dz}{d\tau} = Z(y, z, t, 0) \quad (10)$$

асимптотически устойчива по первому приближению. В системе (10) y, t рассматриваются как постоянные параметры.

4. Начальное условие z_0 принадлежит области влияния асимптотически устойчивого положения равновесия присоединённой системы, т. е. совокупности всех точек, для которых траектории $z(\tau)$ системы (10), взятой при $y = y_0, t = 0, z(0) = z_0$, стремятся к точке $\varphi(y_0, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

А. Б. Васильевой показано, что при выполнении условий 1—4 и достаточно малых значениях малого параметра $0 < \mu \leq \mu'$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|y(t, \mu) - \bar{y}(t)\| &= O(\mu) \quad \text{при } 0 \leq t \leq t' < \infty, \\ \|z(t, \mu) - \bar{z}(t)\| &= O(\mu) \quad \text{при } 0 < t \leq t' < \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Вторая из оценок (11) верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu \ln \mu)$.

Проверим выполнение условий 1—4 для исходной системы (4), (5) и вырожденных систем (6) и (7). Здесь переменным y и z системы (8) соответствуют векторы $(v, \theta, \Delta h, x)$ и (α, ω) , функциям Y и Z — векторы, составленные из правых частей первых четырёх и последних двух уравнений исходной системы; в качестве малого параметра μ в случае I рассматриваются μ, ε, ξ , в случае II — μ, ε одного порядка малости, а также ε_1 второго порядка малости по μ, ε . Условие 1 выполняется очевидным образом. Для проверки условия 2 потребуем разрешимости последнего, конечного, уравнения $0 = \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{m}_z$ обеих вырожденных систем относительно $\bar{\alpha}$. При $\bar{v} \neq 0$ получим

$$\bar{\alpha} = \varphi(\bar{\delta}_B). \quad (12)$$

При $\bar{v} = 0$ выражение для угла атаки не определено, т. е. условие 2 не выполняется, и переход к вырожденным системам неправомерен. Для проверки условия 3 выпишем присоединённую для (4) систему. В силу (10) ею будет

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\tau} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \rho v^2 m_z(\alpha, 0, 0, \delta_b, 0, 0) - \lambda_1 \rho v \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь медленная переменная v и величины ρ , δ_b , зависящие от медленных переменных исходной системы и медленного времени t , в обоих случаях I, II считаются константами, выражения для δ_b и $\partial c_y / \partial \alpha$ вычисляются при $\varepsilon, \mu = 0$. Поскольку на выбранном классе движения $\partial c_y / \partial \alpha > 0$ и $\partial m_z / \partial \alpha < 0$, точка покоя $\alpha = \varphi(\delta_b)$, $\omega = 0$ системы (12) асимптотически устойчива по первому приближению. Следовательно, для начальных условий α_0, ω_0 , принадлежащих линейной зоне характеристик c_y, m_z [2, 3, 8], условие 4 также выполняется.

Таким образом, вырожденные системы (6) и (7) можно считать приближёнными математическими моделями вертикальных манёвров самолёта. Системой (6) следует пользоваться в случаях, когда характерные скорости полёта V_* не превосходят величин порядка 100 м/с, системой (7) — когда V_* превышают величины порядка 200 м/с. Поскольку в рассматриваемой задаче $\varepsilon, \mu \sim 0,1$, то согласно (11) погрешности моделей (6), (7) оцениваются величинами порядка 10 % на конечном интервале безразмерного времени $t \sim 1$.

Рассмотрим, как и в [1, 5], планирующий полёт самолёта с выключенным двигателем ($p^T = 0$) при постоянном угле отклонения руля высоты ($\delta_b = \text{const}$). Первые два уравнения вырожденной системы (6), соответствующей случаю I, образуют независимую подсистему — безразмерный аналог модели Н. Е. Жуковского для планирующего полёта. В случае II выражение для $\bar{\rho}$ в силу вырожденной системы (7) зависит от изменения высоты полёта, т. е. исходное предположение модели Н. Е. Жуковского о постоянстве плотности воздуха неправомерно. Таким образом, моделью Н. Е. Жуковского можно пользоваться в диапазоне сравнительно малых скоростей полёта V_* , не превышающих величин порядка 100 м/с.

Заметим, что временной интервал правомочного использования модели Н. Е. Жуковского может быть расширен от конечного $t \sim 1$, гарантируемого по теореме А. Б. Васильевой, до асимптотически большого $t \sim 1/\mu^\zeta$, где $0 < \zeta < 1/2$. При исследовании прикладных задач с конечным значением параметра μ это означает, что уверенность в точности модели распространяется на более широкий конечный временной интервал. Разумеется, протяжённость обсуждаемых временных интервалов ограничивается условием $H \geq 0$.

Достаточные условия близости решения $y(t, \mu), z(t, \mu)$ системы общего вида (8) к решению $\bar{y}(t), \bar{z}(t)$ вырожденной системы (9) на асимптотически большом при $\mu \rightarrow 0$ интервале времени сформулированы в [6]. Для проверки этих условий требуется оценить норму матрицы Коши для системы в отклонении

ях от решения вырожденной системы, соответствующего начальному условию $\bar{y}(0) = y_0$. Эту оценку чаще всего можно сделать лишь численно.

Однако в случае I можно аналитически выделить область начальных условий y_0 , для которой при всех $\bar{y}(t)$, $\bar{y}(0) = y_0$, справедлива требуемая в [6] оценка нормы матрицы Коши. Это объясняется тем, что в рассматриваемом случае при $p^T = 0$, $\delta_v = \text{const}$ правая часть системы (4), (5) слабо (порядка μ) зависит Δh , в связи с чем вырожденная система (6) распадается по \bar{v} , $\bar{\theta}$ и $\Delta \bar{h}$, \bar{x} на независимые подсистемы.

Рассмотрим сингулярно возмущённую по малому параметру $\mu \ll 1$ систему вида (8) со слабым влиянием части медленных переменных y_2 на остальные y_1, z :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= Y_1(y_1, \mu y_2, z, t, \mu), & y_1(0) &= y_{10}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= Y_2(y_1, \mu y_2, t, \mu), & y_2(0) &= y_{20}, \\ \mu \frac{dz}{dt} &= Z(y_1, \mu y_2, z, t, \mu), & z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Вырожденной для (14) системой будет

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_1}{dt} &= Y_1(\bar{y}_1, 0, \bar{z}, t, 0), & \bar{y}_1(0) &= y_{10}, \\ \frac{d\bar{y}_2}{dt} &= Y_2(\bar{y}_1, 0, t, 0), & \bar{y}_2(0) &= y_{20}, \\ 0 &= Z(\bar{y}_1, 0, \bar{z}, t, 0). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $\bar{z} = \varphi(\bar{y}_1, t)$ — корень конечного уравнения из (15). Предположим, что первое из уравнений (15) после подстановки в него выражения для \bar{z} становится автономным, т. е.

$$\frac{d\bar{y}_1}{dt} = Y_1(\bar{y}_1, 0, \varphi(\bar{y}_1, t), t, 0) \equiv \bar{Y}_1(\bar{y}_1). \quad (16)$$

Утверждение. Будем считать выполненными следующие условия.

- 1°. Функции Y_1, Y_2, Z вместе с их частными производными до второго порядка являются непрерывными и ограниченными по норме при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ в некоторой ограниченной по y_1, y_2, z и полубесконечной по t области

$$G = \{\|y_1 - \bar{y}_1\| \leq a_1, \|y_2 - \bar{y}_2\| \leq a_2, \|z - \bar{z}\| \leq b, t \geq 0\}$$

вблизи решения вырожденной системы (15).

- 2°. Матрица $[\partial Z / \partial z]_{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}, t, 0}^{-1}$ является ограниченной по норме при $t \geq 0$.
 3°. Справедливы условия 3, 4 теоремы Васильевой.
 4°. Дифференциальное уравнение (16) имеет асимптотически устойчивое по первому приближению положение равновесия $\bar{y}_1 = \bar{y}_1^0$, область притяжения которого является некоторая замкнутая область $D_0 \subset G$.

Тогда при достаточно малых значениях параметра $0 < \mu \leq \mu'$ и $y_{10} \in D^0$ найдутся постоянные c_1, c_2 , для которых справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|y(t, \mu) - \bar{y}(t)\| &= O(\mu(c_1 t + c_2)) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{t'}{\mu^\zeta}, \\ \|z(t, \mu) - \bar{z}(t)\| &= O(\mu(c_1 t + c_2)) \quad \text{при } 0 < t \leq \frac{t'}{\mu^\zeta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $y = (y_1, y_2)$, t', ζ — постоянные, задающиеся неравенствами $t' > 0$, $0 \leq \zeta < 1/2$. Вторая из оценок (17) верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu \ln \mu)$.

Доказательство этого утверждения базируется на теоремах из [6]. Условия 1°–3° обеспечивают существование решений исходной и вырожденной систем на бесконечном интервале времени и справедливость оценки (17) на конечном интервале времени. Составим для (15) систему в отклонениях $\Delta \bar{y}_1, \Delta \bar{y}_2$ от её решения $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)$. Воспользовавшись (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \bar{y}_1}{dt} &= A_1(t)\Delta \bar{y}_1, \quad A_1(t) = \left[\frac{\partial \bar{Y}_1(y_1)}{\partial y_1} \right]_{y_1=\bar{y}_1(t)}, \\ \frac{d\Delta \bar{y}_2}{dt} &= A_2(t)\Delta \bar{y}_1, \quad A_2(t) = \left[\frac{\partial Y_2(y_1, 0, t, 0)}{\partial y_1} \right]_{y_1=\bar{y}_1(t)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно [6], для справедливости оценок (17) норма матрицы Коши $U(t, s)$ системы (18) должна удовлетворять неравенству

$$\|U(t, s)\| \leq c, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (19)$$

Здесь c — положительная константа.

Докажем, что для (18) константа c может быть найдена. При выполнении условия 4° для всех $\bar{y}_1(0) = y_{10}$ из области D_0 матрица $A_1(t)$ из (18) при $t \rightarrow \infty$ в пределе стремится к постоянной матрице $A_1^0 = [\partial \bar{Y}_1(y_1)/\partial y_1]_{y_1=\bar{y}_1^0}$, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части. Это обеспечивает существование постоянных $c_1, k > 0$, для которых норма матрицы Коши $U_1(t, s)$ для первого уравнения из (18) удовлетворяет неравенству [6]

$$\|U_1(t, s)\| \leq c_1 e^{-k(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (20)$$

В силу условия 1° и неравенства (20) для нормы матрицы Коши $U_2(t, s)$ второго уравнения из (18) справедливы оценки

$$\|U_2(t, s)\| = \left\| \int_t^s A_1(q)U_1(q, s) dq \right\| \leq M c_1 \int_t^s e^{-k(q-s)} dq < c_2, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Здесь $M = \max_q A_1(q)$, $c_2 = M c_1/k$.

Таким образом, неравенство (19) верно для $c = \max(c_1, c_2)$. Это обеспечивает выполнение оценок (17).

Вернёмся к задаче о планирующем полёте. Рассмотрим случай I. При $p^T = 0$ и $\delta_B = \text{const}$ система (4), (5) имеет вид (14). Здесь переменным y_1, y_2, z отвечают векторы (v, θ) , $(\Delta h, x)$, (α, ω) , функциям Y_1, Y_2, Z — соответствующие векторы правых частей системы (4), (5). При учёте (6), (12) вырожденную для (4), (5) систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\sin \bar{\theta} - \frac{1}{K_*} \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{c}_x, \\ \bar{v} \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= -\cos \bar{\theta} + \bar{\rho} \bar{v}^2 \bar{c}_y, \\ \frac{d\Delta \bar{h}}{dt} &= \bar{v} \sin \bar{\theta}, \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v} \cos \bar{\theta}, \\ \bar{\alpha} &= \varphi(\bar{\delta}_B) = \text{const}, \quad \bar{\omega} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\bar{c}_x = c_x(\varphi(\bar{\delta}_B), \bar{\delta}_B, 0) = \text{const}, \quad \bar{c}_y = c_y(\varphi(\bar{\delta}_B), \bar{\delta}_B, 0) = \text{const}, \quad \bar{\rho} = 1.$$

Покажем, что (4), (5) и (21) удовлетворяют условиям 1°–4° сформулированного утверждения. Проверка условий 1°–3° очевидна. Исследование модели Н. Е. Жуковского, проведённое в [1] для $v \geq 0$, показывает, что независимая система первых двух уравнений из (21) имеет асимптотически устойчивое по первому приближению положение равновесия

$$v^0 = \frac{1}{\sqrt[4]{(\bar{c}_x/K_*)^2 + (\bar{c}_y)^2}}, \quad \theta^0 = -\arctg \frac{\bar{c}_x}{K_* \bar{c}_y} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta^0 < 0\right).$$

К нему стягиваются все решения $\bar{v}(t), \bar{\theta}(t)$, за исключением сепаратрисы, которая входит в точку $\bar{v} = 0, \bar{\theta} = \pi/2$, не лежащую в области определения вырожденной системы. Это означает, что для любых начальных условий v_0, θ_0 , не лежащих на указанной сепаратрисе, условие 4° выполняется, т. е. приближённая модель (21) имеет на асимптотически большом интервале времени погрешность (17). Для начальных условий, лежащих на сепаратрисе, приближённая модель (21) корректна лишь на конечном интервале времени $t \sim 1$ [4].

Полученные выше оценки погрешностей приближённых моделей продольного движения самолёта имеют асимптотический характер и, строго говоря, справедливы при стремлении малых параметров из (4), (5) к нулю. Для фиксированных значений малых параметров погрешности приближённых моделей следует проконтролировать численно.

Численное сравнение исходной и приближённых моделей проводилось для задачи о планирующем полёте при постоянном отклонении руля высоты. Значения параметров системы определены в соответствии с [2, 3, 8]:

$$\begin{aligned} c_y &= \alpha, \quad m_z = -\alpha - \lambda_2 \delta_B + \varepsilon_2 \frac{1}{v} \left(\omega + \lambda_3 \frac{d\theta}{dt} \right), \quad \varepsilon = \mu = 0,1, \\ \varepsilon_1 &= 0,01, \quad \varepsilon_2 = 10\varepsilon_1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,28, \quad \lambda_3 = 0,67, \\ \frac{1}{K_*} &= 0,1, \quad c_x = 1, \quad \lambda = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/м}, \quad \gamma = 5,26, \quad g = 10 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Вычисления выполнены аналогично [11] для начальных условий, отвечающих крейсерскому полёту до начального момента времени, при мгновенном, в момент $t = 0$, отключении двигателя и ступенчатом отклонении на 10 % величины δ_B от равновесного значения $\delta_0 = -1/\lambda_2$: $\delta_B = \delta_0 + 0,1 \cdot \delta_0$. На рис. 2–7 пунктирной линией изображён график решения исходной системы, сплошной — решения вырожденной системы. Через $h = 1 + V_*^2 \Delta h / g H_*$ обозначено нормализованное значение высоты полёта. Исследовалось также влияние изменения плотности воздуха на продольное движение самолёта. На тех же рисунках штрихпунктирной линией изображён график решения системы (4), в которой плотность воздуха полагалась постоянной: $\rho = 1$.

Рис. 2–4 построены при $V_* = 100$ м/с, что отвечает случаю I. Здесь сплошная и штрихпунктирная линии практически совпадают. Это говорит о допустимости предположения о постоянстве плотности воздуха при малых скоростях полёта. Погрешность вырожденной системы — модели Н. Е. Жуковского (21) — отвечает проведённым оценкам. Более того, счёт показывает корректность этой модели за пределами гарантируемого теорией асимптотически большого интервала $t \sim 1/\sqrt{\mu} \sim 3$.

При построении рис. 5–7 принималось $V_* = 250$ м/с. Это отвечает случаю II. Здесь практически совпадают сплошная и пунктирная линии, т. е. оценки погрешности $O(\mu)$ и временного интервала использования $t \sim 1$ вырожденной системы (7) даны с избытком. Видно, что предположение о постоянстве плотности воздуха в случае II некорректно, поскольку отклонения штрихпунктирной линии от сплошной и пунктирной — величины порядка 50 %. Таким образом, влияние изменения плотности воздуха на движение самолёта оказывается существенным уже при характерных скоростях полёта порядка 250 м/с.

Автор благодарит И. В. Новожилова и И. А. Смирнова за помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00759) и программы «Университеты России» (грант УР.04.03.064/04-1).

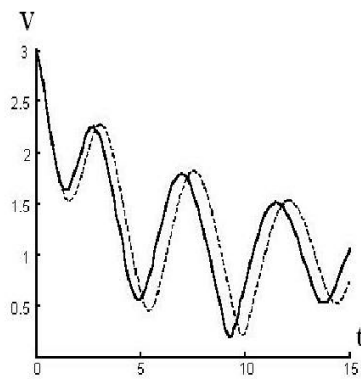


Рис. 2

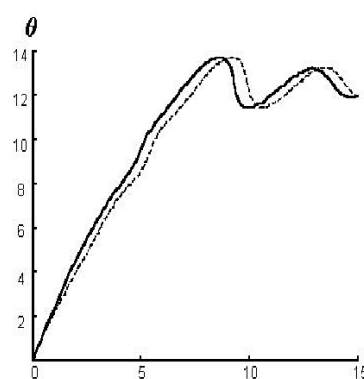


Рис. 3

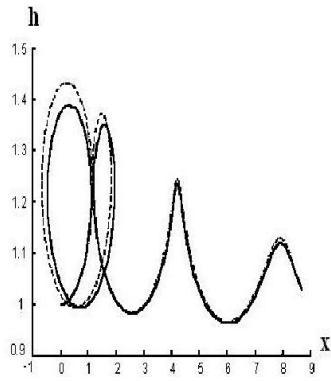


Рис. 4

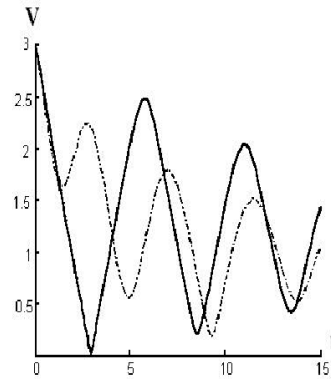


Рис. 5

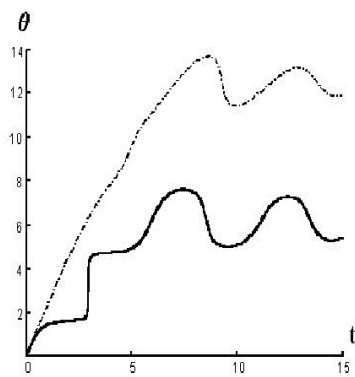


Рис. 6

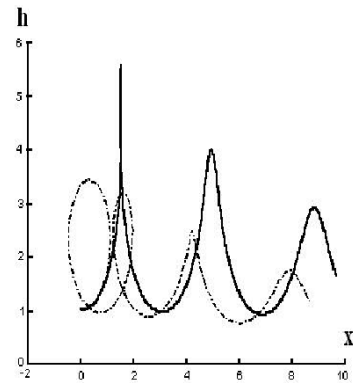


Рис. 7

Литература

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматлит, 1959.
- [2] Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолётов / под ред. Г. С. Бюшгенса. — М.: Наука; Физматлит, 1998.
- [3] Бочкарёв А. Ф., Андреевский В. В., Белоконов В. М. и др. Аэромеханика самолёта. Динамика полёта. — М.: Машиностроение, 1985.
- [4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
- [5] Жуковский Н. Е. О парении птиц // Собр. соч. Т. 4. — Гостехиздат, 1949. — С. 5.
- [6] Кузьмина Р. П. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
- [7] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995.

- [8] Остославский И. В. Аэродинамика самолёта. — М.: Оборонгиз, 1957.
- [9] Седов Л. И. Механика сплошной среды. 5-е изд., испр. Т. 2. — М.: Наука, 1994.
- [10] Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // *Мат. сб.* — 1952. — Т. 31, № 3. — С. 575—586.
- [11] Novozhilov I. V. *Fractional Analysis. Methods of Motion Decomposition.* — Boston: Birkhäuser, 1997.

