

Об аналитическом решении задачи о форме упругого тонкого стержня при сложном нагружении

А. Е. ОРДАНОВИЧ

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

e-mail: orda26@mail.ru

УДК 539.371

Ключевые слова: устойчивость тонкого стержня, сложное нагружение, конфигурация, аналитическое решение.

Аннотация

Известна задача Эйлера об устойчивости тонкого упругого стержня под действием сжимающей силы. В ряде работ эта задача обобщена на определение формы такого стержня при одновременном действии сжимающей силы и скручивающего момента. При этом определение формы сводится к решению сложной нелинейной краевой задачи численными методами. В данной работе рассматривается подход, позволяющий получить аналитическое решение задачи.

Abstract

A. E. Ordanovich, An analytical formula for an elastic thin rod shape under composite loading, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 35–42.

The Euler problem on stability of a thin elastic rod under compressing forces is widely known. In a number of papers this problem is generalized to finding the shape of such a rod at simultaneous action of a compressing force and a torsional moment. The shape is determined by solving of a complex nonlinear boundary value problem by numerical methods. In this paper, an approach providing a full analytical solution of the problem for a broad range of external conditions is discussed.

Задача формулируется следующим образом. Имеется упругий тонкий стержень круглого сечения длины L . Задача рассматривается в системе координат $OXYZ$ с началом в точке O . Нижний конец стержня закреплён в неподвижной точке O при помощи карданова шарнира. На верхнем конце стержня также имеется карданов шарнир, который может перемещаться вдоль оси OZ . К внешнему кольцу карданова шарнира приложены сила Q^0 и момент M^0 , действующие вдоль оси OZ (рис. 1). Натуральная координата s отсчитывается вдоль осевой линии стержня от точки O . Исследуется стационарная форма стержня в зависимости от внешних параметров Q^0 и M^0 .

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 35–42.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*

Издательский дом «Открытые системы»

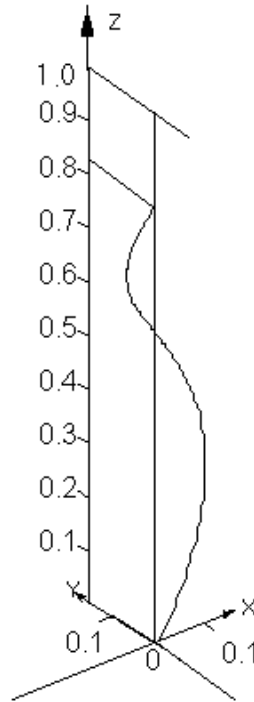


Рис. 1. Трёхмерная конфигурация стержня при сжимающей силе $q = 0,95\pi^2$ и скручивающем моменте $m = 0,5\pi$

Уравнения, описывающие конфигурацию стержня, имеют вид

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial s} = \rho S \frac{\partial^2 \vec{Q}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = [\vec{Q} \times \vec{\tau}], \quad (2)$$

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}. \quad (3)$$

Здесь $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки s осевой линии, t — время, $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ — единичный вектор касательной к этой линии, $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ — вектор внутренних сил и $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$ — вектор внутренних моментов, действующих в сечении s , в проекции на оси $OXYZ$, ρS — масса стержня на единицу длины. Уравнение изгиба для круглого стержня имеет вид

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} = \frac{1}{A} [\vec{M} \times \vec{\tau}], \quad (4)$$

где A — изгибная жёсткость (см., например, [6], где эти уравнения изучаются подробно).

Сформулируем граничные условия. Из постановки задачи следует, что в точке O перемещений нет. Следовательно, $\vec{r}(0) = 0$. Поскольку второй конец стержня ($s = L$) находится на оси OZ , то $[\vec{r}(L) \times \vec{k}] = 0$, где \vec{k} — единичный вектор вдоль оси OZ .

Предполагается, что в точках закрепления стержня (кардановы шарниры в точках $s = 0$ и $s = L$) моменты вдоль осей OX и OY отсутствуют, т. е.

$$[\vec{M}(0) \times \vec{k}] = 0, \quad [\vec{M}(L) \times \vec{k}] = 0.$$

В точке $s = L$ заданы z -компоненты вектора сил $Q_z = Q^0$ и вектора моментов $M_z = M^0$.

Проведём упрощение системы уравнений (1), (2), (3), (4). Будем рассматривать только стационарное состояние стержня. Следовательно, из уравнения (1) следует, что $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial s} = 0$, т. е. $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z) = \text{const}$. Это позволяет проинтегрировать систему уравнений (2) с учётом (3) и граничных условий. В результате имеем

$$\begin{aligned} Q_x = Q_y = 0, \quad Q_z = Q^0, \\ M_x = -Q^0 y, \quad M_y = Q^0 x, \quad M_z = M^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выпишем систему уравнений (4) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} A \frac{d\tau_x}{ds} &= M_y \tau_z - M_z \tau_y, \\ A \frac{d\tau_y}{ds} &= M_z \tau_x - M_x \tau_z, \\ A \frac{d\tau_z}{ds} &= M_x \tau_y - M_y \tau_x. \end{aligned}$$

Учитывая (3) и (5), получим

$$A \frac{d^2 x}{ds^2} = M^0 \frac{dy}{ds} + Q^0 \tau_z x, \quad (6)$$

$$A \frac{d^2 y}{ds^2} = -M^0 \frac{dx}{ds} + Q^0 \tau_z y, \quad (7)$$

$$A \frac{d\tau_z}{ds} = -Q^0 \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right). \quad (8)$$

Уравнения (6) и (7) можно объединить в одно введением комплексной переменной $\hat{u} = x + iy$. В результате получим известное (см., например, [2]) уравнение четвёртого порядка для определения формы упругого стержня

$$A \frac{d^2 \hat{u}}{ds^2} = i M^0 \frac{d\hat{u}}{ds} + Q^0 \tau_z \hat{u}. \quad (9)$$

Уравнение (8) можно привести к виду

$$\frac{d\tau_z}{ds} = -\frac{Q^0}{2A} \frac{d|\hat{u}|^2}{ds}, \quad (10)$$

где $|\hat{u}|^2 = x^2 + y^2$.

Уравнения (9), (10), а также уравнение

$$\frac{dz}{ds} = \tau_z \quad (11)$$

вместе с граничными условиями

$$\hat{u}(0) = 0, \quad \hat{u}(L) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \tau_z(0) = \tau^0 \quad (12)$$

образуют замкнутую систему нелинейных уравнений шестого порядка, описывающих форму стержня при заданных внешних параметрах Q^0 и M^0 . Отметим, что граничное значение τ^0 заранее не известно и должно находиться в процессе решения задачи.

Перейдём к безразмерным переменным, введя масштаб L для переменных x , y , z и s , масштаб $Q_m = A/L^2$ для сил и масштаб $M_m = A/2L$ для моментов. Уравнения (9), (10), (11) примут вид

$$\frac{d^2\hat{u}}{ds^2} = im \frac{d\hat{u}}{ds} + q\tau_z \hat{u}, \quad (13)$$

$$\frac{d\tau_z}{ds} = -\frac{q}{2} \frac{d|\hat{u}|^2}{ds}, \quad (14)$$

$$\frac{dz}{ds} = \tau_z, \quad (15)$$

где $m = M^0/M_m$, а $q = Q^0/Q_m$. За переменными сохранены прежние обозначения.

Для упрощения системы уравнений (13), (14) перейдём к полярным координатам в плоскости OXY :

$$\hat{u}(s) = \rho(s) \exp i\varphi(s). \quad (16)$$

Подставляя это выражение в (14) и приравнивая к нулю действительную и мнимую части, получим

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = (\omega^2 - 2m\omega - q\tau_z)\rho, \quad (17)$$

$$\rho \frac{d\omega}{ds} = 2(m - \omega) \frac{d\rho}{ds}, \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \omega. \quad (19)$$

Уравнение (18) можно проинтегрировать. Единственным нетривиальным решением этого уравнения, с учётом граничных условий, является $\omega = m$. Подставляя это решение в (17), получим

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = (m^2 + q\tau_z)\rho.$$

Соотношение (14) также можно проинтегрировать:

$$\tau_z = \tau^0 - \frac{q}{2}\rho^2.$$

Объединяя последние два выражения, получим

$$\frac{d^2}{ds^2} = \left[m^2 + q \left(\tau^0 - \frac{q}{2}\rho^2 \right) \right] \rho. \quad (20)$$

Кроме того, уравнения (15) и (19) дают

$$\frac{dz}{ds} = \tau^0 - \frac{q}{2}\rho^2, \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = m. \quad (22)$$

Система уравнений четвёртого порядка (20), (21) и (22) имеет четыре граничных условия:

$$\rho(0) = 0, \quad \rho(1) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (23)$$

Отметим, что в этой системе также присутствует заранее неизвестное значение τ^0 , которое должно находиться в процессе решения задачи, причём

$$\tau^{02} + \left(\frac{d\rho}{ds}(0) \right)^2 = 1. \quad (24)$$

Система уравнений (20), (21), (22) и (23), так же как и система уравнений (9), (10), (11) и (12), является замкнутой системой уравнений, описывающих форму стержня при заданных внешних параметрах q и m . Поскольку решение уравнений (21) и (22) сводится к простому интегрированию, то определение конфигурации стержня сводится к решению нелинейной краевой задачи второго порядка (20) с тривиальными граничными условиями и определению параметра τ^0 .

Уравнение (20) допускает дальнейшее понижение порядка. Умножая это уравнение на производную $d\rho/ds$ и выполняя необходимые преобразования, имеем

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 - (m^2 + q\tau^0)\rho^2 + \frac{q^2}{4}\rho^4 \right] = 0. \quad (25)$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что $\rho(0) = 0$ при $s = 0$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\rho(s)$:

$$\left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 = \left(\frac{d\rho}{ds}(0) \right)^2 \left[(m^2 + q\tau^0) - \frac{q^2}{4}\rho^2 \right] \rho^2. \quad (26)$$

При этом значения производной $d\rho/ds$ при $s = 0$ и параметра τ^0 связаны соотношением (24).

Параметр τ^0 может быть определён из условия удовлетворения решения уравнения (26) второму граничному условию $\rho(1) = 0$. Таким образом, решение исходной задачи шестого порядка свелось к решению краевой задачи первого порядка и определению одной неизвестной константы τ^0 .

Решение уравнения (20) (или (26)) может быть найдено, вообще говоря, аналитически, в эллиптических функциях.

Точное решение уравнений (26), (27) (или уравнения (20)) в элементарных функциях является достаточно трудной задачей. Поэтому для решения задачи о форме стержня естественно воспользоваться приближёнными методами типа Бубнова—Галёркина, которые позволяют проводить аналитические исследования решений исходной задачи. Например, можно искать приближённое решение в виде конечного ряда Фурье

$$\tilde{r} = \sum_{n=1}^{n=N} D_n \sin \pi n s, \quad (27)$$

каждый из членов которого удовлетворяет граничным условиям. В силу гладкости исходных дифференциальных операторов можно в ряде случаев предполагать достаточно быструю сходимость соответствующих рядов.

Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда решение аппроксимируется только первым членом ряда Фурье:

$$\tilde{r} = D \sin \pi s. \quad (28)$$

Подставляя выражение (28) в уравнение (20) с учётом (24) и применяя обычную процедуру метода Бубнова—Галёркина, получим уравнение для определения амплитуды D в зависимости от параметров m и q :

$$m^2 - \pi^2 = q \left(\sqrt{1 - \pi^2 D^2} - \frac{3q}{16} D^2 \right). \quad (29)$$

При $D = 0$ это уравнение даёт известную границу устойчивости для стержня при сложном нагружении:

$$m^2 - q = \pi^2. \quad (30)$$

Решение уравнения (29) имеет вид

$$D^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{q_*(q_* + q\mu)}{2q^2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{q^2 - \mu^2}{(q_* + 2\mu)^2}} - 1 \right), \quad (31)$$

где $q_* = \frac{16}{3}\pi^2$ и $\mu = m^2 - \pi^2$.

Из уравнения (24) определяется параметр

$$\tau^0 = \delta \sqrt{1 - \pi^2 D^2}, \quad (32)$$

где $\delta = \text{sign}(q - q_1)$, $q_1 = -\sqrt{-\mu q_*}$.

На рис. 2 показана зависимость величин $D = D(m, q)$ и $\tau^0 = \tau^0(m, q)$ от сжимающей силы q при двух значениях момента m ($m = 0$ и $m = 0,5\pi$).

Знание параметров D и τ^0 позволяет получить параметрические зависимости координат осевой линии стержня $x(s)$, $y(s)$ и $z(s)$, которые описывают его

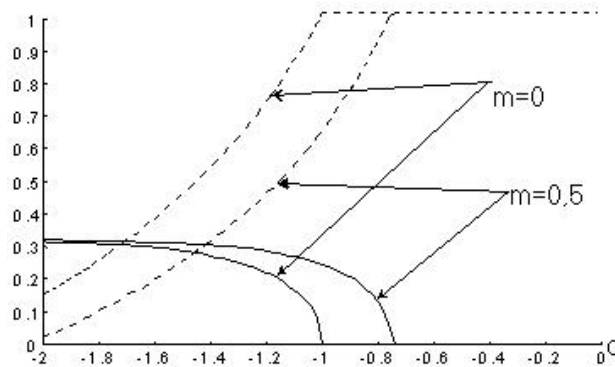


Рис. 2. Зависимость амплитуды D (сплошная линия) и параметра τ^0 от сжимающей силы q при $m = 0$ и $m = 0,5$

пространственную форму:

$$\begin{aligned} x(s) &= D \sin \pi s \cdot \cos(ms + \varphi_0), \\ y(s) &= D \sin \pi s \cdot \sin(ms + \varphi_0), \\ z(s) &= \left(\tau^0 - \frac{q}{4} D^2 \right) s - \frac{D^2}{4\pi} \sin 2\pi s. \end{aligned} \quad (33)$$

Пространственная форма стержня показана на рис. 1 при $q = -0,95\pi^2$, $m = 0,5\pi$.

Заметим, что приведённые расчёты при учёте одного члена ряда (28) имеют смысл только при малом превышении значениями параметров q и m своего критического уровня. Это превышение (см. (30)) можно оценить выражением $\varepsilon = \frac{m^2 - q}{\pi^2} - 1$. Если $\varepsilon > 1$, то ошибки аппроксимации возрастают и необходимо учитывать больше членов ряда (27).

Литература

- [1] Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. — Киев: Наукова думка, 1979.
- [2] Лось М. В., Орданович А. Е. Определение формы гибкого стержня при осевом сжатии и кручении // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1994. — № 5. — С. 48—54.
- [3] Лось М. В., Орданович А. Е. Анализ процесса образования петли на гибком стержне // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1998. — № 3. — С. 62—65.
- [4] Лось М. В., Орданович А. Е. Определение условий образования петли на гибком стержне // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 6. — С. 33—37.

- [5] Николаи Е. Л. Труды по механике. — М.: Гостехиздат, 1955.
- [6] Светлицкий В. А. Механика стержней. Т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1987.