

Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды

В. А. САМСОНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: samson@imec.msu.ru

Ю. Д. СЕЛЮЦКИЙ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: seliutski@imec.msu.ru

УДК 531.36

Ключевые слова: пластина в потоке, сопротивляющаяся среда, нормальная сила, колебания, моделирование, эксперимент, сравнение.

Аннотация

В работе предложена конечномерная феноменологическая модель нестационарного взаимодействия пластины с потоком среды. Предполагается, что тело совершает поступательное движение поперёк потока. Внутренняя динамика потока среды моделируется присоединённой динамической системой второго порядка. Показано, что модель позволяет обеспечить удовлетворительное согласие с экспериментальными данными. С использованием разработанной модели рассмотрена обратная задача динамики для ситуации, когда пластина, совершавшая равномерное поступательное движение, в некоторый момент времени начинает равномерное торможение и останавливается. Показано, что при достаточно большом значении ускорения пластины на некотором промежутке времени среда не сопротивляется движению пластины, а, напротив, «разгоняет» её. Показано, что уравнения движения в рамках предложенной модели можно привести к интегродифференциальному виду, и проведено сравнение с известной моделью С. М. Белоцерковского. Отмечено структурное сходство уравнений динамики тела в потоке, возникающих в этих моделях. Проведено исследование вопроса об области применимости квазистатической модели.

Abstract

V. A. Samsonov, Yu. D. Seliutski, Phenomenological model of interaction of plate with a flow, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 43–62.

In the present paper, a finite dimensional phenomenological model of unsteady interaction of a rigid plate with a flow is proposed. It is assumed that the plate performs translational motion across the flow. The internal dynamics of the flow is modeled by the attached second order dynamical system. It is shown that the model allows satisfactory agreement with experimental data. With the developed model an inverse problem of dynamics is examined for the situation, where the plate performing uniform translational motion at some moment begins uniform deceleration and finally stops. It is shown that for sufficiently large value of the plate acceleration for some time range the flow does not resist the motion of the plate, but “accelerates” it. It is shown also that the equations

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 43–62.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

of motion in the context of the proposed model can be reduced to the integro-differential form, and comparison with the known model of S. M. Belotserkovsky is performed. Structural resemblance of the motion equations for body in flow in both models is marked. The domain of applicability of the quasi-stationary model is examined.

Введение

Рассматривается базовая задача прикладной аэромеханики — тонкое крыло конечного размаха, совершающее в потоке воздуха поступательное движение в направлении, перпендикулярном вектору скорости набегающего потока. Задача прозрачна по постановке, но теоретическая гидромеханика не может предложить её решение даже для такого случая, когда крыло движется с малой скоростью (порядка десятой доли от скорости потока). Поставить эту задачу математически строго как задачу о малых движениях крыла и воздуха около некоторого невозмущённого состояния u_* (...) согласно уравнениям Навье—Стокса никому ещё не удалось. При тех числах Рейнольдса, которые интересны для практики, ламинарное обтекание заведомо неустойчиво, а тот режим, который следует принять за u_* , не поддаётся аналитическому описанию. Более того, неясно даже, стационарно или нестационарно поле скоростей u_* . Все известные аналитические построения соответствующего оператора нестационарной линейной задачи о малых колебаниях крыла представляют собой попытки обойти эту трудность за счёт эвристики или эмпирики.

Экспериментальная аэромеханика нашла выход в том, что уже свыше ста лет измеряет в трубах значения (как оказалось, практически стационарные) аэродинамических сил. Кроме того, свыше 60 лет такие измерения проводятся и для крыльев, совершающих заданное движение (в частности, гармонические колебания).

Примерно 35 лет назад С. М. Белоцерковский [2] разработал линейное интегродифференциальное представление (тоже эмпирического типа) для аэродинамических сил, которое было использовано при решении многих задач и дало пищу для многих теоретических публикаций.

Сильно, однако, желание построить хоть какие-нибудь «простые», обозримые аналитические модели процессов, происходящих в возмущённом потоке воздуха, да ещё и малопараметрические. Около тридцати лет развивается линия нелинейного «жидкого осциллятора» — неплохого эмпирического аналитического описания аэродинамических сил, действующих со стороны потока на «плохо обтекаемое» тело. По ряду причин нелинейный «жидкий осциллятор» нельзя приспособить к задаче о крыле в условиях относительно «хорошего» обтекания.

В последнее время появились работы, в которых тем или иным способом конструируется система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно некоторых фазовых переменных, которые призваны «отражать» состояние внутреннего движения среды (в отечественной литературе первая такая попытка, по-видимому, предпринята в [1]). Обычно в качестве таких переменных фигурируют составляющие самой аэродинамической силы или даже

их производные. По этой причине трудно дать механическую интерпретацию предложенных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В механике нет ещё правил, по которым бы создавались начальные условия для сил и их производных по времени. В механике можно обеспечить начальное положение x_0 и начальные скорости \dot{x}_0 объектов. Если известна зависимость сил $F(x, \dot{x})$, то начальное значение $F_0 = F(x_0, \dot{x}_0)$ ещё можно вычислить, но для \dot{F}_0 нужно привлекать уже сами уравнения движения.

С 2000 года авторы разрабатывают оригинальную механико-математическую модель внутренней динамики потока среды [5–9]. Используя фундаментальное понятие — «количество движения» — и следуя правилам теоретической механики, авторы ввели традиционные для механики фазовые координаты. При этом пришлось отказаться от весьма распространённого стереотипа, что «присоединённую массу (жидкости, воздуха) нельзя отрывать от тела». Отметим, что «присоединённая масса» — не физическая величина, которую можно пощупать, взвесить, непосредственно измерить и т. п. «Присоединённая масса» — это понятие, вводимое для интегрального описания течения жидкости. Оно связано с количеством движения, числовое значение которого всегда можно представить в виде произведения некоторой массы m на некоторую скорость V_c , т. е. $K_c = mV_c$. В частном случае идеальной жидкости, совершающей потенциальное (безвихревое) течение, $V_c \equiv V_T$, так как с остановкой тела «останавливается» и жидкость. В иных случаях возникает определённый произвол в исчислении количества движения.

Если принять, в соответствии со стереотипом, $V_c \equiv V_T$, то, как хорошо известно, масса будет зависеть от течения жидкости и перестанет играть роль параметра. Но это ещё полбеды. Когда же тело останавливается, $V_T = 0$, количество движения жидкости по стереотипу тоже должно обратиться в нуль, что, очевидно, противоречит здравому смыслу.

Более продуктивен отказ от стереотипа, т. е. $V_c \neq V_T$. В этом случае за классической присоединённой массой остаётся традиционная роль постоянного параметра и в «неклассических» задачах. Разность $V_c - V_T$ можно трактовать как меру отличия «реального» потока от упомянутого выше частного случая.

Отметим, что в некоторых разделах техники приём, заключающийся в определении параметров линейной системы (масс, коэффициентов жёсткости и т. п.) по её отклику на заданное гармоническое воздействие, положен в основу вибрационной диагностики.

1. Постановка задачи и конструирование модели

1.1. Описание механической системы

Предположим, что твёрдое тело может совершать возвратно-поступательное движение вдоль неподвижной прямой L (рис. 1). Пусть это тело имеет форму прямоугольной плоской тонкой пластины $ABCD$. Пусть кромка AB пластины

перпендикулярна прямой L . Введём неподвижную систему координат $OXYZ$, начало которой поместим в некоторую точку прямой, вдоль которой движется центр масс пластины. Ось OX направим вдоль прямой L , ось OZ — параллельно кромке AB .

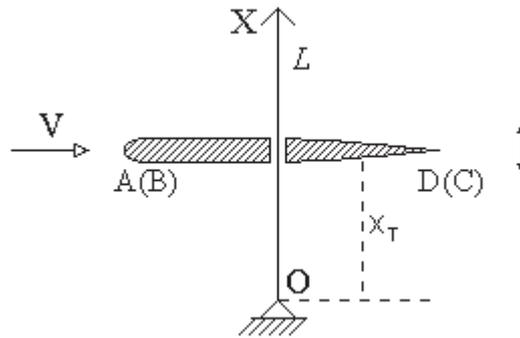


Рис. 1

Предположим, что плоскость пластины параллельна плоскости YZ . В качестве обобщённой координаты выберем абсциссу x_T центра масс пластины.

Пусть пластина помещена в поток среды, скорость V которого на бесконечности постоянна и параллельна оси OY . Обозначим через N проекцию на ось абсцисс силы, с которой поток действует на пластину. Тогда уравнение движения пластины в проекции на ось Ox имеет следующий вид:

$$M\ddot{x}_T = F_x + N, \quad (1.1)$$

где M — масса пластины, а F_x — внешняя сила, не связанная со средой (например, вынуждающая сила, обеспечивающая поддержание заданного режима движения, или возвращающая сила).

Нашей задачей является построение такой модели взаимодействия потока с пластиной, которая бы позволила описать силу N более точно, чем квазистатическая.

1.2. Внутренние координаты потока

Одним из базовых понятий теоретической механики является понятие «количество движения». Используем его при построении модели. Введём в рассмотрение проекцию K_{cx} количества движения среды на ось OX («поперёк потока», в направлении движения пластины). Запишем для потока среды уравнение теоремы об изменении количества движения в проекции на эту ось:

$$\frac{dK_{cx}}{dt} = -N + R_\infty, \quad (1.2)$$

где R_∞ — реакция бесконечно удалённой границы, обеспечивающая невозмущаемость потока среды на бесконечности.

Как известно, для безвихревого течения идеальной жидкости выполняется соотношение

$$K_{cx} = m\dot{x}_T,$$

где m — известная из гидродинамики присоединённая масса. В случае, когда среда совершает вихревое движение или (и) обладает внутренней диссипацией, это соотношение не выполняется. Данное обстоятельство даёт нам основание ввести новую фазовую координату $\dot{\eta}$ по формуле

$$K_{cx} = m(\dot{x}_T + \dot{\eta}).$$

Величина $\dot{\eta}$, в принципе, может быть вычислена в каждый момент времени, если известно мгновенное распределение скоростей движущейся среды.

Ясно, что состояние потока среды как механической системы описывается с помощью бесконечного набора фазовых координат. Таким образом, новая фазовая координата $\dot{\eta}$ может служить интегральной мерой отличия состояния среды от состояния, имеющего место для случая идеальной жидкости.

Поскольку $\dot{\eta}$ имеет смысл относительной скорости, то за соответствующую координату — «положение» — естественно принять величину

$$\eta = \eta_0 + \int_0^t \dot{\eta} dt. \quad (1.3)$$

Отметим, что вводимая таким образом характеристика положения («внутренняя координата потока») отличается от традиционных для теоретической механики. Во-первых, она недоступна непосредственному измерению, так как интеграл (1.3) зависит от истории движения среды. Во-вторых, начальное значение η_0 в общем случае неопределённо.

Однако, как известно, неизмеряемая величина может быть наблюдаемой, т. е. её значение в любой момент времени (в том числе и в начальный) может быть восстановлено по данным о тех координатах, которые доступны измерению (в первую очередь, x_T и \dot{x}_T). Кроме того, в случае, когда стационарный поток обтекает (достаточно долго) неподвижную пластину, расположенную вдоль него, естественно считать, что не только $\dot{\eta} \equiv 0$, но и $\eta \equiv 0$.

Предположение 1. Попробуем при построении модели вместо бесконечного набора фазовых координат потока среды ограничиться всего двумя вышеуказанными: η и $\dot{\eta}$.

При таком подходе поток среды, обладающий, вообще говоря, бесконечным числом степеней свободы, заменяется объектом с одной степенью свободы. Соответственно, взаимодействие потока с пластиной заменяется взаимодействием этого «присоединённого» объекта с пластиной.

1.3. Уравнения движения

Обсудим силы, действующие на рассматриваемую механическую систему, и составим уравнения движения (ограничиваясь проекцией на ось X).

На присоединённую динамическую систему действуют следующие силы: сила $-N$ со стороны пластины и сила R_∞ — реакция бесконечно удалённой границы, обеспечивающая невозмущаемость потока среды на бесконечности.

Вообще говоря, определяемые в результате весовых измерений в аэродинамических трубах силы в аэромеханике принимают зависящими от квадрата скорости V потока. Однако, приняв ширину пластины (хорду крыла) в качестве единицы длины, можно выбрать такой масштаб времени, чтобы выполнялось равенство $V = 1$. Тогда параметры M , m , силы F_x , R_∞ , N и координаты x_T , \dot{x}_T , η , $\dot{\eta}$ окажутся соответствующим образом нормированными и безразмерными. Отметим, что в результате такой процедуры обезразмеривания N будет иметь традиционный для гидроаэродинамики смысл коэффициента нормальной силы C_n .

Как известно, механические системы, имеющие асимптотически устойчивые положения равновесия или стационарные движения, на достаточно малое гармоническое возмущение дают гармонический же отклик (вообще говоря, с другими амплитудой и фазой). Поэтому сделаем ещё одно предположение.

Предположение 2. Величины N и R_∞ в случае малых движений пластины будем считать линейными функциями фазовых координат системы: x_T , \dot{x}_T , η , $\dot{\eta}$.

При этом, очевидно, сила N , описывающая взаимодействие между пластиной и потоком, может зависеть только от «относительных» положения и скорости — η и $\dot{\eta}$. Кроме того, сила R_∞ не может зависеть от положений (так как поток однороден, а его граница находится на бесконечности). Таким образом,

$$N = k\eta + h\dot{\eta}, \quad R_\infty = -B(\dot{x}_T + \dot{\eta}) + A\dot{\eta}. \quad (1.4)$$

Здесь k и h — безразмерные коэффициенты жёсткости и демпфирования, характеризующие взаимодействие между пластиной и присоединённым объектом, который с учётом принятой структуры сил естественно называть присоединённым осциллятором.

С учётом изложенного уравнения (1.1), (1.2) движения системы «пластина + присоединённый осциллятор» примут вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_T &= F_x + k\eta + h\dot{\eta}, \\ m(\ddot{x}_T + \ddot{\eta}) &= -k\eta - (h + B - A)\dot{\eta} - B\dot{x}_T. \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.4. О коэффициентах модели

Таким образом, в предложенной модели имеется пять коэффициентов, описывающих характеристики взаимодействия потока с крылом.

Попробуем прояснить смысл коэффициента B . Для этого рассмотрим случай равномерного движения пластины $\dot{x}_T \equiv \dot{x}_{T0}$. При этом из (1.5) следует

$$\begin{aligned} F_x &= -(k\eta + h\dot{\eta}), \\ m\ddot{\eta} &= -k\eta - (h - A)\dot{\eta} - B(\dot{x}_{T0} + \dot{\eta}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Эта система допускает для η и F_x стационарное решение

$$\eta = -\frac{B\dot{x}_{T0}}{k}, \quad F_x = B\dot{x}_{T0}.$$

Заметим, что при таком движении пластины сила F_x оказывается не только вынуждающей (реакцией наложенной связи), но и обычно измеряемой в статических экспериментах величиной. Следовательно, введённый нами коэффициент B представляет собой традиционный для аэромеханики параметр, так называемую производную соответствующего коэффициента аэродинамической силы по углу атаки, который традиционно обозначают C_n^α (мы в дальнейшем также будем использовать это обозначение). Как известно, C_n^α зависит от удлинения крыла и параметров потока (числа Рейнольдса, числа Маха и т. п.).

Как уже говорилось выше, значение массы присоединённого осциллятора мы положим равным величине присоединённой массы плоской пластины для случая безвихревого течения идеальной жидкости. Из гидродинамики известно, что она зависит от удлинения пластины (т. е. от соотношения её длины и ширины). Тогда значения коэффициентов m и C_n^α будут вполне определёнными, если известны размеры и стационарные аэродинамические характеристики пластины. Оставшиеся коэффициенты k , h и A подлежат эмпирическому определению.

1.5. Интегриродифференциальная форма уравнений движения

Как известно, система (1.5) может быть единственным образом «свёрнута» в одно интегриродифференциальное уравнение относительно переменной $x_T(t)$. Для этого второе уравнение системы (1.5) будем рассматривать как неоднородное уравнение относительно переменной $\eta(t)$:

$$m\ddot{\eta} + (h + C_n^\alpha - A)\dot{\eta} + k\eta = f(t) = -m\ddot{x}_T - C_n^\alpha \dot{x}_T. \quad (1.7)$$

Общее решение этого уравнения методом вариации произвольных постоянных представим в виде

$$\begin{aligned} \eta(t) &= m \frac{-\eta_0 \lambda_2 + \dot{\eta}_0}{\sigma} e^{\lambda_1 t} + m \frac{\eta_0 \lambda_1 - \dot{\eta}_0}{\sigma} e^{\lambda_2 t} + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^2 \int_0^t (-1)^i (m\ddot{x}_T(\tau) + C_n^\alpha \dot{x}_T(\tau)) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\sigma = \sqrt{(h + C_n^\alpha - A)^2 - 4km}$, а λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения для (1.7). Очевидно, что при $h + C_n^\alpha - A > 0$ имеем $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$.

После подстановки (1.8) в первое уравнение системы (1.5) и интегрирования по частям получим

$$M\ddot{x}_T = N(t) + F, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned}
N(t) = C_n(t) = & -C_n^\alpha \dot{x}_T - \left(m - \frac{C_n^\alpha}{k} (C_n^\alpha - A) \right) \ddot{x}_T + \\
& + \eta_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k(k/\lambda_i + h)}{\sigma} e^{\lambda_i t} - \dot{\eta}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{m(k + h\lambda_i)}{\sigma} e^{\lambda_i t} + \\
& + C_n^\alpha \dot{x}_{T_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t} + \ddot{x}_{T_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(m + \frac{C_n^\alpha}{\lambda_i} \right) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t} - \\
& - \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(m + \frac{C_n^\alpha}{\lambda_i} \right) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} \int_0^t \ddot{x}_T e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau. \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Здесь $\dot{x}_{T_0} = \dot{x}_T|_{t=0}$, $\ddot{x}_{T_0} = \ddot{x}_T|_{t=0}$.

Отметим, что (1.10) содержит слагаемые, зависящие от мгновенного состояния системы, и слагаемые, связанные с предысторией. Видно, что собственно начальные условия движения тела и присоединённого осциллятора «забываются» с экспоненциальной скоростью.

Первое слагаемое в выражении для силы, очевидно, имеет квазистатическую природу, так как для традиционно принятого в аэромеханике мгновенного угла атаки в линейном приближении имеем $\alpha = -\dot{x}_T$. Второе слагаемое отражает как наличие у потока инерционных свойств, так и введённую в экспериментальной аэромеханике зависимость нормальной силы от $\dot{\alpha}$.

Замечание. Строго говоря, (1.9) представляет собой двухпараметрическое семейство интегродифференциальных уравнений, в котором роль параметров играют величины η_0 и $\dot{\eta}_0$. Поскольку само (1.9) содержит в качестве неизвестной лишь функцию $x_T(t)$, то, вообще говоря, априори неясно, откуда следует брать значения этих параметров.

2. Сравнение с моделью Белоцерковского

2.1. Моделирование подъёмной силы с помощью интеграла Дюамеля

В [1] предложено моделировать воздействие потока на колеблющееся крыло с помощью интеграла Дюамеля с ядром в виде суммы экспоненциальных функций времени, показатели которых определялись в ходе численных экспериментов.

В рамках этой модели зависимость коэффициента подъёмной силы от времени в случае поступательного движения тела имеет вид

$$C_y(t) = -\dot{x}_{T_0} H(t) - \int_0^t H(t-\tau) \ddot{x}_T(\tau) d\tau. \tag{2.1}$$

Здесь предполагается, что $\dot{x}_T(t)|_{t<0} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{x}_T = \dot{x}_{T0}$. Ядро интеграла имеет вид

$$H(t) = C_y^\alpha + \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}.$$

В этом случае уравнение движения пластины запишется таким образом:

$$M\ddot{x}_T = -\dot{x}_{T0}H(t) - \int_0^t H(t-\tau)\ddot{x}_T(\tau) d\tau + F. \quad (2.2)$$

Путём несложных преобразований выражение для C_y можно привести к следующей форме:

$$C_y = -\dot{x}_T C_y^\alpha + \ddot{x}_T \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} - \dot{x}_{T0} \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} - \\ - \ddot{x}_{T0} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} - \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i(t-\tau)} \ddot{x}_T(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Тогда уравнение (2.2) с учётом (2.3) примет следующий вид:

$$M\ddot{x}_T = -\dot{x}_T C_y^\alpha + \ddot{x}_T \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} - \dot{x}_{T0} \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} - \\ - \ddot{x}_{T0} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} - \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\lambda_i} e^{\lambda_i(t-\tau)} \ddot{x}_T(\tau) d\tau + F. \quad (2.4)$$

Сравним его с (1.9). Видно, что структура этих выражений весьма близка. Однако в (2.4) отсутствуют, так сказать, «начальные возмущения» по содержащимся в ядре экспонентам (иначе говоря, по возмущениям потока среды). Таким образом, (2.4), в отличие от (1.9), не является семейством уравнений.

2.2. Сопоставление коэффициентов

В уравнениях типа (2.4) можно с помощью регулярной процедуры производить последовательное исключение экспонент ядра. При этом порядок уравнения каждый раз будет увеличиваться на единицу. Если в ядре всего N экспонент, то в результате применения процедуры исключения получится обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $N + 2$.

В процессе обработки некоторых данных авторы [1] установили, что для достижения вполне приемлемой аппроксимации отклика среды достаточно учитывать лишь две экспоненты ядра. Тогда в предположении, что внешняя сила F

является упругой силой со стороны крепления, т. е. $F = -\varkappa x_T - \delta \dot{x}_T$, уравнение (2.4) можно привести к виду

$$\begin{aligned} Mx_T^{(IV)} + (\delta + C_n^\alpha - (\lambda_1 + \lambda_2)M - c_1 - c_2)\ddot{x}_T + \\ + (\varkappa - (\lambda_1 + \lambda_2)(\delta + C_n^\alpha) + M\lambda_1\lambda_2 + c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1)\dot{x}_T + \\ + (-\varkappa(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(\delta + C_n^\alpha))x_T + \lambda_1\lambda_2\varkappa x_T = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что не все траектории уравнения (2.5) являются решениями уравнения вида (2.4).

Систему (1.5), очевидно, также можно представить в форме обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка. При сделанном предположении относительно структуры силы F оно будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} Mx_T^{(IV)} + \frac{m\delta + mh - AM + hM + C_n^\alpha M}{m}\ddot{x}_T + \\ + \frac{km + kM + m\varkappa - \delta A + h\delta + C_n^\alpha h + C_n^\alpha \delta}{m}\dot{x}_T + \\ + \frac{h\varkappa + k\delta + C_n^\alpha \varkappa - A\varkappa + kC_n^\alpha}{m}x_T + \frac{k\varkappa}{m}x_T = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ясно, что уравнения (2.5) и (2.6) должны совпадать для любых значений M , \varkappa и δ . Из этого условия получаем соотношения, связывающие коэффициенты модели [1] с коэффициентами предложенной модели (отметим, что количество коэффициентов, описывающих среду, в обеих моделях совпадает и равно четырём):

$$\begin{aligned} m^2\lambda_1\lambda_2 + [C_n^\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) - c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1]m + C_n^\alpha(C_n^\alpha - c_1 - c_2) = 0, \\ k = m\lambda_1\lambda_2, \quad h = C_n^\alpha - c_1 - c_2, \\ A = m(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C_n^\alpha + c_1 + c_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и обратно:

$$\begin{aligned} m\lambda_i^2 + (C_n^\alpha + h - A)\lambda_i + k = 0 \quad (i, j = 1, 2, \quad i \neq j), \\ c_i = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \left(k - (C_n^\alpha - A)\frac{C_n^\alpha}{m} - (C_n^\alpha + h)\lambda_i \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, обе рассматриваемые модели оказываются структурно взаимно эквивалентными. Однако если из системы (2.6) можно однозначно восстановить коэффициенты $c_{1,2}$, $\lambda_{1,2}$ ядра, то из системы (2.5) получаются два набора коэффициентов (m, k, h, A) .

3. Идентификация параметров присоединённого осциллятора

Теперь наша задача состоит в том, чтобы подобрать значения параметров k , h и A таким образом, чтобы результаты расчётов по предложенной схеме

удовлетворительно описывали поведение нормальной силы в доступных экспериментах.

Экспериментальные данные по поступательным колебаниям крыла приведены, в частности, в [3, 4, 10, 11]. Во всех этих работах изучались вынужденные гармонические поступательные колебания крыла в потоке среды в направлении, перпендикулярном направлению потока. В системе отсчёта, связанной с потоком, координата x_T изменялась со временем по следующему закону:

$$x_T(t) = a \cos \Omega t \quad (3.1)$$

(здесь Ω — безразмерная частота, называемая также числом Струхала). Тогда мгновенный угол атаки α , определяемый как угол между скоростью профиля относительно потока и хордой, будет определяться следующей формулой:

$$\alpha \approx a\Omega \sin \Omega t.$$

При этом зависимость коэффициента нормальной силы от времени будет иметь следующий вид:

$$C_n(t) = A_n \sin \Omega t + B_n \cos \Omega t + f_n(t),$$

где в $f_n(t)$ входят гармоники более высокого порядка. Эксперименты показывают, что коэффициенты при этих гармониках невелики и ими можно пренебречь, по крайней мере для не слишком больших чисел Струхала ($\Omega < 2$). Отметим, что проявление гармоник высших порядков свидетельствует о нелинейности рассматриваемого процесса, и в этой ситуации предлагаемая линейная модель, естественно, требует уточнений. Нашей целью в дальнейшем будет аппроксимация именно первой гармоники.

Примем за опорные эксперименты [3] и [4]. Они производились в воде (крылья буксировались), профиль крыла был симметричным — NACA0015. В [3] использовались крылья с удлинением 2 ($C_n^\alpha = 2,8$, $m = 1,17$) и 4 ($C_n^\alpha = 3,6$, $m = 1,37$), значение параметра Ω изменялось в диапазоне от 0,3 до 2,3. В одной серии экспериментов амплитуда a была 0,2, во второй $a = 0,286$. В [4] использовались крылья с удлинением 3 ($C_n^\alpha = 3,8$, $m = 1,3$) и 5 ($C_n^\alpha = 4,5$, $m = 1,41$). Амплитуда a колебаний изменялась от 0,045 до 0,35. Значение параметра Ω лежит в пределах от 0,2 до 1,8.

Подставим зависимость (3.1) в уравнение (1.5). Заметим, что, поскольку в экспериментах измеряется именно величина вынуждающей силы, в которую затем вносятся поправки, связанные с наличием у пластины инерционных свойств, из первого уравнения системы 1.5 получим аппроксимационную формулу для экспериментальной зависимости нормальной силы от времени $N_{\text{appr}}(t)$:

$$N_{\text{appr}}(t) = -F - M\ddot{x}_T = k\eta + d\dot{\eta}. \quad (3.2)$$

Учитывая зависимость положения пластины от времени, из второго уравнения системы (1.5) получим

$$\begin{aligned}
N_{\text{appr}}(t) &= \\
&= a\Omega \frac{-km\Omega^2 A + C_n^\alpha k^2 + h\Omega^4 m^2 + h\Omega^2 C_n^{\alpha 2} + h^2\Omega^2 C_n^\alpha - h\Omega^2 C_n^\alpha A}{(k - m\Omega^2) + (h + C_n^\alpha - A)^2\Omega^2} \sin(\Omega t) - \\
&- a\Omega^2 \frac{k\Omega^2 m^2 + kC_n^{\alpha 2} - kAC_n^\alpha - k^2 m + hm\Omega^2 A - m\Omega^2 h^2}{(k - m\Omega^2) + (h + C_n^\alpha - A)^2\Omega^2} \cos(\Omega t). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Очевидно, что для каждого отдельного эксперимента задача выбора значений параметров k , h , A разрешима, так как необходимо обеспечить совпадение всего двух коэффициентов — A_n и B_n . Попытки описать все наличные эксперименты с помощью единого набора параметров привели к ориентировочным значениям $k = 2$, $h = 10$ и $A = 0$. В принципе, для их уточнения можно было бы воспользоваться какой-либо стандартной процедурой статистической обработки, но ввиду не очень большого объёма входной информации авторам это показалось нецелесообразным.

Тем не менее, несмотря на отличия аэродинамических характеристик испытывавшихся профилей и параметров колебаний, результаты расчётов по формуле (3.3) при указанных значениях параметров достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными (см. рис. 2 и 3, где расчётные кривые изображены сплошными линиями, квазистатическая зависимость — пунктиром, а первая гармоника, полученная из экспериментальных данных — кружками).

Вообще говоря, нестационарность проявляется двояким образом. Во-первых, амплитуда нестационарного отклика отличается от амплитуды квазистатического значения, во-вторых, нестационарный отклик имеет сдвиг фазы относительно квазистатического (как на рис. 2). Однако в частном случае, представленном на рис. 3, практически отсутствует сдвиг фазы, но амплитуды заметно отличаются.

Предложенные значения параметров присоединённой динамической системы являются в достаточной мере условными: хотя они позволяют обеспечить удо-

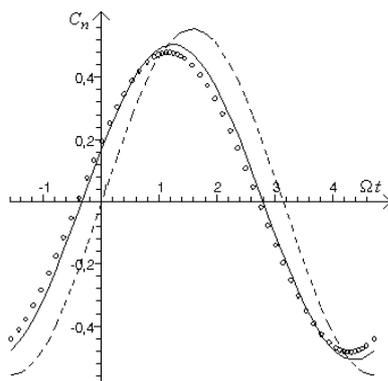


Рис. 2.
 $\Omega = 0,993$, $a = 0,2$, $C_n^\alpha = 2,8$

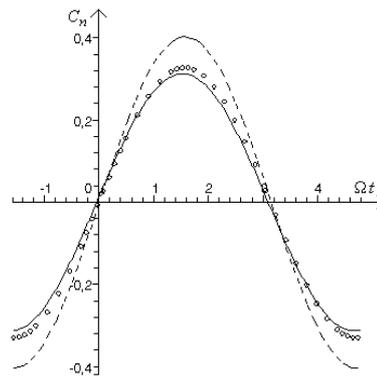


Рис. 3.
 $\Omega = 0,5$, $a = 0,21$, $C_n^\alpha = 3,8$

влетворительное согласие с конкретными экспериментами в сравнительно широком диапазоне параметров движения для тел типа плоской пластины, нельзя исключить того, что они на самом деле зависят от параметров движения (например, от частоты колебаний), от характеристик среды и т. д.

С учётом этого обстоятельства, а также для сохранения возможности проведения параметрического анализа далее во всех формулах авторы сохранили за этими величинами смысл параметров.

4. Обратные задачи динамики тела

Решение обратных задач динамики, как известно, сводится к определению вынуждающей силы, необходимой для поддержания заданного закона движения. Чтобы найти эту силу при заданном движении пластины в среде, в соответствии с (1.1) необходимо знать силу N , с которой среда действует на пластину, совершающую такое движение.

Прежде всего хотелось бы исследовать последствие, т. е. силу, которая будет действовать на пластину со стороны потока после её остановки. Для этого необходимо задаться каким-либо законом движения, который переводит пластину из некоторого известного начального состояния в состояние покоя. Предположим, что движение начинается из установившегося состояния покоя, т. е. и сама пластина, и присоединённая система покоились при $t < 0$. Пусть при $t = 0$ пластине придаётся постоянное ускорение. Затем при $t = t_1$ ускорение обращается в нуль, и пластина под действием внешней силы продолжает двигаться равномерно до момента $t = t_2$. В этот момент пластина начинает равномерное торможение, причём абсолютная величина ускорения та же, что и на первом этапе движения. Скорость пластины обращается в нуль в момент t_3 , и при $t > t_3$ пластина будет покоиться. Зависимость скорости пластины от времени при таком законе движения пластины выражается следующей формулой:

$$\dot{x}_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \ddot{x}_{T0}t, & 0 \leq t < t_1, \\ V_0 = \ddot{x}_{T0}t_1, & t_1 \leq t < t_2, \\ V_0 - \ddot{x}_{T0}(t - t_2), & t_2 \leq t < t_3 = t_2 + t_1, \\ 0, & t_3 \leq t. \end{cases} \quad (4.1)$$

На участках, где ускорение пластины является гладкой функцией времени, представляется более удобным использовать интегральную форму описания аэродинамической силы (1.10). Но в моменты переключения ускорение терпит разрыв, и для определения начальных условия для присоединённого осциллятора на следующем этапе движения необходимо воспользоваться уравнениями движения присоединённой системы (второе уравнение системы (1.5)) при заданном движении пластины.

Перейдём к рассмотрению отдельных этапов этого движения.

4.1. Движение с постоянным ускорением

На первом этапе движения ($0 < t < t_1$) пластина совершает равноускоренное движение в потоке $\ddot{x}_T \equiv \ddot{x}_{T0} = \text{const}$. Поскольку по предположению движение началось из состояния, когда пластина покоилась, и обтекание было установившимся, начальные условия таковы:

$$\dot{x}_T(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 0.$$

С учётом этого запишем выражение для силы, действующей со стороны потока на пластину:

$$N(t) = - \left(m - \frac{C_n^\alpha}{k} (C_n^\alpha - A) + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(m + \frac{C_n^\alpha}{\lambda_i} \right) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i t + C_n^\alpha t} \right) \ddot{x}_{T0}. \quad (4.2)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — собственные числа для уравнения присоединённого осциллятора, $\sigma = \sqrt{(h + C_n^\alpha - A)^2 - 4km}$.

Коэффициент при ускорении в правой части (4.2) имеет смысл присоединённой массы. Он представляет собой функцию времени, что согласуется с известными экспериментальными данными. В нём можно выделить три составляющих: константу, экспоненциально убывающую функцию времени и линейно растущую функцию времени (при $C_n^\alpha > 0$, что имеет место для тел типа плоской пластины). При малых t присоединённая масса имеет порядок $ht + O(t^2)$, при больших t она, очевидно, стремится к асимптоте $m - \frac{C_n^\alpha}{k} (C_n^\alpha - A) + C_n^\alpha t$. Нетрудно показать, что при выполнении условия $h > A$ величина присоединённой массы положительна для всех $t > 0$, даже при $m - \frac{C_n^\alpha}{k} (C_n^\alpha - A) < 0$.

4.2. Движение с постоянной скоростью

Пусть в момент времени t_1 ускорение пластины, совершавшей до того равноускоренное движение, описанное в предыдущем пункте, стало равным нулю. Тогда сила, действующая на пластину со стороны потока среды при таком режиме движения, определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} N(t) = & -C_n^\alpha V_0 + C_n^\alpha V_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i(t-t_1)} + \\ & + \eta_1 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{k(\lambda_i + C_n^\alpha/m)}{\Delta\lambda} e^{\lambda_i(t-t_1)} - \\ & - \dot{\eta}_1 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{m(\lambda_i^2 + C_n^\alpha \lambda_i)}{\Delta\lambda} e^{\lambda_i(t-t_1)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь начальное положение η_1 и начальная скорость $\dot{\eta}_1$ присоединённого осциллятора в момент времени $t = t_1$ определяются из решения уравнений (1.5) для

предыдущей фазы движения:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -\frac{C_n^\alpha}{k} V_0 - \frac{C_n^\alpha (C_n^\alpha + h - A) - mk}{k^2} \ddot{x}_{T_0} - \\ &\quad - \ddot{x}_{T_0} \frac{1}{k\sigma} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(C_n^\alpha \frac{C_n^\alpha + h - A}{\lambda_i} - \frac{mk}{\lambda_i} - mC_n^\alpha \right) e^{\lambda_i t_1}, \\ \dot{\eta}_1 &= -\frac{C_n^\alpha}{k} \ddot{x}_{T_0} - \ddot{x}_{T_0} \frac{1}{k\sigma} \sum_{i=1}^2 (-1)^i (C_n^\alpha (C_n^\alpha + h - A) - mk - mC_n^\alpha \lambda_i) e^{\lambda_i t_1}.\end{aligned}$$

Из (4.3) следует, что с ростом времени величина аэродинамической силы, как и следовало ожидать, стремится к стационарному значению $-C_n^\alpha V_0$.

4.3. Движение с постоянным торможением

Рассмотрим следующий этап движения (4.1) — равнозамедленное движение. В момент времени t_2 ($t_2 > t_1$) пластине, двигавшейся с постоянной скоростью, как описано в предыдущем пункте, сообщается ускорение, равное $-\ddot{x}_{T_0}$. Тогда сила воздействия среды будет описываться следующей формулой:

$$\begin{aligned}N(t) &= \left(m - \frac{C_n^\alpha}{k} (C_n^\alpha - A) - \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(m + \frac{C_n^\alpha}{\lambda_i} \right) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i (t-t_2)} \right) \ddot{x}_{T_0} - \\ &\quad - C_n^\alpha (V_0 + \ddot{x}_{T_0} (t - t_2)) + C_n^\alpha V_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i (t-t_2)} + \\ &\quad + \eta_2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{k(\lambda_i + C_n^\alpha/m)}{\Delta\lambda} e^{\lambda_i (t-t_2)} - \dot{\eta}_2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{m(\lambda_i^2 + C_n^\alpha \lambda_i)}{\Delta\lambda} e^{\lambda_i (t-t_2)}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Здесь начальные условия присоединённого осциллятора (при $t = t_2$) также определяются из решения уравнений (1.5) для предыдущей фазы движения:

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(\frac{m}{\sigma} \dot{\eta}_1 - \frac{k}{\sigma \lambda_i} \left(\eta_1 + V_0 \frac{C_n^\alpha}{k} \right) \right) e^{\lambda_i (t_2 - t_1)} - \frac{V_0 C_n^\alpha}{k}, \\ \dot{\eta}_2 &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(\frac{m \lambda_i}{\sigma} \dot{\eta}_1 - \frac{k}{\sigma} \left(\eta_1 + V_0 \frac{C_n^\alpha}{k} \right) \right) e^{\lambda_i (t_2 - t_1)}.\end{aligned}$$

4.4. Последствие

Наконец, рассмотрим последнюю фазу движения (4.1) — движение присоединённого осциллятора после остановки пластины. Пусть в момент t_3 , когда скорость пластины стала равной нулю, обратилось в нуль и её ускорение, и

$\dot{x}_T(t) \equiv 0$ при $t > t_3$. Тогда в дальнейшем зависимость силы, действующей на пластину, от времени описывается формулой

$$N(t) = \eta_3 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{k(\lambda_i + C_n^\alpha/m)}{\Delta\lambda} e^{\lambda_i(t-t_3)} - \dot{\eta}_3 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{m(\lambda_i^2 + C_n^\alpha \lambda_i)}{\Delta\lambda} e^{\lambda_i(t-t_3)}. \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta_3 &= \frac{C_n^\alpha(C_n^\alpha + h - A) - mk}{k^2} \ddot{x}_{T_0} + \ddot{x}_{T_0} \frac{1}{k\sigma} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \times \\ &\quad \times \left(-\frac{k^2 \eta_2}{\lambda_i} + km \dot{\eta}_2 + \frac{C_n^\alpha(C_n^\alpha + h - A)}{\lambda_i} - \frac{mk}{\lambda_i} - mC_n^\alpha \right) e^{\lambda_i(t_3-t_2)}, \\ \dot{\eta}_3 &= \frac{C_n^\alpha}{k} \ddot{x}_{T_0} + \ddot{x}_{T_0} \frac{1}{k\sigma} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \times \\ &\quad \times (-k^2 \eta_2 + km \dot{\eta}_2 \lambda_i + C_n^\alpha(C_n^\alpha + h - A) - mk - mC_n^\alpha \lambda_i) e^{\lambda_i(t_3-t_2)}. \end{aligned}$$

Соотношение (4.5) описывает последствие, возникающее в результате реализации движения (4.1). Видно, что зависимость силы N от времени представляет собой сумму убывающих экспонент, характеристические показатели которых являются собственными числами для уравнения присоединённого осциллятора.

Аналогичным образом можно определить последствие и для других движений. Например, для случая гармонических колебаний в предположении, что пластина будет зафиксирована в той точке траектории, где её скорость равна нулю (чтобы избежать удара).

4.5. Сила на всех этапах движения

На рис. 4 приведены зависимости силы N от времени на всех четырёх этапах движения для двух случаев разных значений \ddot{x}_{T_0} : 1) $\ddot{x}_{T_0} = 0,1$; 2) $\ddot{x}_{T_0} = 0,6$. В обоих случаях полагалось $V_0 = 0,4$, $C_n^\alpha = 4,0$, $m = 1,57$, $k = 2,0$, $h = 10,0$, $A = 0$. Для наглядности в верхней части рисунка изображены графики соответствующих зависимостей $\dot{x}_T(t)$. Видно, что в обоих случаях при переключении с режима равномерного движения на режим равноускоренного движения зависимость силы от времени оказывается монотонной. При обратном переключении сила изменяется со временем немонотонно.

В то же время сопоставление кривых 1 и 2 на рис. 4 показывает, что при относительно малом значении \ddot{x}_{T_0} знак силы не изменяется на протяжении всего времени движения. Но если величина ускорения достаточно велика, то на некотором конечном промежутке времени, содержащем момент t_3 остановки пластины, сила имеет знак, противоположный исходному. Любопытно, что при этом

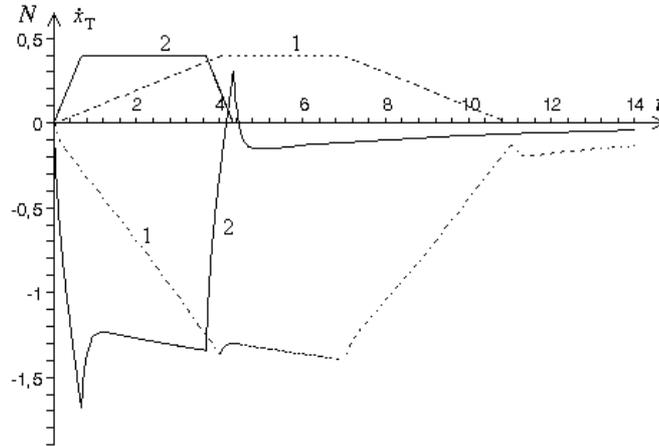


Рис. 4

существует такой интервал времени, на котором пластина ещё движется, но среда не сопротивляется движению пластины, а, наоборот, «разгоняет» её.

4.6. Мгновенная остановка пластины

Остановимся более подробно на случае, когда $\ddot{x}_{T0} \rightarrow \infty$ (пластина останавливается почти мгновенно). Вопрос о применимости в линейной модели в этой ситуации оставим за рамками анализа. При этом для простоты ограничимся рассмотрением только двух последних фаз движения (4.1) и предположим, что равномерное движение со скоростью V_0 длилось достаточно долго, так что его можно считать установившимся. Обозначим момент приложения ускорения через t_0 . Тогда пластина остановится в момент времени $t_* = t_0 + V_0/\ddot{x}_{T0}$.

Ясно, что при $t < t_0$ сила N принимала стационарное значение $-C_n^\alpha V_0$. Нетрудно показать, что при $t = t_*$ для неё справедливо соотношение

$$N = (h - C_n^\alpha)V_0. \quad (4.6)$$

При выполнении условия $h > C_n^\alpha$ величина (4.6) больше нуля, т. е. аэродинамическая сила меняет знак. Это соответствует второму случаю из описанных в предыдущем пункте.

При почти мгновенной остановке пластины ни абсолютная скорость, ни положение присоединённого осциллятора не могут претерпевать конечного изменения. Поэтому начальные условия для присоединённой системы на стадии последствия имеют вид

$$\eta(t_*) = -\frac{V_0 C_n^\alpha}{k}, \quad \dot{\eta}(t_*) = V_0.$$

Запишем выражение для силы N на этапе последействия, приняв $t_* = 0$:

$$N(t) = \frac{mV_0}{k\sigma} ((k - C_n^\alpha |\lambda_1|)(h|\lambda_2| - k)e^{\lambda_2 t} - (C_n^\alpha |\lambda_2| - k)(k - h|\lambda_1|)e^{\lambda_1 t}). \quad (4.7)$$

Так как при условии сильной задемпфированности присоединённого осциллятора $\lambda_2 \ll \lambda_1 < 0$, то положительное первое слагаемое затухает быстрее, а второе слагаемое отрицательно при всех $t > 0$. Поэтому эта функция имеет единственный минимум и принимает в нём отрицательное значение, что коррелирует с некоторыми известными экспериментальными данными.

5. Критерии применимости квазистатической модели

1. Попытаемся понять, в каких условиях квазистатическая модель даёт достаточно адекватное описание поведения тела в потоке. Для этого воспользуемся интегродифференциальной формой представления аэродинамической силы (1.10). Введём формально малый параметр ε (в конкретной задаче, в зависимости от её специфики, он может иметь разный смысл) и перейдём к медленному времени $\bar{t} = t\varepsilon$.

Тогда формула (1.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} N(t) = C_n(t) = & -\varepsilon C_n^\alpha x'_T - \varepsilon^2 \left(m - \frac{C_n^\alpha}{k} (C_n^\alpha - A) \right) x''_T + \\ & + \eta_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k(k/\lambda_i + h)}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} - \dot{\eta}_0 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{m(k + h\lambda_i)}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} + \\ & + C_n^\alpha \dot{x}_{T0} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} + \ddot{x}_{T0} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(m + \frac{C_n^\alpha}{\lambda_i} \right) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} e^{\lambda_i \bar{t}/\varepsilon} - \\ & - \varepsilon^3 \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(m + \frac{C_n^\alpha}{\lambda_i} \right) \frac{k/\lambda_i + h}{\sigma} \int_0^{\bar{t}/\varepsilon} x_T''' e^{\lambda_i(\bar{t}/\varepsilon - \tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь штрихом обозначена производная по медленному времени.

Из (5.1) видно, что процесс «забывания» начальных условий как присоединённого осциллятора, так и пластины описывается двумя экспонентами, показатели которых являются собственными числами для уравнения присоединённого осциллятора. Соответственно введём характерные времена $T_{1,2}$ «забывания». Предположим, что $T_1 > T_2$.

Заметим, что в случае если $|\lambda_{1,2}| \gg \varepsilon$ и x'_T, x''_T, x'''_T имеют порядок 1, то вне пограничного слоя $t \gg T_1$ с точностью до ε выполнено соотношение $N(t) = -\varepsilon C_n^\alpha x'_T$, или, если вернуться к обычному времени, $N(t) = -C_n^\alpha \dot{x}_T$, а это — нормальная составляющая аэродинамической силы в квазистатическом случае.

Значит, в этой ситуации применение квазистатической модели даст ошибку порядка ε по сравнению с моделью «присоединённого осциллятора».

Сформулируем это предложение несколько более строго.

Пусть уравнения движения в конкретной задаче допускают медленное движение, характерное время T которого имеет порядок $1/\varepsilon$, причём $T \gg T_1$. Тогда на некотором интервале времени $[t_1; t_2]$, таком что $t_1 \sim T_1$ и $t_2 \sim 1/\varepsilon$, квазистатическая модель описывает нормальную составляющую силы воздействия потока на пластину с точностью до первого порядка по ε включительно для почти всех начальных условий.

Отметим, что учёт в (5.1) второго слагаемого, с одной стороны, позволяет несколько ($\sim \varepsilon^2$) повысить точность, а с другой стороны, эквивалентен введению своего рода «эффекта присоединённых масс». Как видно, новая «присоединённая масса» не совпадает ни с классической присоединённой массой, ни с массой присоединённого осциллятора.

2. Оценим характерные времена $T_{1,2}$ собственных движений присоединённой динамической системы с учётом полученной в предыдущих разделах количественной информации о параметрах присоединённого осциллятора. При значениях параметров, принятых в разделе 3 ($k = 2$, $h = 10$, $A = 0$), полагая $m = 1,57$ (присоединённая массы пластины бесконечного удлинения в идеальной жидкости) и $C_n^\alpha = 4$, получим

$$T_1 \approx 10, \quad T_2 \approx 0,1. \quad (5.2)$$

В качестве примера рассмотрим уже упоминавшиеся в разделе 2 колебания пластины на упругом креплении. Воспользуемся уравнением (2.6) движения системы «пластина + присоединённый осциллятор». Остановимся на двух случаях возникновения в этой системе медленных движений: случай малой жёсткости пружины крепления и случай большой массы пластины.

Пусть жёсткость \varkappa пружины крепления мала. В этой ситуации возникает малый параметр $\varepsilon = \varkappa/(C_n^\alpha + \delta)$, и характерное время T медленных движений определяется формулой $T = (C_n^\alpha + \delta)/\varkappa$ (здесь δ — коэффициент демпфирования пружины крепления). Исходя из изложенных выше соображений и учитывая соотношения (5.2), получим, что квазистатическая модель будет применима, если $\varkappa \ll 10^{-1}C_n^\alpha$.

Пусть теперь масса пластины велика. В этом случае естественно ввести малый параметр $\varepsilon = \sqrt{\varkappa/M}$. Тогда характерное время колебаний пластины имеет вид $T = \sqrt{M/\varkappa}$. Соответственно, область применимости квазистатической модели определяется соотношением $M \gg 10^2 \varkappa$.

Отметим, что в этой ситуации медленное движение представляет собой экспоненциально затухающие колебания, причём введённый малый параметр характеризует период колебаний, а характерное время затухания имеет порядок C_n^α/M . Поэтому в ситуации, когда требуется оценить только скорость затухания, область применимости квазистатической модели может расширяться: $M \gg 10C_n^\alpha$.

Выражаем признательность В. П. Карликову, А. Н. Хомякову, обратившим внимание авторов на обсуждаемую проблему, и Э. П. Гребешову за облегчение доступа к экспериментальной информации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00190), программы «Университеты России» и гранта Президента РФ № МК-263.2003.01.

Литература

- [1] Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Локтев Б. Е., Томшин В. М. Линейные и квазилинейные задачи динамики жёсткого аппарата с отклоняющимися рулями // Труды ВВИА им. Жуковского. — 1971. — Вып. 1302. — С. 110—146.
- [2] Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. — М.: Наука, 1971.
- [3] Гребешов Э. П., Шакарвене Е. П. Нестационарные характеристики трёх прямоугольных крыльев различного удлинения // Труды ЦАГИ. — 1989. — Вып. 2485. — С. 3—31.
- [4] Махортых Г. В., Щеглова М. Г. Экспериментальное исследование коэффициентов производных нормальной силы прямоугольных крыльев при поступательных колебаниях // Учёные записки ЦАГИ. — 1990. — Т. 21, № 1. — С. 11—20.
- [5] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О возможности учёта инерционных свойств потока среды, воздействующей на тело // М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
- [6] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. К задаче о колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Избранные труды Международной конференции «III Поляховские чтения». — СПб., 2003. — С. 220—225.
- [7] Селюцкий Ю. Д. Об инерционных свойствах среды, воздействующей на твёрдое тело // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы аэрокосмической науки и техники». — Жуковский, 2000. — С. 217.
- [8] Селюцкий Ю. Д. Феноменологическая модель учёта инерционных свойств потока среды, воздействующей на твёрдое тело: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2001.
- [9] Селюцкий Ю. Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Труды конференции-конкурса молодых учёных Института механики МГУ. — 2002. — С. 79—84.
- [10] Ericsson L. E., Reding J. P. Dynamic stall analysis in light of recent numerical and experimental results. — AIAA Paper no. 75-26. — 1975.
- [11] Liiva J. Unsteady aerodynamic and stall effects on helicopter rotor blade airfoil sections // J. Aircraft. — 1969. — Vol. 6, no. 1. — P. 46—51.