

К вопросу о моделировании полёта болидов

Б. Я. ЛОКШИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
email: lokshin@imec.msu.ru*

Ю. М. ОКУНЕВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
email: okunev@imec.msu.ru*

В. А. САДОВНИЧИЙ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

В. А. САМСОНОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: samson@imec.msu.ru*

УДК 531+534

Ключевые слова: болид, траектория полёта, сопротивляющаяся среда, прямолинейное торможение, криволинейное торможение, устойчивость.

Аннотация

Рассматривается одно из интересных приложений классической задачи о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде, которое связано с оценками траекторий полёта космических тел типа метеоритов в атмосфере Земли (или других планет). Особенность этих объектов состоит в отсутствии у них хоть сколь-нибудь «правильной» формы. Поэтому описание аэродинамического воздействия на это тело даже в самом простом случае имеет определённые особенности. Установлено, что в рамках рассмотренной модели режима прямолинейного поступательного торможения болида не существует. При некоторых дополнительных упрощениях удалось обосновать существование «установившихся» режимов криволинейного торможения. Показано, что аэродинамика может вызвать гораздо большие искривления траектории, чем гравитация. Проведён анализ устойчивости этих режимов движения.

Abstract

B. Ya. Lokshin, Yu. M. Okunev, V. A. Sadovnichy, V. A. Samsonov, On bolide flight modelling, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 63–71.

One of the interesting applications of a classical problem on movement of a solid body in resistant media is considered which is connected to estimation of trajectories of space bodies such as meteorites in the atmosphere of the Earth (or other planets). One feature of these objects is the absence of their “correct” form. Therefore, description of aerodynamic influence on this body even in the simplest case has some peculiar properties. For the considered model it is established that the rectilinear forward movement of the braking bolide does not exist. At some additional simplifications it was proved that a “steady”

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 63–71.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

curvilinear motion exists. It is shown that aerodynamics can cause much more curvature of a trajectory than gravitation. The analysis of stability of these motions is carried out.

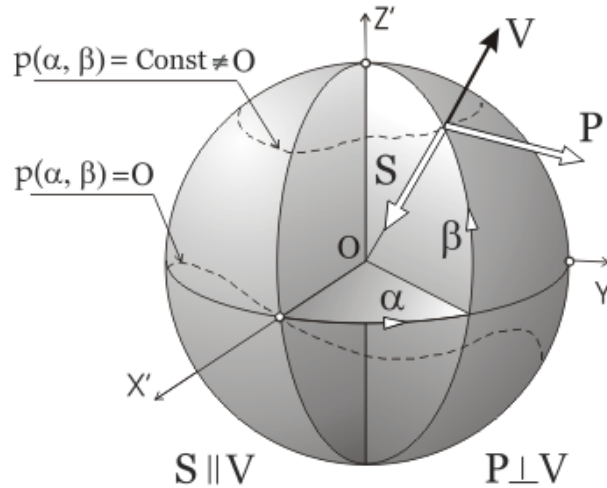
В середине XVIII века Л. Эйлер [5] сформулировал и практически решил модельную задачу о движении тяжёлой материальной точки в среде с квадратичным сопротивлением, положив тем самым начало разнообразным задачам внешней баллистики (полёт артиллерийских ядер, снарядов, пуль и т. п.). В 1891 году Н. Е. Жуковский [1] добавил в эту модель подъёмную силу. Оказалось, что траектории движения точки в этом случае приобретают новые формы и даже могут быть похожими на траектории парения птиц. Так началось механико-математическое моделирование задач полёта тел с несущими поверхностями, обладающими высоким аэродинамическим качеством. В 70-е годы прошлого века стали изучаться вопросы [2], связанные с возвращением из космоса отсеков и модулей космических аппаратов, в том числе неуправляемых, которые не имеют крыльев и поэтому обладают довольно низким аэродинамическим качеством. В последнее время обозначился интерес к такому классу объектов, как болиды, метеоры, метеороиды. Они представляют собой бесформенные тела (куски льда, камней, металлов и т. д.) и, как правило, обладают очень низким аэродинамическим качеством. Конечно, когда эти тела влетают в атмосферу Земли и других планет с высокой скоростью (свыше 10 км/с), многие из них разрушаются в верхних слоях атмосферы. Однако некоторые осколки продолжают полёт и даже достигают поверхности Земли. Необходимость оценки разлёта осколков даёт авторам повод обсудить общие свойства движения в сопротивляющейся среде тел, не имеющих специальных форм (так сказать, «неправильной» формы). Методическая сторона задачи о движении тела в сопротивляющейся среде в простейшей постановке обсуждена в [3].

В настоящей работе рассмотрена задача о торможении тела в покоящейся однородной среде (под действием сил со стороны среды в отсутствие сил иной природы) как типовая задача теоретической механики о взаимовлиянии поступательного и вращательного движений тела.

1. Предположим, что неуправляемое твёрдое достаточно «бесформенное» (не имеющее ни осей симметрии, ни плоскостей симметрии) тело массы M движется в покоящейся атмосфере и находится только под действием сил аэродинамического воздействия. Мгновенное состояние движения описывается вектором $\mathbf{V}$ скорости центра O масс тела и вектором $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости вращения тела вокруг точки O . Свяжем с телом некоторую систему координат $OX'Y'Z'$. Тогда мгновенная ориентация вектора $\mathbf{V}$ относительно системы $OX'Y'Z'$ определится углами α и β .

На рисунке изображены сфера Пуассона для рассматриваемого тела, на которой показаны эти углы.

При выборе расчётной схемы для аэродинамических сил приходится опираться на эвристические соображения о характере «ожидаемых» движений тела. Для движений тела с относительно малой угловой скоростью обычно используют так



называемое квазистатическое представление [3]. Результирующую силу $\mathbf{R}$ аэродинамического воздействия разложим на две составляющие (см. рисунок):

- силу $\mathbf{S}$ лобового сопротивления, направленную против вектора $\mathbf{V}$ скорости тела, $S = -s(\alpha, \beta)V^2$, и
- боковую (или подъёмную) силу $\mathbf{P}$, лежащую в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{V}$; направление этой силы в указанной плоскости зависит от значений углов α, β ориентации вектора $\mathbf{V}$ в выбранной системе отсчёта, $P = p(\alpha, \beta)V^2$.

Таким образом, $\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{P}$, где $\mathbf{S} \parallel \mathbf{V}$, $\mathbf{P} \perp \mathbf{V}$.

Аналогичным образом представим и момент $\mathbf{Q}$ аэродинамических сил, так что $\mathbf{Q} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$, где $\mathbf{K} \parallel \mathbf{V}$, $\mathbf{N} \perp \mathbf{V}$, $K = k(\alpha, \beta)V^2$ и $N = n(\alpha, \beta)V^2$.

Отметим два характерных свойства, которые сразу следуют из указанного представления аэродинамического воздействия.

1. Коэффициент $s(\alpha, \beta)$ всегда положителен ($s(\alpha, \beta) \geq s_0 > 0$), что отражает свойство сопротивляемости среды. Уравнение движения центра O масс в проекции на касательную к его траектории в рамках принятой модели имеет вид

$$M\dot{V} = -s(\alpha, \beta)V^2.$$

Отсюда, очевидно, следует, что функция $V(t)$ монотонно убывает со временем.

2. Коэффициенты $p(\alpha, \beta)$ и $n(\alpha, \beta)$ — знакопеременные функции, обращающиеся в нуль не менее двух раз за период по каждому из аргументов. На рисунке пунктирными линиями представлены геометрические места точек, в которых имеет место равенство $p(\alpha, \beta) \equiv \text{const}$. На одной из таких

линий имеет место равенство $p(\alpha, \beta) = 0$. Для определённости будем считать, что ось OX' проходит через одну из точек множества $p(\alpha, \beta) = 0$, так что справедливо равенство

$$p(0, 0) = 0.$$

Таким образом, связанная с телом система координат $OX'Y'Z'$ несёт в себе и некоторую информацию об аэродинамическом воздействии.

Аналогичным образом может быть изображено и геометрическое место точек, в которых выполняется условие $n(\alpha, \beta) = 0$. В зависимости от взаимного расположения линий $p(\alpha, \beta) = 0$ и $n(\alpha, \beta) = 0$ на сфере Пуассона из общего многообразия тел общего положения выделяются два «грубых» семейства: T_1 — тела, у которых эти линии не пересекаются, и T_2 — тела, у которых такое пересечение есть.

2. Возникает естественный вопрос о существовании режима прямолинейного поступательного торможения тела, при котором выполняются соотношения $\alpha(t) \equiv \alpha_* = \text{const}$, $\beta(t) \equiv \beta_* = \text{const}$, $\Omega(t) \equiv \mathbf{0}$. Заметим, что при нарушении условий $\alpha(t) \equiv \text{const}$, $\beta(t) \equiv \text{const}$ траектория точки O криволинейна, а при нарушении условия $\Omega(t) \equiv \mathbf{0}$ движение тела не поступательное.

В литературе о метеоритах влиянием боковой силы обычно пренебрегают, считая $\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$. В этом случае независимо от характера вращения тела траектория точки O прямолинейна.

Для осуществления режима прямолинейного поступательного движения тела необходимо выполнение условий $p(\alpha_*, \beta_*) = 0$ и $n(\alpha_*, \beta_*) = 0$. Если рассматриваемое тело относится к множеству T_1 , то эти условия не могут быть выполнены, так что режим поступательного прямолинейного движения для тел этого множества невозможен. Если тело относится к множеству T_2 , то эти необходимые условия могут быть выполнены. Для удобства дальнейших рассуждений и не ограничивая общности будем считать, что ось OX' проходит через точку пересечения линий $p(\alpha, \beta) = 0$ и $n(\alpha, \beta) = 0$. Тогда режим прямолинейного поступательного движения описывается равенствами

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \beta(t) \equiv 0, \quad \Omega(t) \equiv \mathbf{0}, \quad (1)$$

а необходимые условия примут вид

$$p(0, 0) = 0, \quad n(0, 0) = 0. \quad (2)$$

Для осуществления режима (1) условий (2) недостаточно — требуется, чтобы и другая составляющая аэродинамического момента равнялась нулю: $k(0, 0) = 0$. Однако в общем случае трудно ожидать, что нули трёх функций $p(\alpha, \beta)$, $n(\alpha, \beta)$ и $k(\alpha, \beta)$ совпадают, так как эти функции независимы: функция $p(\alpha, \beta)$ определяется лишь внешней формой тела, а $n(\alpha, \beta)$ и $k(\alpha, \beta)$ ещё и распределением масс (точнее, расположением центра O масс тела относительно внешней формы).

Таким образом, для тела, так сказать, «общего положения» имеем

$$k(0, 0) \neq 0.$$

Следовательно, режим прямолинейного поступательного торможения, вообще говоря, невозможен и для тел из множества T_2 .

3. Будем считать сначала (с целью исключить громоздкие выкладки), что рассматриваемое тело всё же может совершать плоскопараллельное движение. В принятых обозначениях имеем $\beta \equiv 0$. Тогда сила $\mathbf{P}$ лежит в плоскости $OX'Y'$, $\mathbf{Q} = \mathbf{N}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{0}$), а вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ направлен вдоль оси OZ' , так что $\mathbf{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$.

Для описания этого движения перейдём к новой независимой переменной — длине σ дуги, пройденной точкой O , так что $d\sigma = V dt$, и совершим замену $\Omega = V\omega$. В результате получим систему уравнений (для упрощения записи будем опускать в дальнейшем нулевой аргумент β в аэродинамических коэффициентах)

$$MV' = -s(\alpha)V, \quad (3)$$

$$M(\alpha' - \omega) = -p(\alpha), \quad (4)$$

$$J\left(\omega' - \frac{\omega s(\alpha)}{M}\right) = n(\alpha), \quad (5)$$

где введено обозначение $(\cdot)' = d(\cdot)/d\sigma$. В этой системе два первых уравнения описывают движение центра масс тела, а третье — вращение тела в плоскости движения. Нетрудно видеть, что два последних уравнения отделились от первого.

Рассмотрим вопрос существования режима установившегося торможения вида

$$\alpha(\sigma) \equiv \alpha_* = \text{const}, \quad \omega(\sigma) \equiv \omega_* = \text{const}. \quad (6)$$

Из уравнений (4), (5) видно, что для существования этого режима необходимо выполнение условия

$$-Js(\alpha_*)p(\alpha_*) = M^2n(\alpha_*), \quad (7)$$

т. е. значение α_* должно быть корнем уравнения (7).

Отметим, что движение тела, отвечающее этому стационарному решению, протекает с уменьшением скорости V (в силу уравнения (3)), с убывающей угловой скоростью $\Omega(t) = V(t)\omega_*$, но с постоянным значением α_* угла атаки. В этом и проявляется взаимовлияние поступательного и вращательного движений тела.

Для определения траектории точки O в режиме установившегося торможения представим уравнение (4) в традиционном виде

$$\frac{MV^2}{R} = |p(\alpha_*)|V^2,$$

где R — радиус кривизны траектории. Отсюда следует, что центр O масс тела движется по окружности постоянного радиуса

$$R = \frac{M}{|p(\alpha_*)|}. \quad (8)$$

Дадим оценку этого искривления траектории. Примем во внимание, что

$$s(\alpha) = \frac{1}{2}\rho b^2 C_x(\alpha), \quad p(\alpha) = \frac{1}{2}\rho b^2 C_y(\alpha),$$

где ρ — плотность среды, b — характерный размер тела (аэродинамическая хорда), $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$ — безразмерные коэффициенты силы лобового сопротивления и подъёмной силы. Если тело не является шаром, то коэффициент $C_y(\alpha)$ отличен от тождественного нуля. Например, спускаемые модули космических аппаратов, не имея специальных лопастей, крыльев и т. п., относятся к телам, так сказать, низкого аэродинамического качества, для них $C_y(\alpha) < 0,3$, а $C_x(\alpha) \approx 1$. Для «бесформенных» же тел значения $C_y(\alpha)$, по-видимому, ещё меньше. С учётом сделанных замечаний и приняв $M \sim \rho_T b^3$, из (8) получаем

$$R \sim \frac{\rho_T b}{\rho C_y}.$$

При $\rho \sim 0,1 \text{ кг/м}^3$, $C_y \sim 0,01$ имеем, что для «железа» $R \sim 7 \cdot 10^6 b$, а для «пористого льда» $R \sim 7 \cdot 10^5 b$, так что радиус кривизны траектории полёта тела с размером $b \sim 0,1 \text{ м}$ не превышает тысячи километров (т. е. $R < 1000 \text{ км}$).

Сравним теперь эту величину с кривизной траектории полёта тела под действием гравитационных сил. Например, в поле притяжения Земли со скоростями, превышающими первую космическую $V > 7 \text{ км/с}$, траектория имеет радиус кривизны не меньше радиуса планеты (Земли), т. е. $R > 6700 \text{ км}$, а при $V \sim 20 \text{ км/с}$ $R \sim 40000 \text{ км}$.

Видно, что аэродинамика влияет на кривизну полёта с космическими скоростями в разреженной атмосфере заметно сильнее гравитации. Правда, следует учитывать, что величина скорости в соответствии с (3) убывает вдоль траектории практически по экспоненциальному закону, так что отрезок траектории, на котором скорость полёта уменьшается вдвое, имеет длину в несколько километров. При дальнейшем падении скорости следует, видимо, учитывать совместное действие на полёт и аэродинамических сил, и сил гравитации¹.

Необходимо также учитывать немаловажное различие в действии этих сил. Гравитация «искривляет» траекторию, так сказать «вниз», в плоскости, проходящей через вектор V и центр Земли. Плоскость же действия аэродинамических сил определяется начальной ориентацией тела (носящей случайный характер) при входе в атмосферу. Иначе говоря, аэродинамика может способствовать искривлению траектории даже «вверх», вплоть до «вылета» тела из атмосферы.

В обсуждаемой задаче, естественно, проигнорированы многие обстоятельства, сопутствующие движению метеоритов в атмосфере Земли, но искривление траектории их полёта, обусловленное аэродинамическим воздействием, видимо, учитывать следует.

¹Сила тяжести, в случае её учёта, не создаёт момента относительно центра O масс тела и непосредственно не войдёт в уравнение (5) «вращательного» движения. Однако эта сила «проявится» в уравнениях (3) и (4) и через них окажет-таки влияние на вращательное движение.

Примечание. В предельном случае, при $J \rightarrow 0$, из (5) следует

$$n(\alpha_*) = 0.$$

Отсюда можно осуществить переход к модельной задаче о движении в среде материальной точки с учётом подъёмной силы ($p(\alpha_*) \neq 0$), сформулированной Н. Е. Жуковским в знаменитой работе [1]. Траектории движения тяжёлой точки в этом случае описаны, в частности, в [3].

4. Рассмотрим влияние переменности плотности на полученные выводы. Из уравнения (3) видно, что характер изменения скорости V сохраняется: она по-прежнему убывает.

В левую часть уравнения (7) переменная плотность входит во второй степени (через аэродинамические коэффициенты), а в правую — в первой, так что α_* как корень уравнения (7) изменяется вдоль траектории, т. е. решения вида (6) не существует.

Заметим, что при этом радиус кривизны траектории, как это следует из (8), также изменяется вдоль траектории.

5. Перейдём к анализу устойчивости траектории «установившегося» торможения в рамках плоскопараллельного движения. Поскольку тела (метеориты) имеют различные формы, то проведение подробного анализа устойчивости всей совокупности возможных режимов установившегося торможения вряд ли целесообразно.

Рассмотрим сначала вопрос об устойчивости для простейшего частного случая тела, для которого $n(0) = 0$. Тогда существует режим прямолинейного поступательного торможения $\alpha_* = 0$, $\omega_* = 0$.

Уравнения возмущённого движения в линейном по α , ω приближении имеют вид [4]

$$\begin{aligned} M(\alpha' - \omega) &= -p\alpha, \\ J\left(\omega' - \frac{s\omega}{M}\right) &= n\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$s = s(0), \quad p = \left. \frac{dp}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad n = \left. \frac{dn}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Несложным преобразованием система (9) приводится к одному уравнению второго порядка — «эквивалентному осциллятору»

$$M\alpha'' - (s - p)\alpha' - \left(\frac{Mn}{J} + \frac{sp}{M}\right)\alpha = 0 \quad (10)$$

Легко видеть, что для любого тела с достаточно «малым» аэродинамическим качеством, то есть при $|p| < s$, независимо от знаков коэффициентов n , p тривиальное решение уравнения (10) экспоненциально неустойчиво, так как при этом условии в модели (10) осциллятора присутствует «антидемпфирование».

Заметим, что экспоненциальный рост ω не означает обязательного роста Ω , так как $\Omega = \omega V$, а V экспоненциально убывает.

Обсудим вкратце влияние переменности плотности вдоль траектории на характер устойчивости. Эта переменность проявляется лишь в аэродинамических коэффициентах в уравнениях (9). В результате того же преобразования система (9) сводится к одному уравнению вида

$$M\alpha'' - (s - p)\alpha' - \left(\frac{Mn}{J} + \frac{sp}{M} - p'\right)\alpha = 0.$$

Отсюда видно, что при $|p| < s$ в эквивалентном осцилляторе также присутствует антидемпфирование, но уже переменное.

6. Возвратимся теперь к случаю общей формы. Как известно из качественной теории дифференциальных уравнений, экспоненциальная неустойчивость точки покоя динамической системы относится к числу грубых свойств. Поясним это подробнее.

Пусть $n(0)$ отлично от 0, но достаточно мало, так что уравнение (7) допускает решение $\alpha_* \neq 0$, где α_* тоже мало по абсолютной величине. Таким образом, по сравнению с рассмотренным выше частным случаем точка покоя (α_*, ω_*) динамической системы (4), (5) «смещается» из начала координат. Коэффициенты линейного уравнения возмущённого движения суть непрерывные функции параметра α_* . Поэтому, пока они мало отличаются от коэффициентов системы (9), экспоненциальная неустойчивость точки покоя (α_*, ω_*) сохраняется.

Закключение. Таким образом, для тела «общего положения» режим поступательного прямолинейного торможения практически невозможен. В некотором смысле его «заменяет» режим криволинейного торможения, но и тот, скорее всего, неустойчив, так как свойство неустойчивости прямолинейного движения «наследуется» траекториями, отвечающими малым значениям α_* и имеющими в соответствии с (8) малую кривизну.

Если отказаться от предположения о плоскопараллельности движения тела, учесть переменность плотности воздуха вдоль траектории, унос массы, то анализ существенно усложняется, но выводы, в основном, сохраняются.

Авторы выражают признательность профессорам Г. А. Тирскому и В. П. Стулову, обратившим их внимание на обсуждаемую проблему.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 03-01-00190 и 04-01-00505-а) и программы «Университеты России».

Литература

- [1] Жуковский Н. Е. О парении птиц // Собр. соч. Т. 4. — М.; Л.: Гостехиздат, 1940. — С. 5—34.
- [2] Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. — М.: Наука; Физматлит, 1970.
- [3] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

- [4] Окунев Ю. М. Сопоставление двух задач о движении тела в среде // Теоретическая механика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. — С. 133—137.
- [5] Эйлер Л. Исследования по баллистике. — М.: Физматгиз, 1961.

