

Устойчивость вращения вертушки в потоке среды

В. А. ПРИВАЛОВ, О. Г. ПРИВАЛОВА

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

e-mail: privalova@imec.msu.ru

УДК 531.36

Ключевые слова: четырёхлопастная вертушка в потоке, авторотация, подъёмная сила, лобовое сопротивление, перманентное вращение, устойчивость.

Аннотация

Изложены результаты исследования устойчивости перманентного вращения четырёхлопастной вертушки на невесомом стержне в потоке однородной среды. Стержень вращается относительно неподвижной точки, где находится шаровой шарнир. На другом конце стержня имеется второй шаровой шарнир, вокруг которого вращается вертушка. Исследована устойчивость перманентного вращения вертушки, при котором направление стержня и оси динамической симметрии вертушки совпадает с направлением потока. Проведено сопоставление со случаем одного шарнира. Показано, что увеличение числа степеней свободы тела приводит к «сокращению» проекции области устойчивости на сопоставимое подпространство параметров.

Abstract

V. A. Privalov, O. G. Privalova, Stability of rotation of a vane in a flow, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 73–95.

The results of investigation of stability of permanent rotation of a four-blade vane on a weightless rod in a flow of homogeneous medium are discussed. The rod rotates about a fixed point where a spherical joint is situated. The vane rotates about the second joint fixed at the other end of the rod. Stability of permanent rotation of the vane is studied when the rod coincides with the dynamic symmetry axis of the vane. The results are compared with the one-joint case. It is shown that increasing the number of degrees of freedom leads to “diminishing” the stability domain projection onto the corresponding subspace of parameters.

Введение

В Институте механики проводились и проводятся в настоящее время экспериментальные и теоретические исследования движения тела, вращающегося в среде. Интерес к этой проблеме обусловлен рядом практических приложений, таких как тормозной вращающийся парашют (ротошют), ветроэнергетические двигатели, бумеранг. Экспериментальные исследования вращающегося парашюта проводились в лаборатории сверхзвуковой аэродинамики с целью выяснения

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 73–95.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*

Издательский дом «Открытые системы»

его тормозных свойств, определялись его сопротивление и характер устойчивости в зависимости от количества секторов (лепестков) (см. [1]). Другое устройство (так называемая вертушка) продувалась в аэродинамической трубе с целью выяснения её динамических свойств. В частности, определялся характер набора угловой скорости в зависимости от вязкого и сухого трения (см. [6]).

Экспериментальные работы дополнялись теоретическими. Например, в [4] проведено исследование перманентного вращения авторотирующего тела, представляющего собой четырёхлопастную вертушку. Эта вертушка помещалась в поток аэродинамической трубы и подвешивалась с помощью стержня, относительно которого вертушка могла вращаться, другой конец стержня был закреплён неподвижно в шаровом шарнире. Дело в том, что ротожёт с ростом скорости потока начинал прецессировать, причём прецессии были противоположного знака. В [4], кроме условий установившегося перманентного вращения, указаны возможные причины потери устойчивости и возникновения прецессии. В [5] рассматривается свободное падение авторотирующего тела. Были получены условия, при которых тело совершает перманентное вращение относительно вертикали, а его центр масс движется равномерно относительно неё.

Особое место в ряду задач о движении вращающегося тела в атмосфере занимает исследование динамики бумеранга [3]. Была построена математическая модель его движения и показано, что форма траекторий, полученных численным способом, совпадает с экспериментальными траекториями. В данной работе рассматривается движение вертушки в потоке аэродинамической трубы, подвешенной на невесомом стержне, на обоих концах которого находятся шаровые шарниры. Шаровой шарнир на одном конце стержня закреплён неподвижно, а на другом вращается вертушка. Исследуется перманентное движение такой вертушки.

1. Математическая модель внешнего силового воздействия

Рассмотрим динамически симметричное тело в потоке однородной среды, скорость V которого постоянна по величине и направлению. Центр масс G этого тела поместим в сферический шарнир, находящийся на конце невесомого стержня. Другой конец стержня закрепим в неподвижном сферическом шарнире O (рис. 1).

Предположим, что воздействие среды на тело сосредоточено на четырёх лопастях, расположение которых на теле обеспечивает его авторотацию — вращение вокруг оси симметрии.

В отличие от ситуации, рассмотренной в [4], плоскость Q , в которой расположены центры лопастей вертушки, произвольно ориентирована относительно стержня l .

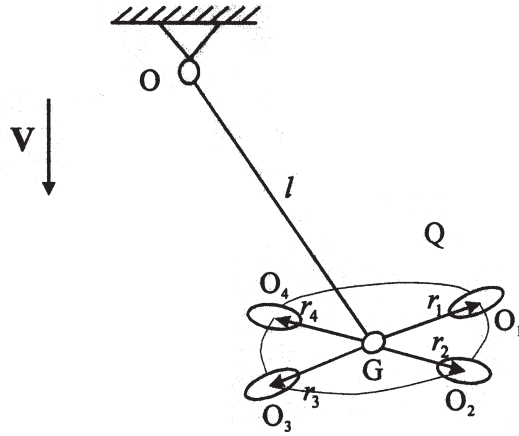


Рис. 1

Будем считать, что распределённая система сил, действующих на i -ю лопасть, эквивалентна равнодействующей $\mathbf{R}_i$, приложенной к фиксированной точке O_i (центру давления) i -й лопасти. Вектор $\mathbf{R}_i$ представим в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих: $\mathbf{W}_i$ — силы лобового сопротивления и $\mathbf{Y}_i$ — боковой (подъёмной) силы.

Через $\mathbf{V}_i$ обозначим вектор скорости точки O_i относительно набегающего потока. Тогда векторы $\mathbf{W}_i$ и $\mathbf{Y}_i$ запишем в виде

$$\mathbf{W}_i = -\frac{1}{2}\rho c_x(\alpha_i)S\mathbf{V}_i\mathbf{V}_i,$$

$$\mathbf{Y}_i = \frac{1}{2}\rho c_y(\alpha_i)S(\mathbf{V}_i \times \mathbf{n}_i) \times \frac{\mathbf{V}_i}{\cos \alpha_i},$$

где ρ — плотность среды, S — характерная площадь лопасти, $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$ — безразмерные аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъёмной силы, являющиеся функциями текущего значения угла атаки α . Углом атаки α_i i -й лопасти назовём угол между некоторой плоскостью, жёстко связанной с этой лопастью и вектором $\mathbf{V}_i$ (рис. 2). (Положение этой плоскости удобно выбирать так, чтобы коэффициент $c_y(\alpha)$ подъёмной силы обращался в нуль при нулевом значении угла атаки, а коэффициент $c_x(\alpha)$ принимал значение, близкое к своему минимуму.)

Для определения связи угла атаки α_i с параметрами движения тела нужно спроектировать скорость $\mathbf{V}_i$ на направление нормали $\mathbf{n}_i$. Последнее даст соотношение

$$-V_i \sin \alpha_i = (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_i). \quad (1.1)$$

Полагая размер лопасти заметно меньшим характерного размера тела, пренебрежем моментом сил воздействия среды относительно точки O_i . Разместим

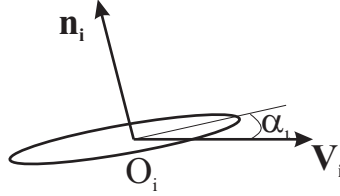


Рис. 2

лопасти таким образом, чтобы точки O_i оказались в плоскости, ортогональной оси симметрии тела, на расстоянии r от этой оси и образовывали вершины квадрата.

Равнодействующая аэродинамического воздействия на i -ю лопасть есть

$$\mathbf{W}_i + \mathbf{Y}_i = \frac{1}{2} \rho c_x(\alpha_i) S \mathbf{V}_i \left[-\mathbf{V}_i + k(\alpha_i) (\mathbf{V}_i \times \mathbf{n}_i) \times \frac{\mathbf{V}_i}{\cos \alpha_i} \right],$$

где $k(\alpha_i)$ — аэродинамическое качество i -й лопасти.

Выражение для равнодействующей можно преобразовать к виду

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{W}_i + \mathbf{Y}_i = \frac{1}{2} \rho c_x(\alpha_i) S \mathbf{V}_i \left[\mathbf{n}_i k(\alpha_i) \frac{\mathbf{V}_i}{\cos \alpha_i} - \mathbf{V}_i (1 - k(\alpha_i) \operatorname{tg}(\alpha_i)) \right]. \quad (1.2)$$

Равнодействующая даёт момент относительно центра масс авторотирующего тела

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \mathbf{r}_i \times (\mathbf{W}_i + \mathbf{Y}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \rho c_x(\alpha_i) S \mathbf{V}_i \left[(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i) k(\alpha_i) \frac{V_i}{\cos \alpha_i} - \mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i (1 - k(\alpha_i) \operatorname{tg} \alpha_i) \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор центра давления i -й лопасти относительно центра масс тела.

Выражения для сумм четырёх равнодействующих $\mathbf{R}_i$ (1.2) и для сумм четырёх моментов $\mathbf{M}_i$ (1.3) ($i = 1, \dots, 4$) представляют собой математическую модель аэродинамического воздействия на авторотирующее тело.

Мы пренебрежём весом вертушки по сравнению с аэродинамическими силами.

2. Кинематические соотношения

Ориентацию стержня определим с помощью углов φ, θ, γ : φ и θ — углы Крылова, характеризующие положение стержня в системе координат $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, вращающейся с угловой скоростью $\dot{\gamma}$ относительно координатной оси ζ_1 , проходящей через точку O неподвижного шарнира и параллельной вектору V потока (рис. 3).

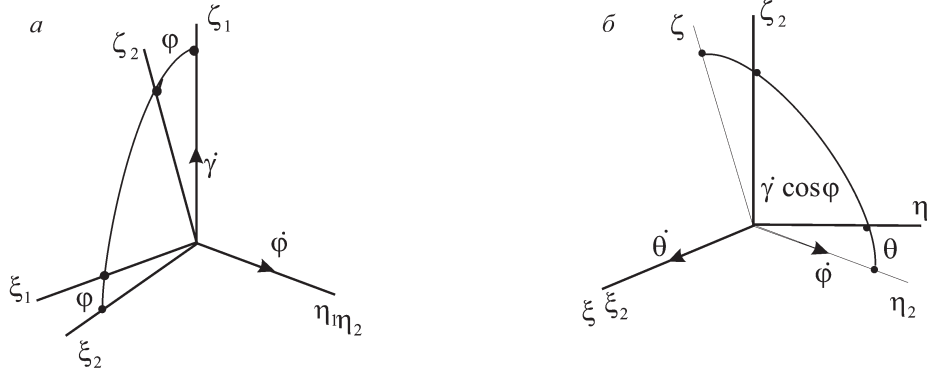


Рис. 3

Угловая скорость стержня в проекциях на оси системы координат $\xi\eta\zeta$ имеет вид

$$\omega_{\xi\eta\zeta} = |\dot{\theta} - \dot{\gamma} \sin \varphi, \dot{\gamma} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \cos \theta, \dot{\gamma} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\varphi} \sin \theta|. \quad (2.1)$$

Скорость потока в этой системе координат представляется как

$$\mathbf{V} = [-V \sin \varphi, V \cos \varphi \sin \theta, V \cos \varphi \cos \theta]. \quad (2.2)$$

Скорость центра масс тела записывается как $\mathbf{V}_G = \omega \times \mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ — радиус-вектор центра масс тела относительно точки O , ω — угловая скорость системы координат $\xi\eta\zeta$. Тогда проекции скорости центра масс на оси ξ , η , ζ будут иметь вид

$$V_\xi = -l\omega_\eta, \quad V_\eta = l\omega_\xi, \quad V_\zeta = 0. \quad (2.3)$$

Скорость центра масс относительно потока в системе координат $\xi\eta\zeta$ записывается следующим образом:

$$V_{\xi\eta\zeta} = [-l\omega_\eta + V \sin \varphi, l\omega_\xi - V \cos \varphi \sin \theta, -V \cos \varphi \cos \theta]. \quad (2.4)$$

Для определения ориентации тела относительно системы $\xi\eta\zeta$ введём главную центральную систему координат xyz с помощью двух углов ψ и ϑ (рис. 4).

Начало этой системы поместим на свободный конец стержня в шаровой шарнир. Ось z направим по оси динамической симметрии тела, а оси x и y выберем так, что на них будут лежать центры давления лопастей. Проекции абсолютной угловой скорости главной центральной системы координат имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\vartheta} + (\dot{\theta} + \dot{\gamma} \sin \varphi) \cos \psi - (\dot{\gamma} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\varphi} \sin \theta) \sin \psi, \\ \omega_y &= [(\dot{\gamma} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\varphi} \sin \theta) \cos \psi + (\dot{\theta} - \dot{\gamma} \sin \varphi) \sin \psi] \sin \vartheta + \\ &\quad + (\dot{\psi} + \dot{\gamma} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \vartheta, \\ \omega_z &= [(\dot{\gamma} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\varphi} \sin \theta) \cos \psi + (\dot{\theta} - \dot{\gamma} \sin \varphi) \sin \psi] \cos \vartheta - \\ &\quad - (\dot{\psi} + \dot{\gamma} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} \cos \theta) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

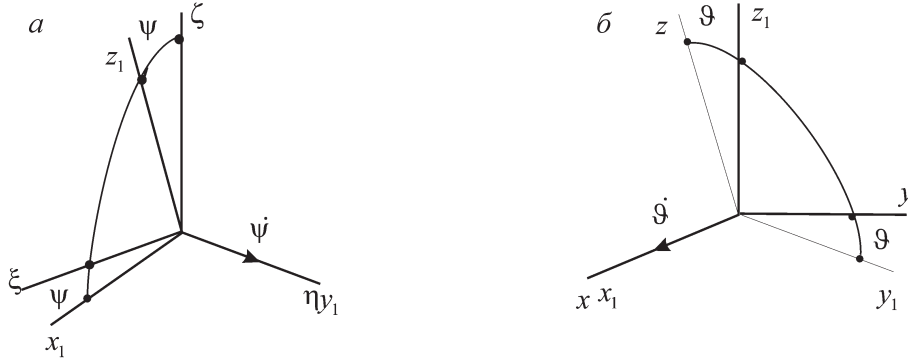


Рис. 4

Проекции скорости центра масс вертушки относительно потока воздуха представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 V_x &= (-l\omega_\eta + V \sin \varphi) \cos \psi + V \cos \varphi \cos \theta \sin \psi, \\
 V_y &= (l\omega_\xi - V \cos \varphi \sin \theta) \cos \vartheta + \\
 &\quad + [(-l\omega_\eta + V \sin \varphi) \sin \psi - V \cos \varphi \cos \theta \cos \psi] \sin \vartheta, \\
 V_z &= -(l\omega_\xi - V \cos \varphi \sin \theta) \sin \vartheta + \\
 &\quad + [(-l\omega_\eta + V \sin \varphi) \sin \psi - V \cos \varphi \cos \theta \cos \psi] \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выпишем проекции радиус-вектора i -й лопасти и вектора нормали на оси системы координат xyz :

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} r \cos \psi_i \\ r \sin \psi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} -\cos \beta \sin \psi_i \\ \cos \beta \cos \psi_i \\ \sin \beta \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Здесь ψ_i — угол, принимающий для $i = 1, 2, 3, 4$ значения $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/2$, $\psi_3 = \pi$, $\psi_4 = -\pi/2$ соответственно и определяющий положение точек O_i ; β — угол между нормалью n_i и плоскостью xOy , т. е. угол разворота i -й лопасти относительно соответствующей оси (рис. 5).

Проекции вектора скорости i -й лопасти на оси главной центральной системы координат имеют вид

$$\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} V_x - r\Omega_z \sin \psi_i \\ V_y + r\Omega_z \cos \psi_i \\ V_z + r(\Omega_x \sin \psi_i - \Omega_y \cos \psi_i) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Для определения текущего значения угла α_i в соотношение (1.2) подставим выражения для n_i (2.7) и V_i (2.8). В результате получим

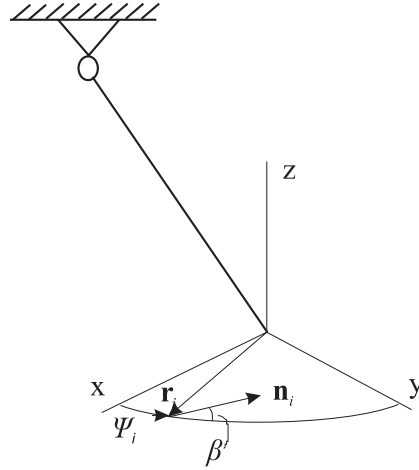


Рис. 5

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_i) &= V_i \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_i \right) = -V_i \sin \alpha_i = -(V_x - r\omega_z \sin \psi_i) \cos \beta \sin \psi_i + \\
 &+ (V_y - r\omega_z \sin \psi_i) \cos \beta \sin \psi_i + [V_z + r(\omega_x \sin \psi_i - \Omega \cos \psi_i)] \sin \beta.
 \end{aligned}$$

3. Уравнения движения

Уравнения движения центра масс тела имеют следующий вид:

$$m \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = m(\dot{\mathbf{V}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_G) = \mathbf{R} + \mathbf{N}.$$

Выпишем проекции этого векторного уравнения на оси системы координат $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{V}_\xi - \omega_\zeta V_\eta) &= R_\xi, \\
 m(\dot{V}_\eta + \omega_\zeta V_\xi) &= R_\eta, \\
 m(\omega_\xi V_\eta - \omega_\eta V_\xi) &= R_\zeta + N_\zeta,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где m — масса тела; R_ξ, R_η, R_ζ — проекции аэродинамического воздействия R на оси ξ, η, ζ ; N_ζ — воздействие стержня на тело. Через A и C обозначим моменты инерции тела. Тогда динамические уравнения тела относительно центра масс будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (C - A) &= M_x, \\
 A\dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z (C - A) &= M_y, \\
 C\dot{\Omega} &= M_z,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где M_x, M_y, M_z — проекции главного аэродинамического момента, приложенного к телу, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции абсолютной угловой скорости тела, Ω — угловая скорость собственного вращения тела.

4. Перманентное вращение

Будем рассматривать перманентное вращение, при котором ось динамической симметрии тела и направление невесомого стержня совпадают между собой и совпадают с направлением вектора скорости потока среды. В результате для углов, определяющих ориентацию оси симметрии, будем иметь

$$\varphi = \theta = 0, \quad \psi = \vartheta = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\vartheta} = 0. \quad (4.1)$$

В данном случае модули скоростей V_i центров давления O_i относительно среды и углы α_i одинаковы для всех лопастей и равны V_i и α соответственно. Для них имеют место кинематические соотношения

$$r\Omega = -V_i \sin(\alpha - \beta), \quad V = -V_i \cos(\alpha - \beta). \quad (4.2)$$

В результате подстановки в формулы (1.2), (1.3) для равнодействующей $\mathbf{R}_i$ аэродинамических сил и их моментов $\mathbf{M}_i$ выражений (2.7), (2.8) для r_i , n_i , V_i и преобразований при учёте (4.1), (4.2) получим проекции сил и моментов суммарного воздействия среды:

$$\begin{aligned} M_x = M_y = 0, \quad R_x = R_y = 0, \\ R_z = -2\rho c_x(\alpha_0)SV_iV[1 - k(\alpha_0)\operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta)], \\ M_z = -2r\rho c_x(\alpha_0)SV_iV[k(\alpha_0) + \operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если величина $\alpha = \alpha_0$ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$k(\alpha_0) + \operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta) = 0, \quad (4.4)$$

то момент M_z равен нулю. При этом углу атаки α_0 соответствует постоянное значение угловой скорости Ω_0 тела

$$r\Omega_0 = V \operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta).$$

5. Уравнения возмущённого движения

Для анализа устойчивости перманентного вращения (4.1) составим уравнения возмущённого движения. Для этого проведём линеаризацию и преобразование выражения внешних сил (1.2) и моментов (1.3), полных производных от количества движения и момента количества движения. В результате получится совокупность уравнений, которая состоит из двух независимых между собой подсистем. Одна из них описывает движение оси симметрии тела, а другая вращение относительно этой оси.

5.1. Устойчивость по отношению к возмущениям угловой скорости

Третье уравнение (3.2), описывающее собственное вращение тела, имеет вид

$$C\dot{\Omega} = 2r\rho c_x(\alpha)SV_i^2 \cos(\alpha - \beta)[k(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)].$$

Подставим в это уравнение $\Omega_0 + \Delta\Omega$, где Ω_0 — постоянное значение угловой скорости собственного вращения, соответствующей углу атаки $\alpha = \alpha_0$. Тогда для вариации Ω имеем уравнение

$$C\Delta\dot{\Omega} = 2r\rho c_x(\alpha_0)SV_{i0}^2[1 + k'(\alpha_0)\cos^2(\alpha - \beta)]\frac{\Delta\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad (5.1.1)$$

Так как $r\Omega_0 = V \operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta)$, для приращения $\Delta\alpha$ имеем соотношение

$$\Delta\alpha = -(k_0\Delta V - r\Delta\Omega)\frac{\cos(\alpha_0 - \beta)}{V_0}. \quad (5.1.2)$$

Приращение скорости ΔV в случае перманентного вращения равно нулю. Подставляя выражение (5.1.2) для $\Delta\alpha$ в уравнение (5.1.1), получим

$$C\Delta\dot{\Omega} = 2r^2\rho c_x(\alpha_0)SV_{i0}[1 + k'(\alpha_0)\cos^2(\alpha - \beta)]\Delta\Omega.$$

Отсюда видно, что если

$$1 + k'(\alpha_0)\cos^2(\alpha - \beta) > 0, \quad (5.1.3)$$

то $\Delta\Omega \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а угловая скорость Ω асимптотически стремится к стационарному значению Ω_0 .

Геометрический смысл этого условия состоит в том, что в точке пересечения кривых $k(\alpha)$ и $-\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, соответствующей решению уравнения (4.4), угол наклона касательной к графику функции $k(\alpha)$ должен быть больше угла наклона касательной к графику функции $-\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. Типичное поведение $k(\alpha)$ для плоской пластинки и график функции $-\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ представлены на рис. 6. На участке роста функции $k(\alpha)$, в том числе при $\alpha = \alpha_0$, обеспечивается максимум качества $k(\alpha)$, условие (5.1.3) выполняется. Оно может нарушаться на интервале, где $k(\alpha)$ убывает.

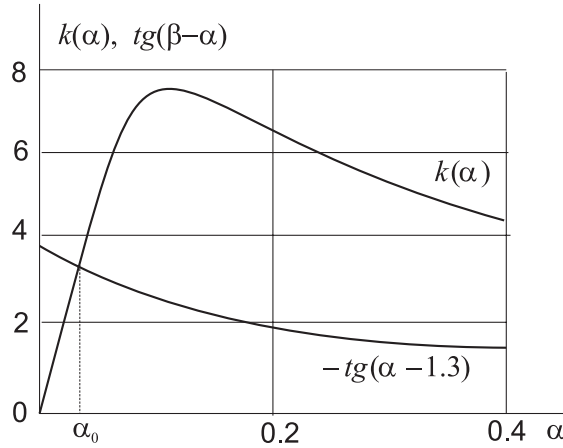


Рис. 6

5.2. Устойчивость по отношению к возмущениям ориентации стержня и оси тела

Систему уравнений, описывающих малые колебания оси симметрии тела и ориентации соединительного стержня, а также малые изменения направления вектора скорости центра масс, выпишем в комплексных переменных

$$\begin{aligned}\mu &= \theta + i\varphi, & v &= V_\xi + iV_\eta, \\ \lambda &= \theta + \vartheta + i(\varphi + \psi), & \Omega &= \omega_x + i\omega_y = \dot{\lambda} + i\dot{\gamma}\lambda.\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

Уравнения возмущённого движения центра масс имеет вид

$$\begin{aligned}m(\dot{V}_\xi - \omega_\zeta V_\eta) &= \Delta R_\xi, \\ m(\dot{V}_\eta - \omega_\zeta V_\xi) &= \Delta R_\eta.\end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на i и сложим с первым. Имеем

$$m[\dot{V}_\xi + i\dot{V}_\eta + \omega_\zeta(iV_\xi - V_\eta)] = \Delta R_\xi + i\Delta R_\eta.$$

Воспользовавшись обозначениями (5.2.1), получим

$$m(\dot{v} + i\omega_\zeta v) = \Delta R_\xi + i\Delta R_\eta. \quad (5.2.2)$$

Кинематические уравнения, связывающие углы ориентации стержня со скоростью центра масс тела, получим из соотношений (2.1), которые в малых отклонениях от рассматриваемого стационарного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\theta} - \dot{\gamma}\varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\varphi} + \dot{\gamma}\theta.\end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на i и сложим с первым, а затем перейдём к новым переменным (5.2.1). Получим следующее уравнение:

$$\omega_\xi + i\omega_\eta = \dot{\theta} + i\varphi + \dot{\gamma}(i\theta - \varphi) = \dot{\mu} + i\dot{\gamma}\mu.$$

Используя формулы (2.3), будем иметь

$$\dot{\mu} + i\dot{\gamma}\mu = -\frac{iv}{l}. \quad (5.2.3)$$

Таким же образом получим кинематические уравнения для тела, используя соотношения (2.5) и (5.2.1):

$$\dot{\lambda} + i\dot{\gamma}\lambda = \Omega. \quad (5.2.4)$$

Уравнения движения относительно центра масс в комплексном виде получим из уравнений (3.2), используя тот же подход, что и ранее. С учётом соотношений (5.2.1) будем иметь

$$\Delta\dot{\Omega} + i\omega_z\Omega(A - C) = \Delta M_x + i\Delta M_y. \quad (5.2.5)$$

Чтобы упростить систему уравнений возмущённого движения (5.2.2)–(5.2.5), перейдём к сопутствующей системе координат с помощью замен

$$\tilde{v} = ve^{-i\omega_{\zeta 0}t}, \quad \tilde{\mu} = \mu e^{-i\dot{\gamma}_0 t}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda e^{-i\dot{\gamma}_0 t}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega e^{-i\omega_{z 0}t},$$

где $\dot{\gamma}_0 = \omega_{\zeta 0} = \omega_{z0}$. В результате уравнения в отклонениях примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mu}} &= -\frac{i\tilde{v}}{l}, \\ m\dot{\tilde{v}} &= \Delta R_\xi + i\Delta R_\eta, \\ \dot{\tilde{\lambda}} &= \tilde{\Omega}, \\ A\dot{\tilde{\Omega}} + i\omega_{z0}C\tilde{\Omega} &= \Delta M_x + i\Delta M_y,\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

где

$$\Delta R_\xi + i\Delta R_\eta = \Delta R_x + i\Delta R_y + \Delta R_z(\psi - i\vartheta) = \Delta R_x + \Delta R_y + i\Delta R_z(\mu - \lambda).$$

В дальнейшем символ $\sim$ будем опускать.

Вариации равнодействующей $\Delta \mathbf{R}_i$ и момента всех сил относительно центра масс $\Delta \mathbf{M}_i$ в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \mathbf{R}_i}{0.5c_x(\alpha_0)\rho S V_{i0}} &= -(1 - k_0 \operatorname{tg} \alpha_0)\Delta \mathbf{V}_i + \frac{\mathbf{n}_i k_0 \Delta \mathbf{V}_i}{\cos \alpha_0} + \\ &+ \frac{k_0 \Delta \alpha_i [\mathbf{n}_i V_{i0} \sin \alpha_0 + \mathbf{V}_{i0}]}{\cos^2 \alpha_0} + \frac{k' \Delta \alpha_i [\mathbf{n}_i V_{i0} + \mathbf{V}_{i0} \sin \alpha_0]}{\cos \alpha_0} + \\ &+ \left[\frac{\mathbf{n}_i k_0 V_{i0}}{\cos \alpha_0} - \mathbf{V}_{i0}(1 - k_0 \operatorname{tg} \alpha_0) \right] \frac{\Delta(c_{xi} V_i)}{c_{x0} V_{i0}},\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \mathbf{M}_i}{0.5c_x(\alpha_0)\rho S V_{i0}} &= -(1 - k_0 \operatorname{tg} \alpha_0)\Delta(\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i) + \\ &+ \frac{k_0 \Delta V_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i)}{\cos \alpha_0} + \frac{k_0 \Delta \alpha_i [(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i) V_{i0} \sin \alpha_0 + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_{i0})]}{\cos^2 \alpha_0} + \\ &+ \frac{k' \Delta \alpha_i [(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i) V_{i0} + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_{i0}) \sin \alpha_0]}{\cos \alpha_0} + \\ &+ \left[\frac{(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i) k_0 V_{i0}}{\cos \alpha_0} - (\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_{i0})(1 - k_0 \operatorname{tg} \alpha_0) \right] \frac{\Delta(c_{xi} V_i)}{c_{x0} V_{i0}}.\end{aligned}\tag{5.2.8}$$

Выпишем вспомогательные соотношения для переменных, входящих в формулы (5.2.7) и (5.2.8), используя соотношения (2.1)–(2.8):

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i = \begin{vmatrix} r \sin \beta \sin \psi_i \\ -r \sin \beta \cos \psi_i \\ r \cos \beta \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i &= \begin{vmatrix} r \sin \psi_i [V_z + r(\omega_x \sin \psi_i - \omega_y \cos \psi_i)] \\ -r \cos \psi_i [V_z + r(\omega_x \sin \psi_i - \omega_y \cos \psi_i)] \\ r \cos \psi_i (V_y + r\omega_z \cos \psi_i) - r \sin \psi_i (V_x - r\omega_z \sin \psi_i) \end{vmatrix}, \\
\Delta \mathbf{V}_i &= \begin{vmatrix} V_x - r\Delta\Omega_z \sin \psi_i \\ V_y + r\Delta\Omega_z \cos \psi_i \\ \Delta V_z + r(\Omega_x \sin \psi_i - \Omega_y \cos \psi_i) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_{i0} = \begin{vmatrix} rV_{z0} \sin \psi_i \\ -rV_{z0} \cos \psi_i \\ r^2\Omega_{z0} \end{vmatrix}, \\
\Delta V_i &= (V_x \sin \psi_i - V_y \cos \psi_i) \sin(\alpha - \beta) - \\
&\quad - [\Delta V_z + r(\omega_x \sin \psi_i - \omega_y \cos \psi_i)] \cos(\alpha - \beta) - r\Delta\omega_z \sin(\alpha - \beta), \\
V_i \sin \alpha_i &= V_x \cos \beta \sin \psi_i - V_y \cos \beta \cos \psi_i - r\omega_z \cos \beta - V_z \sin \beta - \\
&\quad - r(\omega_x \sin \psi_i - \omega_y \cos \psi_i) \sin \beta, \\
\Delta(V_i \sin \alpha_i) &= (V_x \sin \psi_i - V_y \cos \psi_i - r\Delta\omega_z) \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \\
&\quad + [\Delta V_z + r(\omega_x \sin \psi_i - \omega_y \cos \psi_i)] \cos \alpha \sin(\alpha - \beta), \\
V_i \Delta \alpha_i &= (V_x \sin \psi_i - V_y \cos \psi_i - r\Delta\omega_z) \cos(\alpha - \beta) + \\
&\quad + [\Delta V_z + r(\omega_x \sin \psi_i - \omega_y \cos \psi_i)] \sin(\alpha - \beta).
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

В качестве примера приведём выражения для приращения скорости ΔV_i для каждой из лопастей $i = 1, \dots, 4$, учитывая значения ψ_i (см. раздел 2):

$$\begin{aligned}
\Delta V_1 &= -V_y \sin(\alpha - \beta) + r\omega_y \cos(\alpha - \beta) - \Delta V_z \cos(\alpha - \beta) - r\Delta\omega_z \sin(\alpha - \beta), \\
\Delta V_3 &= V_y \sin(\alpha - \beta) - r\omega_y \cos(\alpha - \beta) - \Delta V_z \cos(\alpha - \beta) - r\Delta\omega_z \sin(\alpha - \beta), \\
\Delta V_2 &= V_x \sin(\alpha - \beta) - r\omega_x \cos(\alpha - \beta) - \Delta V_z \cos(\alpha - \beta) - r\Delta\omega_z \sin(\alpha - \beta), \\
\Delta V_4 &= -V_x \sin(\alpha - \beta) + r\omega_x \cos(\alpha - \beta) - \Delta V_z \cos(\alpha - \beta) - r\Delta\omega_z \sin(\alpha - \beta).
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Вариации равнодействующей и момента всех сил, действующих на систему, есть $\Delta R = \sum_{i=1}^4 \Delta R_i$ и $\Delta M = \sum_{i=1}^4 \Delta M_i$ соответственно. Тогда, используя соотношения (5.2.9), (5.2.10), запишем приращения равнодействующей ΔR и момента ΔM в комплексном виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta M &= \Delta M_x + i\Delta M_y, \\
\frac{\Delta M}{c_x \rho S V_{i0}} &= -\Omega r^2 \left[2 + k k' \cos^2(\alpha - \beta) + \frac{k c'_x}{c_x} \right] - v k r \left[2 - k' \cos^2(\alpha - \beta) - \frac{c'_x}{k c_x} \right], \\
\frac{\Delta(R_x + i R_y)}{c_x \rho S V_{i0}} &= -(v - i\lambda V)[2 - k \operatorname{tg} \alpha + k' \cos^2(\alpha - \beta)] + k r \Omega [1 + k' \cos^2(\alpha - \beta)].
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Для минимизации размерности пространства параметров этой системы проведём нормализацию переменных. В качестве единицы новой независимой переменной

выберем $T = A/(r^2 c_x \rho S V_{i0})$. Видно, что величина T пропорциональна характерному времени для так называемого быстрого изменения угловой скорости ω (см. [2]). Подставляя приращения сил и моментов (5.2.11) в уравнения (5.2.6) и учитывая, что на установившемся движении $\dot{\gamma} = 0$, получим уравнения возмущённого движения системы в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} - \omega &= 0, \\ \dot{\omega} + \left[(2 + k\xi) - i \frac{C}{A} \frac{k \cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \right] \omega + u(2k - \xi) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} &= 0, \\ \dot{\mu} + \lambda \frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} - i u \frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} &= 0, \\ \dot{i} + \omega \left\{ i - \frac{k[1 + k' \cos^2(\alpha - \beta)] c_x \eta}{\cos(\alpha - \beta)} \right\} + i(\lambda - \mu) \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)} + \\ + u \left[\frac{2 - k \operatorname{tg} \alpha + k' \cos^2(\alpha - \beta)}{\chi} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

где

$$\xi = \frac{c_x c'_x + c_y c'_y}{c_x^2 + c_y^2}, \quad \eta = \frac{\rho S r^2}{m}, \quad \chi = \frac{m r^2}{A}.$$

Коэффициенты системы (5.2.12) формируются как функции аэродинамических параметров при $\alpha = \alpha_0$, а также зависят от величин C/A , χ , η , r/l , содержащих массовые и геометрические характеристики тела.

6. Исследование устойчивости перманентного вращения

Характеристическое уравнение системы (5.2.12) имеет вид

$$a_0 \lambda^4 + (a_1 + b_1 i) \lambda^3 + (a_2 + b_2 i) \lambda^2 + (a_3 + b_3 i) \lambda + b_4 i = 0, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 2 + k\xi + \frac{2 - k \operatorname{tg} \alpha + k' \cos^2(\alpha - \beta)}{\chi}, \\ a_2 &= (2 + k\xi) \frac{2 - k \operatorname{tg} \alpha + k' \cos^2(\alpha - \beta)}{\chi} + (2k - \xi) \frac{k[1 + k' \cos^2(\alpha - \beta)]}{\chi} + \\ &+ \frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= (2 + k\xi) \frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)}, \\
b_1 &= -\frac{C}{A} \frac{k \cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta}, \\
b_2 &= -\frac{C}{A} \frac{k \cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2 - k \operatorname{tg} \alpha + k' \cos^2(\alpha - \beta)}{\chi} - (2k - \xi) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta}, \\
b_3 &= -\frac{C}{A} \frac{k \cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)} - \\
&\quad - (2k - \xi) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)}, \\
b_4 &= -\frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)} (2k - \xi) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta}.
\end{aligned}$$

6.1. Об одном свойстве характеристического уравнения

При нулевом значении свободного члена

$$b_4 = -(2k - \xi) \nu \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} = 0$$

характеристическое уравнение (6.1) после преобразований удаётся представить в виде

$$\begin{aligned}
&\lambda \left[\lambda + 2 + k\xi - i \frac{C}{A} \frac{k \cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \right] \times \\
&\times \left[\lambda^2 + \frac{2 - k \operatorname{tg} \alpha + k' \cos^2(\alpha - \beta)}{\chi} \lambda + \frac{r}{l} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{c_x \chi \eta} \frac{2}{\chi \cos^2(\alpha - \beta)} \right] = 0. \quad (6.1.1)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что один корень λ_1 нулевой, а три ненулевых корня имеют отрицательные действительные части.

Исследуем движение вблизи множества $2k - \xi = 0$. Предположим, что свободный член (6.1) — бесконечно малая величина ε . Тогда согласно теореме о непрерывной зависимости корней характеристического уравнения от его коэффициентов корень λ_1 будет мал по модулю, а действительные части остальных корней изменяются мало и сохраняют свой знак. Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости для малого по модулю корня, будем иметь $(a_3 + ib_3)\lambda_1 + ib_4 = 0$. Разрешим это уравнение относительно λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{-b_4(b_3 + ia_3)}{b_3^2 + a_3^2}.$$

При малом $2k - \xi > 0$ все действительные части корней характеристического уравнения (6.1) отрицательные, а при $2k - \xi < 0$ один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть. Таким

образом, множество параметров, при котором $2k - \xi = 0$, является частью границы области устойчивости. При малом положительном значении $2k - \xi$ обратная прецессия затухает, а при $2k - \xi < 0$ развивается прямая прецессия.

6.2. Условия устойчивости

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости рассматриваемого установившегося перманентного вращения получим как условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (6.1). Эти условия представляют собой ограничения на соответствующие определители из коэффициентов уравнения (6.1), для построения которых используются теоремы Чеботарёва—Меймана [8]. Мы приведём формулировки этих теорем.

Определение ([8]). Будем называть H -полиномом ($\tilde{H}$ -полиномом) полином, все корни которого имеют отрицательные (неположительные) вещественные части.

Будем называть W -полиномом ($\tilde{W}$ -полиномом) полином, все корни которого имеют положительные (неотрицательные) мнимые части.

Теорема 1 ([8]). Чтобы полином $f(z)$ был H -полиномом ($\tilde{H}$ -полиномом), необходимо и достаточно, чтобы полином $F(z) = f(iz)$ был W -полиномом ($\tilde{W}$ -полиномом).

Теорема 2 ([8]). Чтобы полином

$$F(z) = g(z) + ih(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n + i(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$$

был W -полиномом, необходимо и достаточно, чтобы при $\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$ выражения

$$\Delta_{2\mu+2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{2\mu+1} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{2\mu+1} \\ 0 & a_1 & \dots & a_{2\mu} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{\mu+1} \\ 0 & 0 & \dots & b_{\mu+1} \end{vmatrix}$$

были положительны.

Для данной задачи определители имеют вид

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1 > 0, \quad (6.2.1)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 \\ 0 & 0 & -a_1 & -b_2 \\ 0 & 1 & b_1 & -a_2 \end{vmatrix} = b_2(a_1 b_1 - b_2) - a_1(a_3 - a_1 a_2) > 0, \quad (6.2.2)$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 & b_4 & 0 \\ 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 & b_4 \\ 0 & 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 \end{vmatrix} = -a_1 f^2 - b_4 \Delta_4 e + b_2 \Delta_4 f + a_3 \Delta_4^2 > 0, \quad (6.2.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_8 = & \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 & -a_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -b_2 & a_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & -a_2 & -b_3 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = b_4^2 \left[-a_2 d^2 + f^2 + \frac{b_4 e^3}{a_1^2} - b_1 d f + \frac{b_4 d e}{a_1} - \frac{b_1 a_3 d e}{a_1} + \frac{b_2 a_2 d e}{a_1} + \left(\frac{a_3}{a_1} - a_2 \right) f e \right] + \\ & + b_4 b_3 \Delta_6 > 0, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

где

$$e = a_1 b_1 - b_2, \quad d = a_1 a_2 - a_3 + \frac{b_2 e}{a_1}, \quad f = a_1 b_3 - b_4 - \frac{a_3 e}{a_1}.$$

Характеристическое уравнение четвёртой степени (6.1) приведено к виду, когда свободный член чисто мнимый благодаря введению сопутствующей системы координат. Вследствие этого условия устойчивости (6.2.1)–(6.2.4) накладывают ограничения на семь действительных коэффициентов a_i , b_i вместо восьми.

6.3. Диапазон изменения параметров

Оценим диапазон возможного изменения параметров задачи и тем самым коэффициентов a_i , b_i , зависящих от этих параметров. Используем предположение о геометрии лопастей.

Отношение моментов инерции C/A берётся из интервала $0 \div 2$. Безразмерные аэродинамические коэффициенты $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$ возьмём из [9]. Безразмерная плотность η представляет собой отношение плотности воздуха к плотности материала, из которого изготовлена вертушка, поэтому значение η изменяется от 0,001 до 1. Характеристику χ распределения масс можно представить в виде $\chi = m r^2 / A = r^2 / I^2$, где I — один из радиусов инерции. Так как r и I — величины близкие, то χ лежит в пределах $1 \div 2$. Параметр r/l является отношением радиуса вертушки к длине стержня, поэтому это отношение может меняться в пределах от 0 до 100 и более в зависимости от длины стержня l . Выбор угла β определяет ориентацию лопасти вертушки относительно экваториальной плоскости. Будем считать, что лопасти подобны плоским пластинкам, а их угол

разворота β не равен нулю и не превосходит некоторого $\beta_* < \pi/2$. Значение β_* выбирается так, чтобы избежать неоднозначности решения трансцендентного уравнения (4.4). Эта неоднозначность связана с тем, что при значении β , близком к $\pi/2$, диапазон углов атаки α_0 — решений уравнения (4.4) — смещается в область $\pi/6 < \alpha_0 < \pi/2$, где аэродинамическое качество $k(\alpha)$ ведёт себя как функция $-\operatorname{tg}(\alpha - \pi/2) = \operatorname{ctg} \alpha$ и уравнение (4.4) обращается в тождество [6]. Такое поведение $k(\alpha)$, судя по результатам экспериментов [7, 9], является типичным свойством аэродинамических пластинок и объясняется, по-видимому, характером обтекания их при больших углах атаки.

При таком выборе β_* решение уравнения (4.4) обычно принадлежит интервалу монотонного роста функции $k(\alpha)$ и является единственным. Кроме того, как правило, на этом интервале ξ и $1 - k \operatorname{tg} \alpha_0$ положительны. В результате остаются положительными коэффициенты a_1, a_3 . Также можно сказать, что коэффициент b_1 всегда отрицательный.

Таким образом, для выбранной геометрии лопастей удовлетворяется условие устойчивости (6.2.1), т. е. условие $a_1 > 0$.

6.4. Численное исследование условий устойчивости

Исследуем условия (6.2.1)–(6.2.4) численным способом для различных профилей вертушки. Рассмотрим плоскость аэродинамических характеристик k, ξ . На этой плоскости каждому аэродинамическому профилю соответствует кривая L . Если изменять параметр β , то будут меняться установившиеся значения углов атаки α_0 и точка P , соответствующая на плоскости $k(\alpha_0), \xi$ установившемуся движению (4.4), пробежит всю кривую L . Типичный вид этой кривой L_1 для профиля НАСА представлен на рис. 7, а для тонкого диска L_2 на рис. 8.

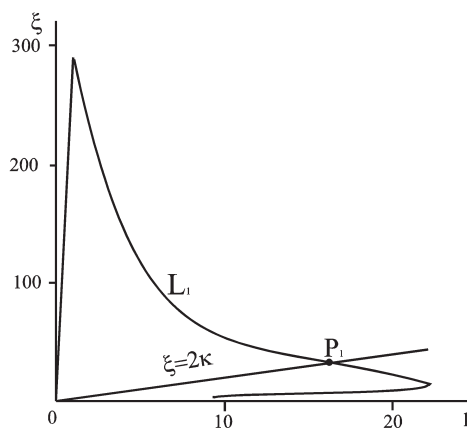


Рис. 7

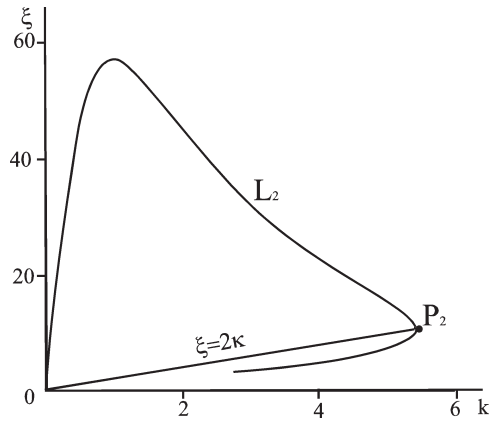


Рис. 8

На этой плоскости часть границы области устойчивости, согласно разделу 6.1, представляет собой прямую $\xi = 2k$ (см. рис. 7, 8). Эта прямая пересекает кривую L_1 в точке P_1 с координатами $\xi_1 = 31,5$, $k_1 = 15,75$, $\beta_1 = 1,5401$, а кривую L_2 в точке P_2 с координатами $\xi_2 = 10,794$, $k_2 = 5,397$, $\beta_2 = 1,4807$.

Условия устойчивости перманентного вращения, выписанные в виде определителей (6.2.1)–(6.2.4), зависят от конкретных значений параметров β , C/A , r/l , η , χ . Определим, какая часть линий L_1 и L_2 соответствует области устойчивости и каковы значения угла β на этом участке при заданных параметрах.

Рассмотрим как меняется область устойчивости по углу β при изменении отношения r/l при фиксированных значениях остальных параметров $\chi = 2$, $\eta = 0,1$, $C/A = 0,1$.

Выберем $r/l = 1$, тогда для профиля НАСА устойчивость движения наступает при углах β в диапазоне от 1,5422 до 1,546, а для тонкого диска угол β меняется от 1,4816 и до 1,4965 рад, причём минимальные значения угла β для обоих профилей близки к их значениям в точках P_1 и P_2 соответственно и лежат на кривых L_1 и L_2 ниже прямой $\xi = 2k$. Для тонкого диска диапазон изменения β оказался шире, чем для профиля НАСА. На рис. 9 отметим ту часть линии L_2 , где существует устойчивость рассматриваемого движения для тонкого диска (дуга QU).

С ростом отношения r/l диапазон изменения β для рассматриваемых профилей расширяется. Так, для $r/l = 100$ угол β меняется от 1,4816 до 1,5672 для плоского диска и от 1,5422 до 1,6134 для профиля НАСА, причём расширение области устойчивости происходит за счёт раздвижения только верхней границы по углу $\beta = \beta^*$ (для тонкого диска это дуга QW кривой L_2 , см. рис. 9).

В случае уменьшения r/l диапазон изменения угла β , в котором обеспечивается устойчивость перманентного вращения, убывает. Так, для плоского диска при значении $r/l = 0,01$ лишь одна точка на линии L_2 принадлежит обла-

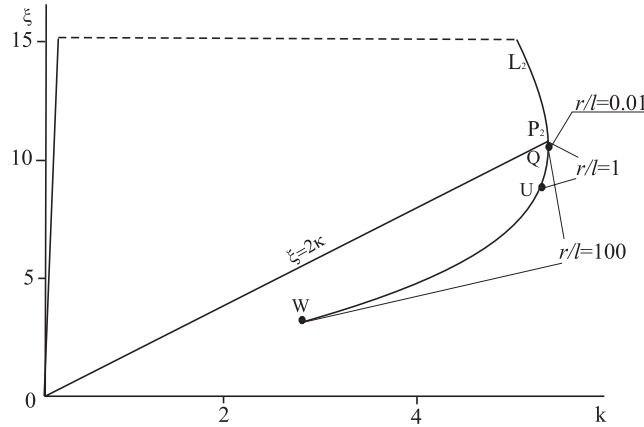


Рис. 9

сти устойчивости (точка Q) и соответствует значению угла $\beta = 1,4816$, а для профиля $NACA$ устойчивость вовсе отсутствует. На рис. 9 отмечены области устойчивости перманентного вращения тонкого диска для различных значений параметра r/l .

Рассмотрим влияние на устойчивость движения изменения отношения моментов инерции C/A . Как показывают расчёты, с увеличением C/A до 2 область устойчивости расширяется в сторону увеличения угла β , оставляя неизменной нижнюю границу.

Проиллюстрируем данное свойство на примере тонкого диска при заданных величинах параметров $r/l = 1$, $\chi = 2$, $\eta = 0,1$ для различных значений отношения C/A :

$$\begin{aligned} \text{при } C/A = 0,1 \quad \beta^* &= 1,4965, \\ \text{при } C/A = 1 \quad \beta^* &= 1,5124, \\ \text{при } C/A = 2 \quad \beta^* &= 1,545. \end{aligned}$$

На рис. 10 выделены области устойчивости, соответствующие различным значениям отношения C/A (для $C/A = 0,1$ — дуга QU кривой L_2 , для $C/A = 1$ — дуга QW , для $C/A = 2$ — дуга QJ).

Следующим параметром, от которого зависят условия устойчивости, является относительная плотность η . На рис. 11 приведены графики зависимости угла β^* , соответствующего верхней границе области устойчивости, от относительной плотности η , которая изменяется от 0,001 до 1, при следующих значениях остальных параметров системы: $r/l = 1$, $\chi = 2$, $C/A = 1$ (пунктирная линия), $C/A = 2$ (сплошная линия). Как видно из графиков, при увеличении η до некоторого значения область устойчивости уменьшается, а при дальнейшем росте

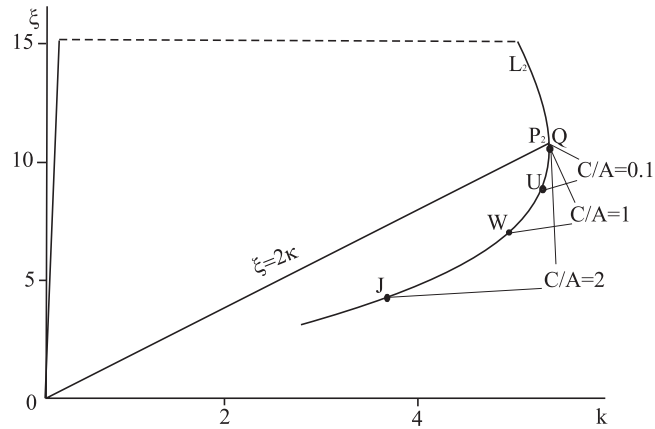


Рис. 10

относительной плотности она начинает расти. Нижняя граница по углу разворота лопастей остаётся неизменной $\beta = 1,4816$ и соответствующей значению, удовлетворяющему условию $\xi < 2k$.

Ещё одна характеристика, от которой зависит размер области устойчивости, — распределение масс χ . При уменьшении характеристики χ от 2 до 1 область устойчивости расширяется в сторону верхней границы по углу β . Так, при фиксированных значениях параметров $r/l = 1$, $C/A = 1$, $\eta = 0,1$ имеем:

$$\begin{aligned} \text{при } \chi = 2 \quad \beta^* &= 1,5124, \\ \text{при } \chi = 1,5 \quad \beta^* &= 1,5202, \\ \text{при } \chi = 1 \quad \beta^* &= 1,5349. \end{aligned}$$

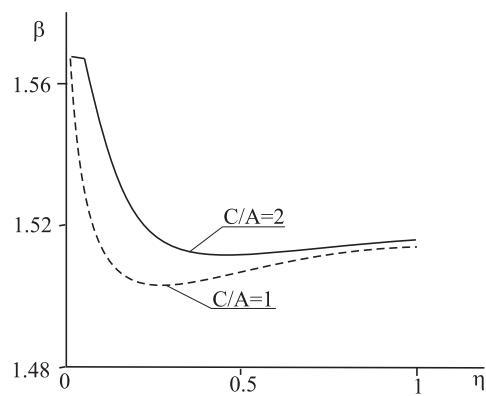


Рис. 11

Приведём ещё один пример набора параметров, $r/l = 1$, $C/A = 2$, $\eta = 0,1$, при котором данное свойство изменения границы области устойчивости подтверждается:

$$\begin{aligned} \text{при } \chi = 2 \quad \beta^* &= 1,545, \\ \text{при } \chi = 1,5 \quad \beta^* &= 1,5634, \\ \text{при } \chi = 1 \quad \beta^* &= 1,5672. \end{aligned}$$

Численное исследование условий устойчивости путём определения знаков определителей (6.2.1)–(6.2.4) для реальных массовых, геометрических и аэродинамических параметров показало, что минимальное значение угла β остаётся одним и тем же во всех рассматриваемых случаях. Оно определяется из условия $\xi < 2k$, а максимальное значение угла $\beta = \beta^*$, при котором сохраняется устойчивость, имеет сложную зависимость от всех параметров задачи.

Диапазон изменения углов атаки оказывается достаточно узким при значениях параметров, обеспечивающих устойчивость перманентного вращения, и обеспечивает справедливость выбранной зависимости аэродинамических коэффициентов $c_x(\alpha) = c_{x0} + c''_x \alpha^2$, $c_y = c_y^\alpha \alpha$.

6.5. Сравнение некоторых условий устойчивости

В [4] была построена область устойчивости вертушки с неподвижным центром масс в плоскости параметров k , ξ . Шаровой шарнир вертушки совпадал с её центром масс. Границами области устойчивости для такой вертушки являются прямая

$$\xi = 2k \tag{6.5.1}$$

и кривая

$$\xi = 2k(\alpha) \frac{1 - C/A}{1 + k^2(\alpha)C/A}. \tag{6.5.2}$$

На плоскости параметров k , ξ конкретным аэродинамическим характеристикам $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ соответствует кривая L . Каждой точке этой кривой соответствует установочный угол β , удовлетворяющий установившемуся движению (4.4). В [4] было показано, что для угла β , обеспечивающего устойчивость перманентного вращения, участок кривой L лежит между границами (6.5.1) и (6.5.2). Как видно, нижняя граница (6.5.1) по углу β зависит лишь от аэродинамических параметров k , ξ и совпадает с границей для вертушки на стержне.

Другая граница для вертушки с неподвижным центром масс (6.5.2) зависит от аэродинамических параметров и от отношения моментов инерции C/A . В задаче, рассматриваемой в данной работе, как оказалось, граница по углу β имеет сложную зависимость от всех параметров задачи: k , ξ , r/l , η , χ , а также от отношения C/A .

Как видно из графика на рис. 10, область устойчивости с увеличением отношения C/A расширяется в сторону увеличения угла β . То же происходит

и в задаче, рассмотренной в [4], где граница (6.5.2) при увеличении отношения C/A опускается ниже по отношению к прямой $\xi = 2k$. Тем самым область устойчивости расширяется.

При увеличении отношения r/l область устойчивости вертушки на стержне тоже расширяется. При дальнейшем увеличении этого отношения, за счёт уменьшения длины стержня, произойдёт совпадение областей устойчивости. Это утверждение демонстрируется на рис. 12 для следующих значений параметров обеих вертушек: $\chi = 2$, $\eta = 0,1$, $C/A = 0,1$.

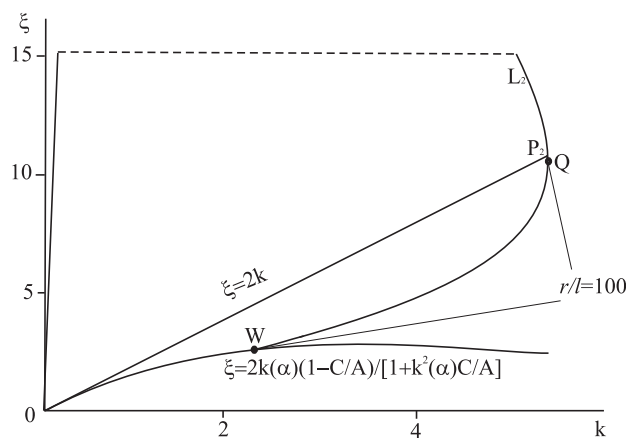


Рис. 12

Таким образом, для обеих вертушек области устойчивости перманентного вращения по углу β соответствует дуга QW кривой L_2 , заключённая между прямой (6.5.1) и кривой (6.5.2).

7. Заключение

Разработана математическая модель движения вертушки, помещённой в аэродинамической трубе. Вертушка свободно вращается в шаровом шарнире, закреплённом на конце невесомого стержня. Другой конец стержня свободно вращается относительно шарового шарнира, закреплённого неподвижно.

Исследована устойчивость перманентного вращения вертушки, при котором ось динамической симметрии вертушки и направление стержня совпадают с направлением потока. Для получения условий асимптотической устойчивости построена система уравнений возмущённого движения четвёртого порядка в комплексных переменных. Соответствующее уравнение четвёртой степени также имеет комплексные коэффициенты. Условия асимптотической устойчивости

(см. [8]) накладывают определённые ограничения на коэффициенты характеристического уравнения. Коэффициенты зависят от аэродинамических, геометрических и массовых параметров. В пространстве этих параметров численным способом построена область устойчивости.

Проведён анализ зависимости структуры области устойчивости от следующих параметров: отношения моментов инерции C/A , угла установки лопастей β , аэродинамических коэффициентов c_x , c_y , относительной плотности вертушки η , параметра относительного распределения масс вертушки χ и отношения r/l .

Проведено сравнение условий устойчивости вертушки, подвешенной на стержне, и вертушки с неподвижным центром масс. Показано, что нижняя граница области устойчивости, определяемая аэродинамическими характеристиками, совпадает в обеих задачах. Верхняя граница области устойчивости вертушки с неподвижным центром масс зависит от аэродинамического качества и от отношения C/A , в то время как для вертушки на стержне эта граница зависит от всех параметров задачи. В случае, когда $l \rightarrow 0$, области устойчивости перманентного вращения для двух рассматриваемых вертушек совпадают.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России» и РФФИ (проект № 04-01-00505).

Литература

- [1] Гувернюк С. В., Фалунин М. П., Фещенко С. А. Исследование движения вращающегося парашюта // Парашюты и проникаемые тела (сб. статей, посвященный 70-летию акад. АН Узб. ССР Х. А. Рахматулина) / под ред. О. В. Рысева, М. П. Фалунина. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — С. 30—44.
- [2] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
- [3] Привалов В. А., Привалова О. Г., Самсонов В. А. О динамике бумеранга // Изв. РАН. МТТ. — 2003. — № 4. — С. 52—65.
- [4] Привалов В. А., Самсонов В. А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. — 1990. — № 2. — С. 32—38.
- [5] Привалов В. А., Самсонов В. А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // ПММ. — 1994. — Т. 58, вып. 2. — С. 37—48.
- [6] Самсонов В. А., Привалов В. А., Зенкин А. Н., Соколова Т. П. Исследование устойчивости авторотирующего тела. — Отчёт Института механики МГУ № 3534. — 1987.
- [7] Табачников В. Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всём диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. — 1974. — Вып. 1621. — С. 79—93.
- [8] Чеботарёв Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1949. — Т. 26. — С. 1—332.
- [9] Flachsbarth O. Messungen an ebenen und gewölbten Platten // Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Bd. 4 / Hrsg. von L. Prandtl und A. Betz. — München; Berlin, 1932. — S. 96—100.

