Неголономные механические системы и стабилизация движения

В. И. КАЛЁНОВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kalenova@imec.msu.ru

А. В. КАРАПЕТЯН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: avkarap@mech.math.msu.ru

В. М. МОРОЗОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: moroz@imec.msu.ru

М. А. САЛМИНА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: salmina@imec.msu.ru

УДК 531.36

Ключевые слова: неголономные системы, стационарные движения, устойчивость, стабилизация.

Аннотация

В работе систематизированы теоретические результаты по устойчивости и стабилизации стационарных движений неголономных механических систем. Сформулирован ряд теорем об устойчивости и управляемости. Указаны многочисленные приложения приведённых теоретических результатов.

Abstract

V. I. Kalenova, A. V. Karapetjan, V. M. Morozov, M. A. Salmina, Nonholonomic mechanical systems and stabilization of motion, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 117—158.

Theoretical results on stability and stabilization of steady-state motions of nonholonomic systems are systematized. A set of theorems on stability and controllability is formulated. A lot of applications of these theoretical results are pointed out.

Введение

Изучение неголономных механических систем — специальный раздел механики. Неголономными системами называются механические системы, стеснён-

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 117—158.

ные неинтегрируемыми связями, которые налагаются на скорости точек системы, но не на положение системы. Неголономные связи возникают в системах при качении твёрдых тел по поверхности без скольжения [2, 24, 28, 34, 37].

Неголономные системы служат моделями многих технических объектов, не только механических, но и электромеханических. В связи с развитием робототехники все более актуальным становятся задачи исследования динамики, устойчивости и стабилизации неголономных механических систем, которые представляют собой базовые модели разнообразных колёсных роботов. Неголономными системами описываются ставшие в последнее время популярными самокаты Segway, снейкборды, скейтборты и т. д.

Изучение различных теоретических вопросов неголономных систем представляет большой интерес и является предметом исследований многих учёных как в России, так и за рубежом [2, 3, 5, 6, 11, 12, 14—16, 18—20, 24, 28, 30, 33, 34, 36, 37, 40—43, 45, 52—55].

Особый интерес представляет исследование устойчивости и возможностей стабилизации рабочих режимов технических объектов, которыми во многих случаях являются стационарные движения. Изучению различных аспектов теории стационарных движений неголономных систем — вопросам существования, устойчивости, управления и стабилизации — посвящена данная работа.

При изучении стационарных движений неголономных систем обычно используются два подхода. Один из них основан на модифицированной теории Рауса—Сальвадори и методах Пуанкаре, Четаева, Марсдена и Смейла [17, 25, 26, 38, 39, 47—51]. Этот подход требует знания линейных интегралов, соответствующих симметриям системы, в явной или хотя бы в неявной форме и позволяет дать полный (глобальный) анализ задачи, если эти интегралы известны в явной форме. Другой подход основан на теории критических случаев Ляпунова—Малкина [26, 27]. Этот подход более универсален, но существенно связан с выбором обобщённых координат.

Уравнения движения неголономных систем обладают специфической структурой, которую необходимо учитывать как при решении вопросов устойчивости, так и при решении задач стабилизации.

В работе сформулированы и доказаны оригинальные теоремы об устойчивости, управляемости и наблюдаемости неголономных систем различного вида, обобщающие и дополняющие предыдущие результаты авторов [5, 6, 8, 9, 11, 12, 14—16, 18]. Представлены различные формы уравнений движений (раздел 1). Рассмотрены условия существования стационарных движений (СД) в консервативных неголономных системах с известными первыми интегралами и консервативных систем Чаплыгина с симметрией. Приведены содержательные примеры исследования СД шара и тела вращения на шероховатой плоскости (раздел 2). В разделе 3 исследованы условия существования СД неголономных систем общего вида. Введено понятие циклических координат, исследована устойчивость СД в зависимости от различных условий, наложенных на параметры системы. Задача стабилизации механической неголономной системы обсуждается в разделе 4. Сформулированы и доказаны критерии управляемости и наблюдаемости для неголономных систем различного вида. Обсуждаются возможности построения алгоритмов стабилизации. Приложения описанной теории к различным механическим задачам указаны в разделе 5.

1. Уравнения движения

Рассмотрим неголономную механическую систему, положение которой определяется обобщёнными координатами $q_1, \dots, q_n$. Обобщённые скорости $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ стеснены $n - l$ $(l < n)$ стационарными дифференциальными неинтегрируемыми соотношениями

$$\sum_{w=1}^{n} h_{\chi w}(q)\dot{q}_w = 0 \quad (\chi = l+1, \dots, n), \tag{1.1}$$

причём $\operatorname{rank} \|h_{\chi w}\| = n - l$. Число степеней свободы системы равно $n-(n-l) = l$.

Уравнения движения неголономной механической системы могут быть записаны в различных формах. Одна из таких форм — уравнения Лагранжа с неопределёнными множителями:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_w} - \frac{\partial T}{\partial q_w} = Q_w + \sum_{\chi=l+1}^{n} \lambda_\chi h_{\chi w} \quad (w = 1, \dots, n). \tag{1.2}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, Q_w — обобщённые силы, λ_χ — неопределённые множители Лагранжа.

Уравнения (1.2) совместно с уравнениями неголономных связей (1.1) представляют собой замкнутую систему порядка $3n - l$ относительно переменных q_w, $\dot{q}_w$, λ_χ. Слагаемые

$$\sum_{\chi=l+1}^{n} \lambda_{\chi w}$$

в уравнениях (1.2) — обобщённые реакции связей. Число уравнений в системе (1.1), (1.2) превышает число степеней свободы на удвоенное количество неинтегрируемых связей.

В большинстве задач цель исследования — только нахождение движения, т. е. определение зависимостей $q_w(t)$, поэтому вычисление величин λ_χ не является необходимой процедурой. В литературе предложено несколько форм уравнений движения неголономных систем, не содержащих множителей связей λ_χ. Одной из таких форм являются уравнения Воронца [2, 24, 28, 34].

Разрешим уравнения связей (1.1) относительно каких-либо $n - l$ (пусть последних) обобщённых скоростей. Тогда уравнения связей можно представить в виде

$$\dot{q}_\chi = \sum_{r=1}^{l} b_{\chi r}(q)\dot{q}_r \quad (\chi = l+1, \dots, n). \tag{1.3}$$

В этом случае уравнения Воронца имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_r}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_r}-\sum_{\chi=l+1}^{n}\frac{\partial\Theta}{\partial q_\chi}b_{\chi r}-\sum_{\chi=l+1}^{n}\Theta_\chi\sum_{s=1}^{l}\nu_{\chi rs}\dot q_s= \\ =Q_r+\sum_{\chi=l+1}^{n}Q_\chi b_{\chi r}\quad(r=1,\ldots,l).\quad(1.4)$$

Здесь Θ, Θ_χ — результаты исключения величин $\dot q_\chi$ при помощи соотношений (1.3) из выражений для T, $\partial T/\partial\dot q_\chi$,

$$2T=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(q)\dot q_i\dot q_j>0,\quad 2\Theta=\sum_{r,s=1}^{l}a_{rs}(q)\dot q_r\dot q_s,$$

$$\nu_{\chi rs}=\frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_s}-\frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_r}-\sum_{\chi'=l+1}^{n}\left(b_{\chi' r}\frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_{\chi'}}-b_{\chi' s}\frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_{\chi'}}\right),$$

$$\Theta_\chi=\sum_{p=1}^{l}\Theta_{\chi p}(q)\dot q_p,\quad \Theta_{\chi p}=A_{\chi p}+\sum_{\chi'=l+1}^{n}A_{\chi\chi'}b_{\chi' p},$$

$$a_{rs}=A_{rs}+\sum_{\chi=l+1}^{n}(A_{r\chi}b_{\chi s}+A_{\chi s}b_{\chi r})+\sum_{\chi,\,\chi'=l+1}^{n}A_{\chi\chi'}b_{\chi r}b_{\chi' s},$$

Q_r, Q_χ — обобщённые силы, соответствующие обобщённым координатам q_r, q_χ.

Будем считать, что обобщённые силы представляют сумму потенциальных, диссипативных и управляющих сил, т. е. могут быть представлены в виде

$$Q_w=\frac{\partial U}{\partial q_w}-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q_w}+F_w\quad(i=1,\ldots,n).$$

Здесь U — силовая функция,

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{l}\varphi_{rs}(q)\dot q_r\dot q_s\,—$$

приведённая диссипативная функция,

$$\varphi_{rs}=f_{rs}+\sum_{\chi=l+1}^{n}(f_{r\chi}b_{\chi s}+f_{\chi s}b_{\chi r})+\sum_{\chi,\,\chi'=l+1}^{n}f_{\chi\chi',b_{\chi r}}b_{\chi' s},$$

где f_{rs} — элементы диссипативной функции Релея

$$F=\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}f_{rs}(q)\dot q_r\dot q_s,$$

управляющие силы F_j зависят от обобщённых координат и управляющих воздействий, приложенных соответственно по координатам q_r, q_χ. В зависимости от каждой конкретной задачи могут рассматриваться те или иные варианты введения управлений.

Предполагается, что коэффициенты в выражениях для кинетической энергии, диссипативной функции и в уравнениях неголономных связей (1.3), а также силовая функция дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой открытой области пространства конфигураций, причём кинетическая энергия определённо положительна относительно всех скоростей $q_1, \ldots, q_n$. Тогда функции Θ, Θ_χ, Φ также дважды непрерывно дифференцируемы, причём функция Θ определённо положительна относительно независимых скоростей $q_1, \ldots, q_l$, а коэффициенты $v_{\chi rs}$ непрерывно дифференцируемы.

Уравнения (1.4) совместно с уравнениями (1.3) представляют замкнутую систему порядка $n+l$ относительно переменных $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l$.

Если кинетическая энергия T, силовая функция U, функция F и коэффициенты связей $b_{\chi r}$ не зависят от координат q_χ ($\chi = l+1, \ldots, n$), то уравнения (1.4) можно рассматривать независимо от уравнений связей (1.3). В этом случае неголономная система называется системой Чаплыгина и соответствующие уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\Theta}{\partial q_r} - \sum_{\chi=l+1}^{n}\ \sum_{s,\,p=1}^{l} \Theta_{\chi p}\nu'_{\chi rs}\dot{q}_s\dot{q}_p = Q_r \quad (r = 1, \ldots, l),$$

$$\text{где}\quad \nu'_{\chi rs} = \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\chi s}}{\partial q_r} - \qquad (1.5)$$

уравнениями Чаплыгина [24, 28, 34, 37].

Ещё одна форма уравнений движения неголономных систем была предложена П. Аппелем (см. [3, 24, 28, 34]). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_r} - Q_r + \sum_{\chi=l+1}^{n} b_{\chi r}Q_\chi \quad (r = 1, \ldots, l).$$

Здесь

$$S = \frac{1}{2}\sum_{v=1}^{N} m_v(\ddot{x}_v^2 + \ddot{y}_v^2 + \ddot{z}_v^2) -$$

энергия ускорений, выраженная с учётом уравнений связей через обобщённые координаты, скорости и ускорения.

Число уравнений Аппеля, как и число уравнений Воронца и Чаплыгина, равно числу степеней свободы системы. Эти уравнения вместе с уравнениями связей (1.3) образуют замкнутую систему. Отметим, что уравнения Аппеля могут быть также записаны в квазикоординатах.

Другой формой уравнений движения неголономных систем в квазикоординатах являются уравнения Больцмана—Гамеля (см. [3, 24, 28, 34]):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_r} - \frac{\partial T}{\partial\pi_r} + \sum_{s=1}^{l}\sum_{w=1}^{n} \gamma_{sr}^{w}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_w}\dot{\pi}_s = \Pi_r \quad (r = 1, \ldots, l). \qquad (1.6)$$

В этих уравнениях кинетическая энергия системы выражена через квазискорости $\dot\pi_1, \ldots, \dot\pi_{wn}$, которые связаны с обобщёнными скоростями $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ линейными соотношениями

$$\dot\pi_w = \sum_{v=1}^{n} h_{wv}(q)\dot q_v \quad (\det \|h_{wv}\| \neq 0).$$

Равенства нулю правых частей последних $(n-l)$ из этих соотношений представляют собой уравнения связей (1.1). Трёхиндексные символы имеют следующий вид:

$$\gamma_{sr}^{w} = \sum_{u,v}^{n} \left(\frac{\partial h_{wv}}{\partial q_u} - \frac{\partial h_{wu}}{\partial q_v}\right) c_{us}c_{vr} \quad (s, r = 1, \ldots, l;\ w = 1, \ldots, n),$$
$$\|c_{uv}\| = \|h_{ws}\|^{-1}.$$

В уравнениях (1.6) Π_r — обобщённые силы, отнесённые к квазикоординатам π_r и вычисляемые по формулам

$$\Pi_r = \sum_{w=1}^{n} c_{wr}Q_w \quad (r = 1, \ldots, l).$$

Число уравнений (1.6) равно числу степеней свободы системы. Для получения замкнутой системы относительно переменных $\dot\pi_1, \ldots, \dot\pi_l, q_1, \ldots, q_n$ к уравнениям (1.6) следует добавить n кинематических соотношений

$$\dot q_r = \sum_{s=l}^{l} c_{rs}\dot\pi_s \quad (r = 1, \ldots, n).$$

Подчеркнём, что в общем случае, в какой бы форме ни были взяты уравнения движения неголономных систем, за исключением систем Чаплыгина, для получения замкнутой системы уравнений к уравнениям движения необходимо присоединить уравнения неголономных связей. В этом состоит одно из характерных отличий неголономных систем от систем голономных с независимыми координатами, которое определяет специфику постановки задач устойчивости и стабилизации движения.

2. Стационарные движения консервативных неголономных систем с известными первыми интегралами

Изложим кратко классические методы исследования СД механических систем с известными первыми интегралами [17, 25, 26, 38, 39, 47—51], в частности неголономных механических систем.

2.1. Общие положения теории Рауса

Рассмотрим динамическую систему общего вида, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.1}$$

Здесь $x \in X$ — n-мерный вектор фазовых переменных (X — фазовое пространство), $\dot{x} = dx/dt$, $t \in [0, \infty)$, $f(x) \in C^1 \colon X \to \mathbb{R}^n$. Очевидно, уравнения движения консервативных неголономных систем, не содержащие неопределённых множителей (т. е. уравнения Воронца, Чаплыгина и т. д.), всегда можно привести к виду (2.1).

Предположим, что система (2.1) допускает не зависящие от времени и дважды непрерывно дифференцируемые по входящим в них переменным первые интегралы

$$U_0(x) = c_0, \quad U_1(x) = c_1, \ldots, \quad U_k(x) = c_k \quad (k < n-1), \tag{2.2}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные. В дальнейшем совокупность первых интегралов $U_1(x) = c_1, \ldots, U_k(x) = c_k$ будем обозначать $U(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}^k$).

Согласно теории Рауса критические точки одного из интегралов (2.2) при фиксированных значениях других интегралов соответствуют СД системы (2.1), причём точки экстремума — устойчивым СД.

В дальнейшем, без уменьшения общности, будем рассматривать критические точки интеграла $U_0(x) = c_0$ на фиксированных уровнях интегралов $U(x) = c$. При этом основные положения теории Рауса можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.1 ([47]). *Если интеграл $U_0(x) = c_0$ принимает невырожденное стационарное значение при фиксированных значениях постоянных интегралов $U_0(x) = c$ в некоторой точке $x^0 \in X$, то $x \equiv x^0$ — СД системы, т. е. $f(x^0) \equiv 0$.*

Доказательство этой и последующих теорем приведены в [17].

Заметим, что СД $x \equiv x^0$, доставляющее интегралу U_0 стационарное значение при фиксированных постоянных первых интегралов $U = c$, зависит от этих постоянных. Это означает, что СД $x = x^0(c)$ образуют некоторое семейство.

Интеграл U_0 (даже при фиксированных значениях первых интегралов $U = c$) может принимать стационарные значения не только в точке x^0, но и в других точках $x^1, x^2, \ldots$. Эти точки соответствуют одним и тем же значениям постоянных первых интегралов $U(x)$, но, вообще говоря, различным значениям постоянной интеграла $U_0(x)$, и также зависят от постоянных c и образуют некоторые семейства СД $x^1(c), x^2(c), \ldots$. Семейства СД $x^0(c), x^1(c), x^2(c), \ldots$ могут иметь различные размерности, а также (при некоторых значениях c^*) общие точки. Такие точки называются точками бифуркации (по Пуанкаре). Объединение семейств $x(c) = x^0(c) \cup x^1(c) \cup x^2(c) \cup \ldots$ представляет в пространстве $X \times \mathbb{R}^k$ ($x \in X$, $c \in \mathbb{R}^k$) некоторую самопересекающуюся поверхность (диаграмму Пуанкаре).

Для отыскания критических точек интеграла $U_0(x) = c_0$ на фиксированных уровнях интегралов $U(x) = c$ следует ввести функцию

$$W(x, \lambda) = U_0(x) - (\lambda, (U(x) - c)),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^k$ — неопределённые множители, и выписать условия её стационарности:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0. \tag{2.3}$$

Из первой группы уравнений системы (2.3) можно найти $x = x(\lambda)$, а затем из второй группы уравнений $\lambda = \lambda(c)$; при этом $x = x(\lambda(c)) = x(c)$.

Теорема 2.2 ([49]). *Если интеграл $U_0(x) = c_0$ принимает локально строго экстремальное (минимальное или максимальное) значение при фиксированных значениях постоянных интегралов $U(x) = c$ в некоторой точке x^0, то $x \equiv x^0$ — устойчивое СД системы.*

Функция $U_0(x)$ заведомо принимает локально строго минимальное (максимальное) значение при фиксированных значениях первых интегралов $U(x) = c$ в точке $x(c)$, если вторая вариация функции $W(x, \lambda)$ по переменным x определённо положительна (отрицательна) в точке $x = x(c)$, $\lambda = \lambda(c)$ на линейном многообразии $\delta U = 0$:

$$\delta^2 W|_{\delta U = 0} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 \xi, \xi\right)\Big|_{(\frac{\partial U}{\partial x})_0 = 0} > 0 \quad (< 0) \quad \text{для любого } \xi,\ 0 < \|\xi\| < \delta$$

(δ — некоторое положительное число). Здесь и далее нижний индекс 0 означает, что соответствующее выражение вычисляется на невозмущённом движении.

Эта вторая вариация может быть представлена в виде $(1/2)(Q_0\eta, \eta)$, где $\eta \in \mathbb{R}^{n-k}$, а Q_0 — $((n-k) \times (n-k))$-матрица. Индекс квадратичной формы $(Q_0\eta, \eta)$ называется степенью неустойчивости Пуанкаре. Если степень неустойчивости Пуанкаре равна (не равна) нулю, то $U_0(x)$ имеет локально строгий минимум (не имеет даже нестрогого минимума) на фиксированных уровнях интегралов $U(x) = c$ в точке $x(c)$.

Пусть $\xi = x - x(c)$, тогда линеаризованная система уравнений возмущённого движения имеет вид

$$\dot{\xi} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \xi$$

и допускает $k+1$ первый интеграл (один квадратичный и k линейных),

$$\delta^2 W = \text{const}, \quad \delta U = \text{const}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank}(\partial f/\partial x)_0 \leqslant n - k$. На линейном многообразии $\delta U = 0$ эти уравнения принимают вид

$$\dot{\eta} = P_0 \eta \quad (P_0 \text{ — } ((n-k) \times (n-k))\text{-матрица})$$

и допускают один квадратичный интеграл $(1/2)(Q_0\eta, \eta) = \text{const}$.

Теорема 2.3 ([38]). *Если* $\operatorname{rank}(\partial f/\partial x)_0 = n - k$ *и степень неустойчивости Пуанкаре СД* $x(c)$ *нечётна, то это СД неустойчиво.*

2.2. Механические системы с симметрией

Рассмотрим консервативную механическую систему с n степенями свободы, допускающую k-параметрическую группу симметрий ($k < n$), которой отвечают линейные интегралы. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ и $r \in M \subseteq \mathbb{R}^m$ — квазискорости (в частности, импульсы или обобщённые скорости) и существенные координаты системы соответственно, M — конфигурационное пространство существенных координат, $\dim M \leqslant n$. Данная механическая система допускает интеграл энергии

$$U_0(v, r) = \frac{1}{2}\,(A(r)v, v) + V(r) = c_0 \tag{2.4}$$

и k нётеровых интегралов

$$U(v, r) = B^T(r)v = c \quad (c \in \mathbb{R}^k), \tag{2.5}$$

соответствующих группе симметрий.

Здесь $A(r) \in C^2$ — положительно определённая $(n \times n)$-матрица кинетической энергии, $V(r) \in C^2\colon M \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия системы, $B(r)$ — $(n \times k)$-матрица коэффициентов нётеровых интегралов ($B(r) \in C^2$, $\operatorname{rank} B = k$).

Согласно результатам, изложенным в разделе 2.1, критическим точкам интеграла энергии при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают стационарные движения рассматриваемой системы. Учитывая структуру интегралов (2.4) и (2.5), задачу отыскания стационарных движений можно решать в два этапа. Сначала можно найти минимум квадратичной по v функции (2.4) на линейном по v многообразии (2.5), рассматривая r как параметры (других критических значений функция (2.4) как функция переменных v иметь не может). Очевидно, этот минимум зависит от r и c, обозначим его $W_c(r)$. После определения функции $W_c(r)$, которая называется эффективным потенциалом, задача поиска стационарных движений сводится к определению критических точек этой функции на конфигурационном многообразии M.

Найдём $\min\limits_v U_0|_{U=c} = W_c(r)$. Рассмотрим функцию

$$G = U_0 - (\lambda, (U - c)),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^k$ — вектор неопределённых множителей Лагранжа, и выпишем условия её минимума по переменным v при фиксированных постоянных c:

$$\frac{\partial G}{\partial v} = Av - B\lambda = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = -(B^T v - c) = 0. \tag{2.6}$$

Решая систему (2.6), находим

$$v = A^{-1}B(B^T A^{-1} B)^{-1} c = v_c(r), \tag{2.7}$$

$$W_c(r) = V + \frac{1}{2}((B^T A^{-1} B)^{-1} c, c). \tag{2.8}$$

Если в некоторой точке $r = r^0$ имеет место $\operatorname{rank} B(r^0) < k$, то исследование стационарных движений в окрестности точки r^0 конфигурационного пространства требует отдельного обсуждения.

С помощью теоремы 2.1 легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.4 ([39, 50, 51]). *Если эффективный потенциал принимает невырожденное значение в некоторой точке $r^0 \in M$, то*

$$r = r^0, \quad v = v_c(r^0) = v^0 - \tag{2.9}$$

СД системы.

Значение r^0 и соответствующее ему значение $v_c(r^0)$ зависят от параметров c. Эффективный потенциал может принимать стационарные значения при фиксированных значениях c не только в точке r^0, но также и в других точках $r^1, r^2, \ldots$. Эти точки и соответствующие им значения $v^1, v^2, \ldots$ также зависят от параметров c.

Если $M = \mathbb{R}^m$, то для того чтобы найти СД, нужно решить систему

$$\frac{\partial W_c}{\partial r} = 0.$$

Если же $M = \{r \in \mathbb{R}^m \colon \psi(r) = 0\}$, где $\psi(r) \in C^1 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-\mu}$, $\mu = \dim M$, то нужно решить систему

$$\frac{\partial \tilde{W}_c}{\partial r} = 0, \quad \psi(r) = 0,$$

где $\tilde{W}_c(r) = W_c + (\nu, \psi)$ и $\nu - \mu$-мерный вектор неопределённых множителей Лагранжа.

Теорема 2.5 ([49]). *Если эффективный потенциал принимает локально строгий минимум при фиксированных значениях c^0 параметров c в некоторой точке $r^0(c^0)$, то $r^0(c^0)$, $v = v^0(c^0)$ — устойчивое СД системы.*

Теорема 2.5 следует из теоремы 2.2.

Уравнения движения системы, описываемой фазовыми переменными r и v, могут быть представлены в виде

$$\dot{r} = F(r)v, \quad \dot{v} = f(r, v). \tag{2.10}$$

Здесь $F(r) \in C^1 - (m \times n)$-матрица и $f(r, v) \in C^1 \colon M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, причём $F(r^0)v^0 = 0$ и $f(r^0, v^0) = 0$, поскольку r^0, v^0 — СД системы (2.10).

Пусть $x = r - r^0$, $y = v - v^0$, тогда линеаризованная система уравнений возмущённого движения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где $S_0 - ((m+n) \times (m+n))$-матрица вида

$$S_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} v & F \\ \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}_0 .$$

Из теоремы 2.3 следует следующее утверждение.

Теорема 2.6 ([38]). *Если степень неустойчивости Пуанкаре СД нечётна и* $\operatorname{rank} S_0 = n - k + \mu$, *то СД неустойчиво.*

Отметим, что если $M = \mathbb{R}^m$, то $\mu = m$.

Заметим, что СД $r = r^i(c^0)$, $v = v^i(c_0)$ и $r = r^j(c^0)$, $v = v^j(c_0)$ $(i \neq j)$ изолированы одно от другого, если и только если точки $r^i(c^0)$ и $r^j(c_0)$ изолированы одна от другой (см. (2.9)).

Индекс второй вариации интеграла энергии на линейном многообразии $\delta U = 0$ равен индексу второй вариации эффективного потенциала. Поэтому степень неустойчивости Пуанкаре СД $r = r^0(c^0)$, $v = v^0(c^0)$ равна $\operatorname{ind} \delta^2 W_c^0(r^0(c^0))$, где $r \in M$.

Очевидно, СД $r = r(c)$, $v = v(c)$ могут быть представлены в пространстве $\mathbb{R}^n \times M \times \mathbb{R}^k$ ($v \in \mathbb{R}^n$, $r \in M$, $c \in \mathbb{R}^k$) как некоторые поверхности. Аналогично критические точки $r = r(c)$ могут быть представлены в пространстве $M \times \mathbb{R}^k$ ($r \in M$, $c \in \mathbb{R}^k$). Последние поверхности можно рассматривать как диаграммы Пуанкаре.

Согласно определению эффективного потенциала $W_c(r) \leqslant U_0(v, r) = c_0$, где c_0 — постоянная интеграла энергии. Поэтому неравенство $W_c(r) \leqslant c_0$ определяет в пространстве конфигураций область возможных движений при данных значениях c постоянных первых интегралов и данного значения c_0 интеграла энергии. Топологический тип этих областей изменяется на поверхностях $(c, c_0) \in \Sigma$, где

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots,$$
$$\Sigma_s = \{(c, h) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \colon h = h_s(c) = V_c(M_s(c))\} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots).$$

2.3. Стационарные движения шара на абсолютно шероховатой плоскости

Теория, изложенная в разделах 2.1, 2.2, согласно которой критическим (экстремальным) значениям одного из интегралов системы при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают (устойчивые) действительные движения системы (которые называются устойчивыми стационарными движениями), применима к любым динамическим системам, в том числе к неголономным. При этом предполагается, что уравнения движения могут быть представлены в виде (2.1), а первые интегралы имеют вид (2.2).

Поскольку движение систем с дифференциальными связями нередко описывается уравнениями, содержащими реакции этих связей или неопределённые множители Лагранжа, то применение теории Рауса к таким системам требует особой внимательности [17, 18]. Дело в том, что указанные выше уравнения систем с дифференциальными связями не могут быть представлены в виде (2.1), так как для реакций связей или неопределённых множителей Лагранжа нет соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому для применения теории, изложенной выше, к неголономным системам, необходимо исключить зависимые скорости из выражений всех первых интегралов указанных уравнений движения системы с помощью уравнений неголономных связей. При этом полученные функции будут представлять собой первые интегралы уравнений движения рассматриваемой системы, записанных в форме Чаплыгина, Воронца, Больцмана—Гамеля и др., которые не содержат реакций связей и неопределённых множителей Лагранжа и представимы в виде (2.1), а сами первые интегралы примут вид (2.2).

Проиллюстрируем изложенные выше соображения на примере исследования задачи о стационарных движениях неоднородного динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости [18, 21].

Пусть m — масса шара, A_1 и A_3 — его экваториальный и осевой центральные моменты инерции, r — радиус, a — расстояние от центра масс шара до геометрического центра, g — ускорение свободного падения. Скорость центра масс шара обозначим через $\bar{v}$, а его угловую скорость — через $\bar{\omega}$. Обозначим также единичный вектор восходящей вертикали и единичный вектор оси симметрии шара через $\bar{\gamma}$ и $\bar{e}_3$ соответственно.

Уравнения движения шара, отнесённые к его главным центральным осям инерции, можно представить в виде

$$m\dot{\bar{v}} + [\bar{\omega} \times m\bar{v}] = -mg\bar{\gamma} + \bar{R}, \tag{2.12}$$

$$\Theta\dot{\bar{\omega}} + [\bar{\omega} \times \Theta\bar{\omega}] = [\bar{\rho} \times \bar{R}], \tag{2.13}$$

$$\dot{\bar{\gamma}} + [\bar{\omega} \times \bar{\gamma}] = 0, \tag{2.14}$$

$$\bar{v} + [\bar{\omega} \times \bar{\rho}] = 0. \tag{2.15}$$

Уравнения (2.12) и (2.13) выражают соответственно законы изменения импульса и кинетического момента шара, уравнение (2.14) — условие постоянства вектора $\bar{\gamma}$ в инерциальной системе отсчёта, а уравнение (2.15) — условие отсутствия скольжения шара. Здесь $\bar{R}$ — реакция опорной плоскости, $\Theta = \operatorname{diag}(A_1, A_1, A_3)$ — центральный тензор инерции шара и $\bar{\rho}$ — радиус-вектор точки касания шара с горизонтальной плоскостью по отношению к его центру масс.

Заметим, что уравнения (2.12)—(2.15) описывают движение произвольного тяжёлого твёрдого тела, ограниченного гладкой выпуклой поверхностью, на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Для шара выражение радиуса-вектора точки касания имеет вид $\bar{\rho} = (-r\gamma_1, -r\gamma_2, -r\gamma_3 + a)$.

Система (2.12)—(2.15) допускает четыре первых интеграла [18, 21, 37]:

$$2U_0 = mv^2 + (\bar{\omega}, \Theta\bar{\omega}) - 2mga(\bar{\gamma}, \bar{e_3}) = 2c_0, \tag{2.16}$$

$$U_1 = \left(\Theta\bar{\omega}, \left(\bar{\gamma} - \frac{a}{r}\bar{e_3}\right)\right) = c_1, \tag{2.17}$$

$$U_1 = (I\bar{\omega}, \bar{e_3}) = c_2, \tag{2.18}$$

$$U_3 = \gamma^2 = 1. \tag{2.19}$$

Здесь (2.16) — интеграл энергии, (2.17) — интеграл Желле, (2.18) — интеграл Чаплыгина и (2.19) — геометрический интеграл, c_0, c_1 и c_2 — произвольные константы, а через I обозначено выражение

$$I = \left[A_1 A_3 + mr^2 \left(A_1(1-\gamma_3^2) + A_3 \left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_3 = (\bar{\gamma}, \bar{e_3}).$$

Геометрический интеграл (2.19) определяет конфигурационное пространство существенных координат $\bar{\gamma} \in S^2$, где S^2 — двумерная сфера, называемая сферой Пуассона.

Таким образом, система уравнений (2.12)—(2.15) имеет интеграл энергии (2.16) и два линейных (относительно квазискоростей $\bar{\omega}$) первых интеграла (2.17) и (2.18).

Очевидно, выражение полной энергии шара U_0 содержит переменную $\bar{v}$, которую можно исключить с помощью уравнения (2.15). При этом функция U_0 примет вид

$$2U_0 = m\left([\bar{\omega}, \bar{\rho}]\right)^2 + (\bar{\omega}, \Theta\bar{\omega}) - 2mga(\bar{\gamma}, \bar{e_3}) = 2c_0 \tag{2.20}$$

и будет зависеть, как и интегралы (2.17)—(2.19), только от переменных $\bar{\omega}$ и $\bar{\gamma}$. Таким образом, выражения (2.17)—(2.20) представляют собой первые интегралы уравнений движения вида

$$\Theta\dot{\bar{\omega}} + [\bar{\omega} \times \Theta\bar{\omega}] + m[\bar{\rho} \times [\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}]] + m[\bar{\rho} \times [\bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}]]], \quad \dot{\bar{\gamma}} + [\bar{\omega} \times \bar{\gamma}] = 0. \tag{2.21}$$

Первое уравнение системы (2.21) получается из уравнения (2.13), если из него исключить реакцию $\bar{R}$ с помощью уравнений (2.12), (2.15), а также соотношения

$$\dot{v} + [\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}] + [\bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}] = 0,$$

которое получается из (2.15) дифференцированием по времени.

Система уравнений (2.21) допускает квадратичный первый интеграл (2.20) вида (2.4) и два линейных первых интеграла (2.17), (2.18) вида (2.5). Следовательно, при изучении СД этой системы можно использовать теорию, изложенную в разделах 2.1, 2.2.

Согласно этой теории, исследование условий существования и устойчивости СД неоднородного динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой плоскости сводится к исследованию эффективного потенциала данной системы. Для его построения мы должны найти минимум выражения (2.20) по переменным $\bar{\omega}$ на фиксированных уровнях интегралов Желле (2.17) и Чаплыгина (2.18).

Заметим, что данные интегралы зависимы на полюсах $P_\pm$ ($\gamma_3 = \pm 1$) сферы Пуассона S^2. Действительно, если обозначить через ω_i и γ_i ($i = 1, 2, 3$) проекции векторов ω и γ на главные центральные оси инерции шара, то интегралы (2.17) и (2.18) можно записать в виде

$$U_1 = A_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right) = c_1,$$

$$U_2 = \left[A_1 A_3 + mr^2 \left(A_1(1-\gamma_3^2) + A_3 \left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right)^2\right)\right]^{1/2} \omega_3 \equiv I\omega_3 = c_2.$$

Таким образом, для полюсов $P_\pm$ ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = \pm 1$) имеем

$$U_1 = A_3 \left(\pm 1 - \frac{a}{r}\right) \omega_3 = c_1,$$

$$U_2 = I_\pm \omega_3 = c_2, \quad I_\pm = \left[A_1 A_3 + mr^2 A_3 \left(\pm 1 - \frac{a}{r}\right)^2\right]^{1/2},$$

и поэтому

$$I_\pm c_1 = A_3 \left(\pm 1 - \frac{a}{r}\right) c_2.$$

В соответствии с теорией, изложенной в разделе 2.2, если

$$I_\pm c_1 \neq A_3 \left(\pm 1 - \frac{a}{r}\right) c_2,$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{c_1,c_2}(\gamma_3) = \frac{(Ic_1 - A_3(\gamma_3 - a/r)c_2)^2}{2A_1^2 A_3 (1-\gamma_3^2)} - mga\gamma_3, \quad \gamma \in (-1, 1). \tag{2.22}$$

Если

$$c_2 = \frac{I_+ c_1}{A_3(1 - a/r)} = c_{2+},$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{c_1,c_2}(\gamma_3) = \frac{(1-\gamma_3)(A_3(1 - 2a/r + \gamma_3) + mr^2(1 - a/r)^2(1+\gamma_3))^2 c_1^2}{2A_3(1+\gamma_3)(1-a/r)^2((1-a/r)I + (\gamma_3 - a/r)I_+)^2} - mga\gamma_3. \tag{2.23}$$

Аналогично, если

$$c_2 = \frac{I_- c_1}{A_3(1 + a/r)} = c_{2-},$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{c_1,c_2}(\gamma_3) = \frac{(1+\gamma_3)(A_3(1 + 2a/r - \gamma_3) + mr^2(1 + a/r)^2(1-\gamma_3))^2 c_1^2}{2A_3(1-\gamma_3)(1+a/r)^2((1+a/r)I - (\gamma_3 - a/r)I_-)^2} - mga\gamma_3. \tag{2.24}$$

Формулы (2.23) и (2.24) получаются из (2.22) предельным переходом $c_2 \to c_{2\pm}$ ($\gamma_3 \in I_\pm$, где $I_\pm$ — полуинтервал с концами -1 и $+1$, из которого исключена соответственно точка $\gamma_3 = \pm 1$).

Очевидно, функция (2.23) не имеет особенностей в окрестности полюса P_+ сферы Пуассона. Аналогично, функция (2.24) не имеет особенностей в окрестности полюса P_-. Эти полюса соответствуют перманентным вращениям шара вокруг его вертикально расположенной оси динамической симметрии:

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \\ \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_\pm = \frac{c_1}{A_3(\pm 1 - a/r)}, \quad v = 0. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Если $\gamma_3 = +1$, то центр масс шара занимает самое низкое положение. Соответствующие переменные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия

$$\left.\frac{dW_{c_1,c_{2+}}(\gamma_3)}{d\gamma_3}\right|_{\gamma_3=+1} < 0 \quad (>0),$$

т. е. когда выполняется неравенство

$$(A_3 + mr(r-a))^2\, c_1^2 + 4mgaA_3^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 (A_1 + m(r-a)^2) > 0 \quad (<0).$$

Очевидно, что данное неравенство выполнено при любом значении c_1 константы интеграла (2.17). Таким образом, перманентные вращения шара с самым низким расположением центра масс всегда устойчивы.

Если $\gamma_3 = -1$, то центр масс шара занимает самое высокое положение. Соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия

$$\left.\frac{dW_{c_1,c_{2+}}(\gamma_3)}{d\gamma_3}\right|_{\gamma_3=-1} > 0 \quad (<0),$$

т. е. когда выполняется неравенство

$$(A_3 + mr(r+a))^2 c_1^2 - 4mgaA_3^2\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 (A_1 + m(r+a)^2) > 0 \quad (<0). \tag{2.26}$$

Неравенство (2.26) представляет собой условие устойчивости перманентных вращений шара с самым высоким расположением центра масс.

При произвольных значениях постоянных интегралов Желле и Чаплыгина система уравнений (2.21) имеет также двухпараметрическое семейство решений

$$\begin{gathered}\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = \omega\cos\theta + \Omega,\\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2 = \sin^2\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta,\end{gathered} \tag{2.27}$$

где постоянные ω и Ω находятся из системы уравнений

$$A_1\omega\sin^2\theta + A_3\left(\cos\theta - \frac{a}{r}\right)(\omega\cos\theta + \Omega) = c_1, \quad I_\theta(\omega\cos\theta + \Omega) = c_2,$$

а угол θ — из уравнения

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = 0. \tag{2.28}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$W(\theta) = W_{c_1,c_2}(\gamma_3)|_{\gamma_3=\cos\theta} = \frac{(I_\theta c_1 - A_3(\cos\theta - a/r)c_2)^2}{2A_1^2 A_3\sin^2\theta} - mga\cos\theta,$$

$$I_\theta = I|_{\gamma_3=\cos\theta} = \left[A_1A_3 + mr^2\left(A_1\sin^2\theta + A_3\left(\cos\theta - \frac{a}{r}\right)^2\right)\right]^{1/2}.$$

Решением уравнения (2.28) отвечают параллели $P_\theta = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \sin^2\theta,\ \gamma_3 = \cos\theta)$ сферы Пуассона, а решениям (2.27) — регулярные прецессии шара: шар вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси динамической симметрии, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали. При этом угол между осью динамической симметрии и вертикалью постоянно равен $\theta = \arccos \gamma_3$. Точки минимума (максимума) эффективного потенциала $W(\theta)$ соответствуют устойчивым (неустойчивым) регулярным прецессиям шара.

2.4. Консервативные неголономные системы Чаплыгина с симметрией

Методы Рауса—Сальвадори, Пуанкаре—Четаева и Смейла (см. разделы 2.1, 2.2) широко применяются для исследования вопросов существования, устойчивости и ветвления стационарных движений консервативных голономных систем с симметрией. Дело в том, что голономные системы с симметрией всегда допускают как стационарные движения, так и линейные первые интегралы. Неголономные системы с симметрией также всегда допускают стационарные движения, но, как правило, не допускают линейных интегралов. Поэтому вопрос о существовании таких интегралов требует особого обсуждения. Более того, даже в тех случаях, когда линейные интегралы существуют, их явные выражения, как правило, неизвестны, и применение классических методов качественного анализа также требует специального обсуждения.

Рассмотрим консервативную неголономную систему Чаплыгина с l степенями свободы. Уравнения движения в форме Чаплыгина (1.5) представим в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_r} - \frac{\partial V}{\partial q_r} + \sum_{s,\,p=1}^{l} \omega_{rsp}\dot{q}_s\dot{q}_p, \tag{2.29}$$

$V = V(q)$ — потенциальная энергия,

$$\omega_{rsp} = \sum_{\chi=l+1}^{n} \theta_{\chi r}\nu'_{\chi rs} = \omega_{rsp}(q) \equiv -\omega_{srp}(q),$$

а остальные обозначения совпадают с введёнными выше (см. раздел 1).

Обозначим координаты q_i через x_i $(i = 1, \ldots, k)$, а координаты q_α через y_α $(\alpha = k+1, \ldots, n)$ и предположим, что уравнения Чаплыгина инвариантны относительно $(n-k)$-параметрической группы преобразований $x \to x$, $y \to y + \varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R}^{n-k})$. Это означает, что координаты y циклические в том смысле, что

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega_{rsp}}{\partial y_\alpha} = 0. \tag{2.30}$$

При этом уравнения (2.29) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{x}_i} = \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{j,h=1}^{k}\omega_{ijh}\dot{x}_j\dot{x}_h +$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=k+1}^{l}(\omega_{ij\alpha}+\omega_{i\alpha j})\dot{x}_j\dot{y}_\alpha + \sum_{\alpha,\,\beta=k+1}^{l}\omega_{i\alpha\beta}\dot{y}_\alpha\dot{y}_\beta \quad (i=1,\ldots,k), \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{y}_\alpha} = \sum_{i,j=1}^{k}\omega_{\alpha ij}\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\beta=k+1}^{l}(\omega_{\alpha i\beta}+\omega_{\alpha\beta i})\dot{x}_i\dot{y}_\beta +$$

$$+\sum_{\beta,\,\gamma=k+1}^{l}\omega_{\alpha\beta\gamma}\dot{y}_\beta\dot{y}_\gamma \quad (\alpha=k+1,\ldots,l). \tag{2.32}$$

Здесь и далее $i,j,h=1,\ldots,k$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon=k+1,\ldots,n$. Очевидно, уравнения (2.31), (2.32) всегда допускают интеграл энергии

$$H=\Theta+V=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=k+1}^{l}a_{i\alpha}(x)\dot{x}_i\dot{y}_\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=k+1}^{l}a_{\alpha\beta}(x)\dot{y}_\alpha\dot{y}_\beta + V(x) = c_0 = \mathrm{const}, \tag{2.33}$$

но, вообще говоря, не допускают циклических интегралов вида $\partial\Theta/\partial\dot{y}_\alpha=\mathrm{const}$.

Можно показать, что (2.31), (2.32) допускают линейные по обобщённым скоростям интегралы

$$I_a=\sum_{\beta=k+1}^{l}c_{a\beta}(x)\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{y}_\beta}=c_a=\mathrm{const} \tag{2.34}$$

(здесь и далее $a,b=1,\ldots,l-k$) при выполнении условий (2.30), (2.35)—(2.37). При этом коэффициенты $c_{a\beta}(x)$, вообще говоря, неизвестны, определяются из системы уравнений в частных производных (2.38) и удовлетворяют условию (2.39). Здесь

$$\omega_{\beta\gamma\delta}+\omega_{\beta\delta\gamma}\equiv 0, \tag{2.35}$$

$$\omega_{\alpha ij}+\omega_{\alpha ji}+\sum_{\gamma,\beta=k+1}^{l}a^{\gamma\beta}[a_{\beta j}(\omega_{i\alpha\gamma}+\omega_{\gamma\alpha i})+a_{\beta i}(\omega_{j\alpha\gamma}+\omega_{\gamma\alpha j})]\equiv 0, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_{i\alpha\beta}+\omega_{\beta\alpha i}) + \sum_{\gamma,\,\delta=k+1}^{l}a^{\gamma\delta}(\omega_{j\alpha\gamma}+\omega_{\gamma\alpha j})\left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x_i}+\omega_{i\delta\beta}+\omega_{\beta\delta i}\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_{j\alpha\beta}+\omega_{\beta\alpha j}) + \sum_{\gamma,\,\delta=k+1}^{l}a^{\gamma\delta}(\omega_{i\alpha\gamma}+\omega_{\gamma\alpha i})\left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x_j}+\omega_{j\delta\beta}+\omega_{\beta\delta j}\right), \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial c_{a\beta}}{\partial x_i} \equiv \sum_{\gamma,\,\delta=k+1}^{l} a^{\beta\gamma}(\omega_{i\delta\gamma}+\omega_{\gamma\delta i})c_{a\delta} \quad \left((a^{\beta\gamma})=(a_{\beta\gamma})^{-1}\right), \tag{2.38}$$

$$\det(c_{a\beta}) \neq 0. \tag{2.39}$$

Заметим, что условия (2.37) заведомо выполнены при $k=1$, а условия (2.35) — при $l-k=1$.

Минимум полной механической энергии системы (2.33) по обобщённым скоростям $\dot{x}$, $\dot{y}$ на фиксированных уровнях линейных интегралов (2.34) (эффективный потенциал) достигается при

$$\dot{x}_i=0, \quad \dot{y}_\alpha=\sum_{a=1}^{l-k}\sum_{\beta=k+1}^{l} a^{\alpha\beta}(x)c^{a\beta}(x)c_a \quad \left((c^{a\beta})=(c_{a\beta})^{-1}\right) \tag{2.40}$$

и равняется

$$V_c=V(x)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta,a,b} a^{\alpha\beta}(x)c^{a\alpha}(x)c^{b\beta}(x)c_ac_b. \tag{2.41}$$

Соотношение (2.41) задаёт эффективный потенциал $V_c(x)$ рассматриваемой системы, однако его явный вид, вообще говоря, неизвестен, поскольку неизвестны явные выражения функций $c_{a\alpha}(x)$, удовлетворяющих уравнениям (2.38) и условию (2.39) и заведомо существующих при условиях (2.30), (2.35)—(2.37).

Согласно общей теории Рауса для систем с симметрией критическим точкам x_0 эффективного потенциала $V_c(x)$ соответствуют стационарные движения вида

$$x_i=x_{i0}(c), \quad \dot{y}_\alpha=\dot{y}_{\alpha 0}(c)=\sum_{a,\beta} a^{\alpha\beta}(x_0(c))c^{a\beta}(x_0(c))c_a, \tag{2.42}$$

причём точкам минимума соответствуют устойчивые стационарные движения. При этом семейства $x_0(c)$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,a,b}\frac{\partial(a^{\alpha\beta}c^{a\alpha}c^{b\beta})}{\partial x_i}c_ac_b=0 \tag{2.43}$$

и задают в пространстве $(c;x)$ $\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^k$ бифуркационную диаграмму Пуанкаре—Четаева. Вычислив затем $V_c(x_0(c))=f(c)$, можно построить бифуркационную диаграмму Смейла, определяемую в пространстве $\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}$ $(c;c_0)$ соотношениями $c_0=f(c)$. Поверхности $c_0=f(c)$ делят пространство постоянных первых интегралов (2.33), (2.34) рассматриваемой системы на области, различающиеся топологическим типом движения (типы определяются неравенством $V_c(x)\leqslant c_0$). Однако в общем случае явные формулы $x=x_0(c)$ и $c_0=f(c)$, определяющие диаграммы Пуанкаре—Четаева и Смейла, получить невозможно, поскольку, как уже отмечалось, невозможно выписать явное выражение эффективного потенциала.

Заметим, что стационарные движения рассматриваемой системы в явном виде можно найти по крайней мере двумя другими способами [17]. Во-первых, эти движения можно представить в виде

$$x_i = x_{i0}(\omega), \quad \dot{y}_\alpha = \dot{y}_{\alpha 0} = \omega_\alpha. \tag{2.44}$$

При этом семейства $x_0(\omega)$ определяются из уравнений (см. (2.31))

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{\alpha,\beta}\Bigl(-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + \omega_{\alpha i\beta}\Bigr)\omega_\alpha\omega_\beta = 0. \tag{2.45}$$

Во-вторых, стационарные движения системы можно представить в виде

$$x_i = x_{i0}(p), \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\dot{y}_\alpha} = p_\alpha. \tag{2.46}$$

При этом семейства $x_0(p)$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\Bigl(\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial x_i} + \sum_{\gamma,\delta}\omega_{\gamma i\delta}a^{\gamma\alpha}a^{\delta\beta}\Bigr)p_\alpha p_\beta = 0. \tag{2.47}$$

Более того, выбирая в качестве параметров семейства стационарных движений величины ω_α или p_α, можно в явном виде получить условия минимума эффективного потенциала в его критической точке x_0 и тем самым условия устойчивости соответствующего стационарного движения. Действительно, вторая вариация эффективного потенциала имеет вид

$$\delta^2 V_c(x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} v_{ij}\xi_i\xi_j \quad (\xi_i = x_i - x_{i0}),$$

причём её коэффициенты явным образом выражаются через параметры ω:

$$v_{ij} = \Biggl\{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta}\biggl[\Bigl(-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial\omega_{\alpha i\beta}}{\partial x_j}\Bigr) + \\ + \sum_{\gamma,\delta}a^{\gamma\delta}\Bigl(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial x_i} + \omega_{i\alpha\gamma} + \omega_{i\gamma\alpha}\Bigr)\Bigl(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x_j} + \omega_{j\delta\beta} + \omega_{\beta\delta j}\Bigr)\biggr]\Biggr\}_{x=x_0(\omega)}\omega_\alpha\omega_\beta.$$

Аналогично можно выписать явные выражения коэффициентов v_{ij} через параметры p.

Однако ни параметры ω (скорости циклических координат), ни параметры p (импульсы, соответствующие циклическим координатам) не являются существенными по Четаеву [38], так как сохраняют начальные значения только на стационарных движениях. Поэтому соотношения (2.44)—(2.47) не пригодны для построения бифуркационных диаграмм Пуанкаре—Четаева и Смейла, и возникает проблема разработки алгоритмов построения таких диаграмм на основе соотношений (2.42), (2.43), в которые входят функции $c(x)$, не известные в явном виде, но удовлетворяющие вполне определённой системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Ниже эта проблема решается для конкретной неголономной системы Чаплыгина: тяжёлого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

2.5. Тело вращения на абсолютно шероховатой плоскости

Рассмотрим качение без скольжения тяжёлого абсолютно твёрдого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости, предполагая, что центр тяжести тела G лежит на его оси симметрии $G\zeta$. Пусть M — точка касания тела с плоскостью.

Введём неподвижную систему координат $Oxyz$: точка O принадлежит опорной плоскости Oxy, ось Oz направлена вертикально вверх. Обозначим через θ угол между осью симметрии тела и вертикалью, через β — угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, а через α — угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox. Положение тела будет вполне определено углами α, β, θ и координатами x и y точки M. Введём также систему координат $G\xi\eta\zeta$, подвижную как в теле, так и в абсолютном пространстве, следующим образом: ось $G\zeta$ является осью симметрии тела, ось $G\xi$ всё время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а $G\eta$ перпендикулярна ей. Пусть векторы скорости центра масс G, угловой скорости тела и угловой скорости трёхгранника $G\xi\eta\zeta$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ, v_η, v_ζ, p, q, r и Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ соответственно. Пусть m — масса тела, A_1 — его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 — момент инерции относительно оси симметрии.

Заметим, что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ, т. е. $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ, причём $\eta = 0$,

$$\xi = -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \quad \zeta = -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta. \tag{2.48}$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет всё время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta - \Omega_\xi \operatorname{ctg}\theta = 0$. Поскольку скольжения нет, то

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.$$

Запишем закон изменения импульса и закон изменения кинетического момента в проекциях на оси подвижной системы координат. Исключая затем компоненты скорости центра масс и компоненты реакции опорной плоскости с помощью уравнений связей, получим три дифференциальных уравнения относительно p, q, r:

$$\begin{aligned}
&[A_1 + m(\xi^2+\zeta^2)]\frac{dq}{dt} = mgf'(\theta) + (A_3 r - A_1 p\operatorname{ctg}\theta)p - \\
&\qquad - mp(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi)(p\zeta - r\xi) - mq\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt}\right), \\
&A_1\frac{dp}{dt} + A_3\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{dt} = (A_1 p\operatorname{ctg}\theta - A_3 r)q, \\
&\frac{d}{dt}(p\zeta - r\xi) - \frac{A_3}{m\xi}\frac{dr}{dt} = (\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi)pq.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Здесь ξ и ζ — функции угла θ, определяемые равенствами (2.48). Добавив к (2.49) очевидное соотношение

$$q = -\frac{d\theta}{dt}, \tag{2.50}$$

получим замкнутую систему четырёх дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени p, q, r, θ.

Полученная система уравнений допускает интеграл энергии $H = \mathrm{const}$. Воспользовавшись теоремой Кёнига и условиями отсутствия скольжения, его можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2}A_1 p^2 + \frac{1}{2}(A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2))q^2 + \\ + \frac{1}{2}A_3 r^2 + \frac{1}{2}m(p\zeta - r\xi)^2 + mgf(\theta) = \mathrm{const}. \tag{2.51}$$

Кроме того, эти уравнения допускают два линейных интеграла $K_1 = \mathrm{k}_1 = \mathrm{const}$, $K_2 = \mathrm{k}_2 = \mathrm{const}$ вида

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\omega}. \tag{2.52}$$

Здесь $\mathbf{K} = (K_1, K_2)^T$, $\boldsymbol{\omega} = (p, r)^T$, а $\mathbf{\Phi}(\theta)$ — фундаментальная матрица следующей системы уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\theta} = A(\theta)\boldsymbol{\omega},$$
$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{A_3 m\zeta(\xi+\zeta')}{\Delta} & \frac{A_3(A_3 + m\xi^2 + m\xi'\zeta)}{\Delta} \\ \frac{A_1 m\xi(\xi+\zeta')}{\Delta} & \frac{m\xi(A_3\zeta - A_1\xi')}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$
$$\Delta = A_1 A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2.$$

Для исследования вопросов существования и устойчивости стационарных движений тела будем применять теорию Рауса. Согласно этой теории, критическим точкам интеграла энергии при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают стационарные движения тела. Построим эффективный потенциал — минимум квадратичного по p, q, r интеграла энергии (2.51) на фиксированных уровнях линейных первых интегралов (2.52):

$$W_{\mathrm{k}}(\theta) = \min_{p,q,r} H|_{K=\mathrm{k}} = H|_{q=0,\, \boldsymbol{\omega}=\Phi(\theta)\mathrm{k}} = \\ = \frac{1}{2}A_1 p^2 + \frac{1}{2}A_3 r^2 + \frac{1}{2}m(p\zeta - r\xi)^2 + mgf(\theta). \tag{2.54}$$

Здесь ξ, ζ, f — известные функции переменной θ, а p и r — функции переменной θ и констант k_1 и k_2, не известные в явном виде ($p(\theta, k_1, k_2)$ и $r(\theta, k_1, k_2)$ представляют собой общее решение системы (2.53)). Стационарные движения соответствуют решениям уравнения

$$\frac{dW_{\mathrm{k}}(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{2.55}$$

и имеют вид

$$\theta = \theta_0(k_1, k_2), \quad \omega = \Phi(\theta_0(k_1, k_2))\mathbf{k}, \quad q = 0. \tag{2.56}$$

Дифференцируя функцию (2.54) по θ и используя уравнения (2.53), представим уравнение (2.55) в следующем виде:

$$\begin{gathered} F(k_1, k_2, \theta) = \frac{dW_{\mathrm{k}}(\theta)}{d\theta} = -C \operatorname{ctg}\theta p^2 + Drp + mgf' = 0, \\ C = \left(A_1 - \frac{m\zeta}{\cos\theta} f\right), \quad D = \left(A_3 - \frac{m\xi f}{\sin\theta}\right). \end{gathered} \tag{2.57}$$

Для дальнейшего исследования стационарных движений тела можно численно построить диаграмму Пуанкаре—Четаева — поверхность в пространстве (k_1, k_2, θ), задаваемую неявно уравнением (2.57), а также диаграмму Смейла — поверхность в пространстве констант первых интегралов (k_1, k_2, h), соответствующую стационарным движениям тела. Для построения этих диаграмм был разработан алгоритм [4], не требующий знания явного вида функций $p(\theta, k_1, k_2)$ и $r(\theta, k_1, k_2)$.

3. Стационарные движения неголономных систем общего вида

При исследовании задач устойчивости и стабилизации программных движений нелинейных механических систем (голономных и неголономных) особый интерес представляют установившиеся движения (положения равновесия и СД), так как именно эти движения являются, как правило, рабочими режимами многих технических объектов. Поэтому прежде всего необходимо установить, являются ли рассматриваемые установившиеся движения устойчивыми и каков характер этой устойчивости. Однако во многих случаях указанные движения либо не обладают необходимыми свойствами устойчивости, либо (в случае устойчивости) характер переходных процессов не удовлетворяет заданным техническим требованиям. Таким образом, естественно возникает необходимость решения задачи стабилизации — обеспечения устойчивости (асимптотической устойчивости) установившегося движения путём приложения определённых управляющих воздействий.

При рассмотрении СД неголономных систем могут использоваться уравнения движения в различных формах. С нашей точки зрения, наиболее удобной для анализа СД является запись уравнений движения в лагранжевых координатах (уравнения Воронца, Чаплыгина). При использовании уравнений движения в лагранжевых координатах под СД понимается такое движение, при котором позиционные координаты и скорости циклических координат сохраняют начальные значения, а сами циклические координаты меняются линейно со временем [20]. Однако если для голономных систем циклическими координатами называются такие координаты, от которых не зависит функция Лагранжа системы, то для неголономных систем имеется несколько различных определений. Одни из таких определений обеспечивают существование циклических интегралов, а другие — существование СД.

При анализе конкретных неголономных систем, как правило, оказывается, что уравнения движения не имеют циклических интегралов, но допускают стационарные решения, причём коэффициенты уравнений неголономных связей явно зависят от циклических координат.

3.1. Циклические координаты и стационарные движения

При рассмотрении СД будем исходить из уравнений Воронца (1.4).

3.1.1. Общий случай. Будем предполагать, что выполнены условия [20]

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\mu}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial q_\mu}=0,\quad \frac{\partial b_{\chi r}}{\partial q_\mu}=0\quad (\mu=m+1,\ldots,n), \tag{3.1}$$

означающие, что последнее $n-m$ уравнений неголономных связей (1.3) — связи типа Чаплыгина (первые $m-l$ связей — связи общего вида).

Для неголономных систем при отыскании стационарных движений предпочтительнее пользоваться следующим определением циклических координат [20].

Координаты q_α $(\alpha=k+1,\ldots,l)$ называются циклическими, если выполняются условия

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\alpha}=0,\quad \frac{\partial b_{\rho r}}{\partial q_\alpha}=0,\quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\chi=l+1}^{n}\Theta_{\chi p}\nu_{\chi rs}=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}=0\quad (p,r,s=1,\ldots,k).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Остальные координаты q_i $(i=1,\ldots,k)$ и q_ρ $(\rho=l+1,\ldots,m)$ позиционные.

Допустим, что при некоторых начальных условиях возможно СД системы, при котором позиционные координаты и циклические скорости постоянны:

$$q_i(t)=q_{i0},\quad \dot q_i(t)=0,\quad \dot q_\alpha(t)=\dot q_{\alpha 0}=\omega_\alpha,\quad q_\rho(t)=q_{\rho 0}. \tag{3.3}$$

Для существования СД (3.3) необходимо, чтобы в отсутствие управляющих сил не было диссипации по циклическим скоростям, т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot q_\alpha}=0.$$

Если $\partial\Phi/\partial\dot q_\alpha\neq 0$, то необходимо, чтобы $(\partial\Phi/\partial\dot q_\alpha)_0=Q_{\alpha 0}$, т. е. чтобы на СД диссипативные силы компенсировались управляющими силами, приложенными по циклическим координатам. При этом m постоянных величин q_{i0}, $\dot q_{\alpha 0}$, $q_{\rho 0}$ удовлетворяют m уравнениям

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \sum_{\rho=l+1}^{m}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\rho}b_{\rho i}\right)_0 + \sum_{\gamma,\beta=k+1}^{l}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\rho=l+1}^{m}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\rho}b_{\rho i}\right)_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\chi=l+1}^{n}\Theta_{\chi\gamma}\nu_{\chi i\beta} - \sum_{\rho=l+1}^{m}\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\rho}b_{\rho\gamma}\right\}\omega_\gamma\omega_\beta = 0, \tag{3.4}$$

$$\sum_{\gamma,\beta=k+1}^{l}\left\{\sum_{\chi=l+1}^{n}\Theta_{\chi\gamma}\nu_{\chi\alpha\beta} + \sum_{\rho=l+1}^{m}\left[\frac{1}{2}b_{\rho\alpha}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q_\rho} - b_{\rho\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\rho}\right]\right\}_0\omega_\gamma\omega_\beta +$$

$$+ \sum_{\rho=l+1}^{m}\left\{b_{\rho\alpha}\frac{\partial U}{\partial q_\rho}\right\}_0 = 0, \tag{3.5}$$

$$\sum_{\alpha=k+1}^{l}(b_{\rho\alpha})_0\omega_\alpha = 0. \tag{3.6}$$

Нулевой индекс означает, что выражение вычислено для значений переменных, соответствующих СД (3.3).

В общем случае система (3.4)—(3.6) имеет лишь тривиальные относительно ω_α решения, отвечающие положениям равновесия системы [17, 20]. В ряде случаев среди уравнений (3.4)—(3.6) может оказаться m_1 ($m_1 < m$) независимых. Тогда рассматриваемая система может иметь семейство СД вида (3.3) размерности $m - m_1$.

Если выполнены условия

$$\sum_{\mu=m+1}^{n}(\Theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha\gamma})_0 = \sum_{\mu=m+1}^{n}(\Theta_{\mu\gamma}\nu_{\mu\alpha\beta})_0, \quad (b_{\rho\alpha})_0 = 0, \tag{3.7}$$

то уравнения (3.5), (3.6) удовлетворяются при любых значениях ω_α, и в системе существует многообразие СД, размерность которого не меньше суммы числа циклических координат ($l-k$) и числа неголономных связей общего вида ($m-l$).

Далее будем полагать, что условия (3.7) выполнены. Тогда система имеет многообразие СД размерности $m - k$, параметры которого q_{i0}, $q_{\rho 0}$, ω_α удовлетворяют системе уравнений

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \sum_{\rho=l+1}^{m}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\rho}b_{\rho i}\right)_0 +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=k+1}^{l}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\rho=l+1}^{m}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\rho}b_{\rho i}\right) + \sum_{\chi=l+1}^{n}\Theta_{\chi\alpha}\nu_{\chi i\beta}\right]_0\omega_\alpha\omega_\beta = 0. \tag{3.8}$$

Обсудим условия (3.7). Эти условия выполняются, в частности, если

$$\sum_{\mu=m+1}^{n}(\Theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha\gamma})_0 = 0, \tag{3.9}$$

$$(b_{\rho\alpha})_0 = 0. \tag{3.10}$$

Очевидно, что для выполнения условий (3.9), (3.10) достаточно, чтобы удовлетворялись следующие условия [15, 17, 20, 53]:

$$\sum_{\mu=m+1}^{n} \Theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha\gamma} \equiv 0, \tag{3.11}$$

$$b_{\rho\alpha} \equiv 0. \tag{3.12}$$

Заметим, что условия (3.11), (3.12) выполняются тождественно по позиционным координатам, а условия (3.9), (3.10) — лишь на стационарном движении.

При исследовании устойчивости СД неголономных механических систем можно предполагать выполнение либо условий (3.9), (3.10), либо более жёстких условий (3.11), (3.12). Ранее [15,17,20,53] всегда предполагалось выполнение условий (3.11), (3.12), и эти условия действительно выполнены в известных задачах о СД тяжёлого твёрдого тела (диска, тора и т. д.) на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, а также в задаче о движении трёхколёсного велосипеда [53]. Однако в ряде задач, в частности в задачах об устойчивости СД моноцикла [5, 10, 12, 31, 32], условия (3.11) не выполняются, но выполнены условия (3.9).

Для систем Чаплыгина уравнения (3.4), (3.5) принимают вид

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \sum_{\alpha,\beta=k+1}^{l} \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\chi=l+1}^{n} \Theta_{\chi\beta}\nu_{\chi i\alpha}\right\}_0 \omega_\alpha\omega_\beta = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k), \\
\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{l} \left(\sum_{\chi=l+1}^{n} \Theta_{\chi\alpha}\nu_{\chi\gamma\beta}\right)_0 \omega_\alpha\omega_\beta = 0 \qquad (\gamma = k+1, \ldots, l).
\end{gathered} \tag{3.13}$$

В этом случае при выполнении условия (3.7) в системе существует многообразие установившихся движений, размерность которого не меньше числа циклических координат $l - k$.

3.1.2. Специальный класс неголономных систем. Представляет интерес исследование одного класса неголономных систем, обладающих определённой спецификой. Предположим, что обобщённые координаты рассматриваемой системы можно выбрать удовлетворяющими сформулированным ниже условиям.

Стационарные неголономные связи (1.3) представим в виде двух групп

$$\dot q_\chi = \sum_{r=1}^{l} b^1_{\chi r}(q)\dot q_r \quad (\chi = l+1, \ldots, m), \tag{3.14}$$

$$\dot q_\rho = \sum_{r=1}^{l} b^2_{\rho r}(q)\dot q_r \quad (\rho = m+1, \ldots, n) \tag{3.15}$$

и предположим, что

1) коэффициенты $b^1_{\chi r}$ в уравнениях (3.14) являются функциями только координат $q_{l+1}, \ldots, q_m$, скорости которых зависимы в силу тех же уравнений (3.14), тогда как коэффициенты $b^2_{\rho r}$ в уравнениях (3.15) могут зависеть от координат $q_1, \ldots, q_l, q_{l+1}, \ldots, q_m$;
2) потенциальные силы, действующие на систему, являются производными от силовой функции $U(q)$, также зависящей только от координат $q_{l+1}, \ldots, q_m$, т. е. $U = U(q_\chi)$;
3) коэффициенты a_{rs} в выражении для приведённой кинетической энергии Θ и выражение $\sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \Theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}$ зависят только от координат $q_{l+1}, \ldots, q_m$.

Специфическая особенность систем рассматриваемого класса состоит в том, что при отсутствии управляющих воздействий ($Q_r = 0$, $Q_\chi = 0$) все координаты q_r являются циклическими в смысле данного выше определения [20], координаты q_χ ($\chi = l+1, \ldots, m$) позиционные. Следует подчеркнуть, что в этом случае уравнения (1.4) совместно с уравнениями связей (3.14) образуют замкнутую систему уравнений *первого* порядка относительно $\dot q_r$, q_χ и не содержат в явном виде координат q_r. Уравнения неголономных связей (3.15) представляют собой уравнения связей типа Чаплыгина.

СД этого класса неголономных систем описываются соотношениями

$$\dot q_r(t) = \dot q_{r0} = \omega_r, \quad q_\chi(t) = q_{\chi 0}. \tag{3.16}$$

При этом m постоянных величин ω_r, $q_{\chi 0}$ удовлетворяют m уравнениям

$$\sum_{p,s=1}^{l} \left\{ \sum_{\mu=l+1}^{n} \Theta_{\mu p}\nu_{\mu rs} + \sum_{\chi=l+1}^{m} \frac{1}{2} b^1_{\chi r} \frac{\partial a_{ps}}{\partial q_\chi} \right\} \omega_p \omega_s + \sum_{\chi=l+1}^{m} \left\{ b^1_{\chi r} \frac{\partial U}{\partial q_\chi} \right\}_0 = 0, \tag{3.17}$$

$$\sum_{r=1}^{l} (b^1_{\chi r})_0 \omega_r = 0. \tag{3.18}$$

В зависимости от параметров система (3.17), (3.18), как и в общем случае система (3.4)—(3.6), может иметь одно или несколько изолированных решений. Возможны случаи, когда среди уравнений (3.17), (3.18) может оказаться $m - m_1$ независимых, тогда рассматриваемая система будет иметь многообразие СД вида (3.16) размерности m_1.

Заметим, что при выполнении условий существования СД, сформулированных выше для общего случая [17, 20], уравнения (3.17), (3.18) удовлетворяются тождественно по ω_r, $q_{\chi 0}$, т. е. существует m-мерное многообразие СД.

3.2. Исследование устойчивости

3.2.1. Исследование устойчивости в общем случае. Выберем точку многообразия СД, определяемого соотношениями (3.4)—(3.6), и рассмотрим вопрос об устойчивости решения (3.3) системы уравнений (1.3), (1.4) по отношению к возмущениям переменных q_i, $\dot q_i$, $\dot q_\alpha$, $\dot q_\rho$.

Введём отклонения

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad y_\alpha = \dot{q}_\alpha - \omega_\alpha, \quad z_\rho = q_\rho - q_{\rho 0}.$$

Уравнения возмущённого движения при выполнении условий (3.7) в переменных x размерности $k \times 1$, y размерности $(l-k) \times 1$, z размерности $(m-l) \times 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + C\dot{y} &= W_1 x + D_1 \dot{x} + P_1 y + V_1 z + X(x, \dot{x}, y, z), \\ C^T \ddot{x} + B\dot{y} &= W_2 x + D_2 \dot{x} + P_2 y + V_2 z + Y(x, \dot{x}, y, z), \\ \dot{z} &= W_3 x + D_3 \dot{x} + P_3 y + V_3 z + Z(x, \dot{x}, y, z). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Матрицы A, C, D, P, W, $V \ldots$ постоянны, X, Y, Z — вектор-функции, содержащие члены порядка выше первого по введённым переменным.

При выполнении определённых условий структура уравнений возмущённого движения (3.19) может существенно упрощаться.

Если выполнены условия (3.11), (3.12) в уравнениях (3.19), то матрицы W_2, V_2, W_3, V_3, P_2, P_3 нулевые, т. е. уравнения, соответствующие циклическим скоростям, и уравнения, соответствующие уравнениям неголономных связей, не содержат линейных членов по переменным x_i, y_α, z_ρ. Эти уравнения, очевидно, допускают $m-k$ линейных интегралов, которым соответствуют $m-k$ нулевых корней характеристического уравнения системы (3.19) [15, 20]. Положим далее $s = m - k$.

Наличие s-мерного многообразия СД обусловливает существование s нулевых корней и s линейных интегралов (один векторный интеграл размерности s) в линеаризованной системе (3.19) и при отличных от нуля матрицах W_2, V_2, W_3, V_3, удовлетворяющих некоторым условиям.

Можно показать, что если выполняется условие

$$P_2 = W_2 W_1^{-1} P_1 \quad (\det W_1 \neq 0), \tag{3.20}$$

то в линеаризованной системе (3.19) для систем Чаплыгина (в этом случае в системе (3.19) $z \equiv 0$) при $W_2 \neq 0$ существует векторный интеграл размерности $s \times 1$

$$\zeta = (LA + MC^T)\dot{x} + (LC + MB)y - (LD_1 + MD_2)x = \text{const}. \tag{3.21}$$

Очевидно, что условие (3.20) выполняется, в частности, при $W_2 = 0$, $P_2 = 0$ (см. [14, 17, 20]). Для исключения переменной y из интеграла (3.21) необходимо выполнение неравенства

$$\det B_0 = \det(B - W_2 W_1^{-1} C) \neq 0. \tag{3.22}$$

Введя замену переменных

$$y = B_0^{-1}(\zeta + D_3 x - C_0^T \dot{x}), \tag{3.23}$$

систему уравнений (3.19) можно привести к виду

$$A_0 \ddot{x} + D_0 \dot{x} + W_0 x - P_1 B_0^{-1} \zeta = X_0(x, \dot{x}, \zeta), \quad \dot{\zeta} = Z_0(x, \dot{x}, \zeta), \tag{3.24}$$

где

$$A_0 = A - CB_0^{-1}C_0^T, \quad D_0 = -D_1 + P_1B_0^{-1}C_0^T + CB_0^{-1}D_3,$$
$$W_0 = -W_1 - P_1B_0^{-1}D_3, \quad C_0^T = C^T - W_2W_1^{-1}A, \quad D_3 = D_2 - W_2W_1^{-1}D_1.$$

Функции $X_0(x, \dot{x}, \zeta)$, $Y_0(x, \dot{x}, \zeta)$ образованы из функций $X(x, \dot{x}, y)$, $Y(x, \dot{x}, y)$ с учётом замены переменных (3.23).

Очевидно, что характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе (3.24), всегда имеет s нулевых корней, а остальные корни удовлетворяют уравнению

$$\det(A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0) = 0. \tag{3.25}$$

Если среди корней уравнения (3.25) есть корни с положительной действительной частью, то установившееся движение (3.3) неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Так как при указанных условиях число нулевых корней совпадает с размерностью многообразия установившихся движений, то, если все корни уравнения (3.25) имеют отрицательные действительные части, имеет место особенный критический случай нескольких нулевых корней и справедлива теорема Ляпунова—Малкина [26, 27].

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Установившееся движение* (3.3) *неголономной системы Чаплыгина, имеющей многообразие установившихся движений размерности, равной числу циклических координат, устойчиво* (*неустойчиво*), *если все корни уравнения* (3.25) *имеют отрицательные действительные части* (*имеется по крайней мере один корень с положительной действительной частью*). *В случае устойчивости всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных установившихся движений, принадлежащих указанному многообразию.*

Аналогичная теорема для случая, когда в системе Чаплыгина (3.19) матрица $W_2 = 0$, была сформулирована ранее в [14].

Уравнение (3.25) можно рассматривать как характеристическое уравнение линейной голономной системы

$$A_0\ddot{\xi} + D_0\dot{\xi} + W_0\xi = 0 \tag{3.26}$$

с k степенями свободы, находящейся под действием сил произвольной структуры. При этом все корни уравнения (3.25) имеют отрицательные действительные части (имеется корень с положительной действительной частью), если и только если нулевое положение равновесия системы (3.25), которую можно назвать линейной приведённой системой, асимптотически устойчиво (экспоненциально неустойчиво).

Замечание 3.1. Уравнение (3.25) имеет вид

$$a_0\lambda^{2k} + a_1\lambda^{2k-1} + \ldots + a_{2k} = 0, \quad a_0 = \det A_0 > 0, \quad a_1 = \det A_0 \operatorname{Sp}({A_0}^{-1}D_0).$$

Следовательно, асимптотическая устойчивость положения равновесия линейной приведённой системы возможна только при условии, что матрица D_0 не является нулевой. Действительно, иначе $a_1 = 0$ и неверно, что все корни уравнения (3.25) имеют отрицательные действительные части (в последнем случае необходимо, чтобы $a_1 > 0$).

Замечание 3.2. Можно показать, что для консервативной неголономной системы коэффициенты матрицы D_0 представляют собой нечётные функции скоростей циклических координат. Это означает, что если установившееся движение вида $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_\alpha = \omega_\alpha$ консервативной неголономной системы асимптотически по части переменных устойчиво (при этом необходимо, чтобы $\mathrm{Sp}({A_0}^{-1} D_0) > 0$), то установившееся движение $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_\alpha = -\omega_\alpha$) этой системы при тех же условиях неустойчиво (так как при этом $\mathrm{Sp}({A_0}^{-1} D_0) < 0$), т. е. $a_1 < 0$ и уравнение (3.25) имеет корень с положительной вещественной частью. Другими словами, устойчивость установившихся движений неголономных систем может зависеть от направления движения (вперёд-назад, вправо-влево и т. д.).

Замечание 3.3. Характеристическое уравнение (3.25) инвариантно (с точностью до постоянного множителя) относительно выбора переменных, определяющих состояние системы. Поэтому при исследовании устойчивости установившихся движений неголономных систем при помощи теоремы 3.1 уравнения движения этих систем можно принимать в любой форме.

Замечание 3.4. Если все установившиеся движения семейства (3.16) устойчивы при $\sigma > \sigma_0$ и неустойчивы при $\sigma < \sigma_0$ (или наоборот), то при $\sigma = \sigma_0$ от этого семейства могут ответвляться периодические движения, т. е. для консервативных неголономных систем может иметь место явление бифуркации Андронова—Хопфа, характерное для диссипативных динамических систем (здесь предполагается, что $\sigma > 0$ — скалярный параметр).

Можно показать, что для неголономных систем со связями общего вида существование многообразия стационарных движений размерности, равной сумме числа циклических координат $l - k$ и числа неголономных связей общего вида $m - l$, обеспечивает выполнение следующих условий (при $P_2 = 0$, $P_3 = 0$):

$$\begin{gathered} W_2 W_1^{-1} P_1 = 0, \quad W_3 W_1^{-1} P_1 = 0, \\ V_2 = W_2 W_1^{-1} V_1, \quad V_3 = W_3 W_1^{-1} V_1 \quad (\det W_1 \neq 0). \end{gathered} \tag{3.27}$$

Тогда для неголономных систем со связями общего вида имеет место теорема, аналогичная сформулированной выше теореме об устойчивости СД систем Чаплыгина.

При условии $\det W_1 \neq 0$ замена переменных

$$\eta = B_0 y + C_0^T \dot{x} - D_{21} x, \quad \zeta = z - W_3 W_1^{-1} A \dot{x} - W_3 W_1^{-1} C y - D_{31} x, \tag{3.28}$$

где

$$\begin{gathered} B_0 = B - W_2 W_1^{-1} C, \quad C_0^T = C^T - W_2 W_1^{-1} A, \\ D_{21} = D_2 - W_2 W_1^{-1} D_1, \quad D_{31} = D_3 - W_3 W_1^{-1} D_1, \end{gathered}$$

причём

$$\det B_0 \neq 0, \tag{3.29}$$

приводит систему (3.19) к виду

$$\begin{gathered} A_0\ddot{x} + D_0\dot{x} + W_0 x + P_0\eta + V_0\zeta = X_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta), \\ \dot{\eta} = Y_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta), \quad \dot{\zeta} = Z_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta), \end{gathered} \tag{3.30}$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = A - CB_0^1 C_0^T, \quad D_0 = -D_1 - P_0 C_0^T + CB_0^1 D_{21} - V_1 W_3 W_1^{-1} A, \\ W_0 = -W_1 - V_1 D_{31} + P_0 D_{21}, \quad P_0 = -(P_1 + V_1 W_3 W_1^{-1} C) B_0^{-1}, V_0 = -V_1. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Функции $X_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta)$, $Y_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta)$, $Z_0(x, \dot{x}, \eta, \zeta)$ образованы из функций $X(x, \dot{x}, y, z)$, $Y(x, \dot{x}, y, z)$, $Z(x, \dot{x}, y, z)$ с учётом замены переменных (3.28).

Очевидно, что характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе (3.30), всегда имеет $m - k$ нулевых корней, а остальные корни удовлетворяют уравнению (3.25) с матрицами, определёнными соотношениями (3.31).

Таким образом, для неголономных систем со связями общего вида имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Стационарное движение* (3.3) *неголономной системы* (1.3), (1.4)*, имеющей многообразие СД, размерность которого равна сумме числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида, устойчиво* (*неустойчиво*)*, если все корни уравнения* (3.25) *с коэффициентами* (3.31) *имеют отрицательные действительные части* (*имеется по крайней мере один корень с положительной действительной частью*)*. В случае устойчивости всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится при* $t \to \infty$ *к одному из возможных СД, принадлежащих указанному многообразию* (3.8).

Аналогичная теорема для случая, когда $W_2 = 0$, $W_3 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, сформулирована ранее [15].

Важно отметить, что условие (3.29) очень существенно (см. [6]).

3.2.2. Исследование устойчивости систем специального класса Выберем точку многообразия СД, определяемого соотношениями (3.17), (3.18), и рассмотрим вопрос об устойчивости решения (3.16) системы уравнений (1.4), (3.14) по отношению к возмущениям переменных $\dot{q}_r$, q_χ.

Введём отклонения $y_r = \dot{q}_r - \omega_r$, $z_\chi = q_\chi - q_{\chi 0}$. Уравнения возмущённого движения в переменных $y = \left\| y_1 \ \ldots \ y_l \right\|^T$ размерности $l \times 1$ и $z = \left\| z_{l+1} \ \ldots \ z_m \right\|^T$ размерности $(m - l) \times 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{y} &= P_1 y + V_1 z + Y(y, z), \\ \dot{z} &= P_2 y + V_2 z + Z(y, z). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Здесь элементы матриц A, P, V постоянны, вектор-функции $Y(y, z)$, $Z(y, z)$ содержат члены порядка выше первого по переменным y, z.

В отличие от уравнений возмущённого движения неголономной системы общего вида (3.19), рассмотренной выше, система уравнений (3.32) является системой первого порядка и не содержит блока уравнений, отвечающих позиционным координатам. По этой причине задача устойчивости СД неголономной механической системы указанного класса не может быть сведена к задаче об устойчивости положения равновесия некоторой голономной системы, и к ней не могут быть применены теоремы 3.1, 3.2, сформулированные выше. Именно это обстоятельство и обосновывает, в частности, целесообразность выделения введённого выше специального класса неголономных систем.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (3.32) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det G(\lambda) = 0, \quad G(\lambda) = \begin{Vmatrix} A\lambda - P_1 & -V_1 \\ -P_2 & \lambda E - V_2 \end{Vmatrix}. \tag{3.33}$$

Если неголономная механическая система обладает многообразием СД размерности m_1, то выполняется условие $\operatorname{rank} G(0) = m - m_1$. В этом случае характеристическое уравнение (3.33) имеет m_1 нулевых корней, что соответствует особенному критическому по Ляпунову случаю, и для исследования устойчивости СД системы может быть применена теорема Ляпунова—Малкина [26, 27].

Таким образом, для систем рассматриваемого класса можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Если неголономная система* (1.4), (3.14) *при выполнении условий* 1)—3) *пункта* 3.1.2 *имеет многообразие СД, определяемое соотношениями* (3.17), (3.18), *то СД* (3.16) *устойчиво* (*неустойчиво*), *если все корни уравнения* (3.33), *кроме нулевых, имеют отрицательные действительные части* (*имеется по крайней мере один корень с положительной действительной частью*). *В случае устойчивости всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных стационарных движений, принадлежащих указанному многообразию.*

Если выполнены дополнительные условия (3.11), (3.12), сформулированные в [17, 20], то матрицы P_1, P_2, V_1, V_2 нулевые и число нулевых корней характеристического уравнения (3.18), очевидно, равно m. В этом случае для анализа устойчивости необходимо рассматривать полную нелинейную систему.

4. Задача стабилизации стационарных движений

4.1. Постановка задачи

Задача стабилизации СД состоит в том, чтобы надлежащим выбором управляющих воздействий, приложенных как по циклическим, так и по позиционным координатам (или по части этих координат), сделать СД асимптотически устойчивым (или просто устойчивым) по отношению к позиционным координатам, позиционным и циклическим скоростям. Аналогичным образом можно сформулировать задачу об оптимальной стабилизации стационарных движений, в которой требуется выбрать управляющие воздействия так, чтобы обеспечить минимизацию некоторого функционала, характеризующего определённые требования к системе.

Для решения задач стабилизации установившихся движений голономных механических систем с циклическими координатами ранее был предложен подход, основанный на линейной теории управления [7, 8].

В последнее время в связи с развитием робототехники усилился интерес к изучению движений мобильных (колёсных) роботов, механическими моделями которых служат неголономные системы с циклическими координатами. Особый интерес представляют задачи обеспечения устойчивости (задачи стабилизации) установившихся движений этих роботов.

Особенностью постановки задачи о стабилизации СД неголономных систем (как и задачи устойчивости) является то, что в состав системы уравнений возмущённого движения входят уравнения связей (за исключением систем Чаплыгина).

Мы распространяем разработанный ранее подход [7, 8] к решению задач стабилизации голономных систем на неголономные системы.

Введём, как и в разделе 3.2, отклонения от стационарного движения (3.3)

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad y_\alpha = \dot{q_\alpha} - \omega_\alpha, \quad z_\rho = q_\rho - q_{\rho 0}$$

и запишем уравнения возмущённого движения в виде (3.19), вводя управляющие воздействия и выделив линейные члены:

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + C\dot{y} &= W_1 x + D_1\dot{x} + P_1 y + V_1 z + F^{(1)}u^{(1)} + D_3^T F^{(2)}u^{(2)} + X(x, \dot{x}, y, z, u), \\ C^T\ddot{x} + B\dot{y} &= W_2 x + D_2\dot{x} + P_2 y + V_2 z + F^{(3)}u^{(3)} + P_3^T F^{(2)}u^{(2)} + Y(x, \dot{x}, y, z, u), \\ \dot{z} &= W_3 x + D_3\dot{x} + P_3 y + V_3 z + Z(x, \dot{x}, y, z, u). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $F^{(1)}u^{(1)}$, $F^{(2)}u^{(2)}$, $F^{(3)}u^{(3)}$ с $u^{(1)}$ размерности $r_1 \times 1$, $u^{(2)}$ размерности $r_2 \times 1$, $u^{(3)}$ размерности $r_3 \times 1$ — линейные части управляющих воздействий, приложенных соответственно по координатам q_i, q_ρ, q_α.

Система (4.1) имеет наиболее общую структуру, из которой как частные случаи могут быть получены уравнения возмущённого движения в следующих окрестностях:

1) положений равновесия голономной системы ($k = l = n = m$, $y \equiv 0$, $z \equiv 0$);
2) положений равновесия неголономной системы со связями общего вида ($l = k$, $m = n$, $y \equiv 0$);
3) СД голономных систем ($l = n$, $z \equiv 0$);
4) СД неголономных систем Чаплыгина ($m = l$, $z \equiv 0$).

При выполнении определённых условий, возникающих в разных задачах, как уже указывалось, структура уравнений возмущённого движения (4.1) может существенно упрощаться.

Уравнение измерений представим в виде

$$\sigma = H_1 x + H_2\dot{x} + H_3 y + H_4 z. \tag{4.2}$$

Здесь σ размерности $s \times 1$ — линейная часть вектора измерений, $H_1, \ldots, H_4$ — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Линеаризованные уравнения движения в форме (4.1) и уравнения измерений (4.2) являются основными при решении задачи стабилизации установившихся движений неголономных систем со стационарными связями.

Решение задачи стабилизации включает в себя следующие шаги [7, 8, 11]:

1) выяснение принципиальных возможностей стабилизации, которое сводится к исследованию управляемости системы (4.1);
2) определение рационального состава измерительной информации о состоянии системы (о величинах x, y, $\dot{x}$, z), необходимой для построения стабилизирующего управления, которое сводится к анализу наблюдаемости системы (4.1), (4.2);
3) построение самого алгоритма стабилизации, например по оценке вектора состояния системы, которая строится на основе определённой выше измерительной информации;
4) анализ устойчивости нелинейной системы, замкнутой выбранным линейным управлением.

4.2. Управляемость

Принципиальным для любой задачи управления (стабилизации) является вопрос о её разрешимости, который сводится к анализу управляемости и наблюдаемости системы, линеаризованной в окрестности заданного установившегося движения. Вопросы управляемости и наблюдаемости нетривиальны и требуют специального рассмотрения в тех случаях, когда в механической системе число управляющих воздействий достаточно мало (меньше числа степеней свободы) и информация о состоянии системы неполная. Решение задачи управляемости позволяет выяснить принципиальные возможности стабилизации.

Непосредственное применение известных критериев управляемости Калмана [13] к системе (4.1), записанной в форме Коши, приводит к необходимости исследования рангов громоздких матриц высокого порядка.

4.2.1. Управляемость в общем случае. Для исследования управляемости системы (4.1) введём переменные

$$\eta = By + C^T\dot{x} - (D_2 - P_2B^{-1}C^T)x, \quad \zeta = z - (D_3 - P_3B^{-1}C^T)x$$

и преобразуем линеаризованную систему (4.1) к виду

$$S\ddot{x} + N\dot{x} + Kx + M_1\eta + M_2\zeta = F^{(1)}u^{(1)} + D_4^TF^{(2)}u^{(2)} - CB^{-1}F^{(3)}u^{(3)},$$

$$\dot{\eta} = R_1x + P_2B^{-1}\eta + V_2\zeta + P_3^TF^{(2)}u^{(2)} + F^{(3)}u^{(3)}, \tag{4.3}$$

$$\dot{\zeta} = R_2x + P_3B^{-1}\eta + V_3\zeta. \tag{4.4}$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
S = S^T > 0, \quad S = A - CB^{-1}C^T, \\
D_4 = D_3 - P_3B^{-1}C^T, \quad D_5 = D_2 - P_2B^{-1}C^T, \\
N = CB^{-1}D_5 - P_1B^{-1}C^T - D_1, \\
K = -W_1 - P_1B^{-1}D_5 + CB^{-1}R_1 - V_1D_4, \\
M_1 = (CB^{-1}P_2 - P_1)B^{-1}, \quad M_2 = CB^{-1}V_2 - V_1, \\
R_1 = W_2 + V_2D_3 + P_2B^{-1}D_5, \quad R_2 = W_3 + V_3D_4 + P_3B^{-1}D_5.
\end{gathered}
$$

Используя критерий управляемости [44, 46], можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Система* (4.3), (4.4) *управляема тогда и только тогда, когда*

$$
\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} L_1(\lambda) & M_1 & M_2 & F^{(1)} & D_4^TF^{(2)} & CB^{-1}F^{(3)} \\ -R_1 & \lambda E_{l-k} - P_2B^{-1} & -V_2 & 0 & P_3^TF^{(2)} & F^{(3)} \\ -R_2 & -P_3B^{-1} & \lambda E_{m-l} - V_3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = m
$$

для любого $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = \{\lambda_i\colon \det[L(\lambda)] = 0\}$, $L_1(\lambda) = S\lambda^2 + N\lambda + K$,

$$
L(\lambda) = \begin{Vmatrix} L_1(\lambda) & M_1 & M_2 \\ -R_1 & \lambda E_{l-k} - P_2B^{-1} & -V_2 \\ -R_2 & -P_3B^{-1} & \lambda E_{m-l} - V_3 \end{Vmatrix}.
$$

Заметим, что управляемости системы (4.3), (4.4) (выполнения условий теоремы 4.1) можно добиться, вообще говоря, при наличии только одного из управляющих воздействий $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$.

При выполнении определённых условий специфика структуры системы (4.1) позволяет получить, после редукции задачи к системам меньшего порядка, новые эффективные критерии управляемости.

Из структуры уравнений (4.3), (4.4) следует, что при выполнении условия (3.12) система (4.3), (4.4) распадается на две подсистемы, причём вторая, соответствующая уравнениям неголономных связей, неуправляема. Таким образом, при любых управляющих силах система неуправляема по переменным ζ, которые соответствуют позиционным координатам, скорости которых зависимы в силу уравнений связей. В этом состоит особенность систем с неголономными связями по сравнению с голономными.

Применение критерия управляемости [46] к подсистеме (4.3) (при $\zeta \equiv 0$), учёт специфики структуры системы и использование эквивалентных преобразований позволяют, осуществив редукцию, доказать следующую теорему, в которой условия управляемости системы порядка $k + l$ сводятся к проверке рангов матриц порядка k.

Теорема 4.2. *Система* (4.3) *порядка* $k + l$ *управляема тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$
\text{а)}\ \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} K & P_1B^{-1} & F^{(1)} & D_3^TF^{(2)} & CB^{-1}F^{(3)} \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & F^{(3)} \end{Vmatrix} = k, \quad \text{если } \lambda = 0 \in \Lambda_2,
$$

б) $\operatorname{rank}\left\| L_1(\lambda) \quad F^{(1)} \quad D_3^T F^{(2)} \quad CB^{-1}F^{(3)} \right\| = k$ *для любого* $\lambda \neq 0 \in \Lambda_2$,

где

$$\Lambda_2 = \{\lambda_i\colon\ \det[L_2(\lambda)] = 0\}, \quad L_2(\lambda) = \det \begin{Vmatrix} L_1(\lambda) & -P_1 B^{-1} \\ -R_1 & \lambda E_{l-k} \end{Vmatrix}.$$

Влияние управляющих воздействий $u^{(3)}$, приложенных по циклической координате η, на управляемость по позиционным координатам существенно зависит от того, каковы матрицы C и P_1 [11].

Для одной из наиболее распространённых постановок задачи об управлении системой с циклическими координатами [35], когда управляющие воздействия прикладываются только по циклическим координатам (или их части), имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3. *Если управляющие силы действуют только по всем циклическим координатам* ($F^{(1)} \equiv 0$, $F^{(2)} \equiv 0$, $F^{(3)} = E_{l-k}$), *то система* (4.3) *порядка* $k + l$ *в случае* $P_1 = 0$ *управляема тогда и только тогда, когда*

$$\det K \neq 0, \quad \operatorname{rank}\left\| L_1(\lambda) \quad CB^{-1} \right\| = k \ \ \text{для любого } \lambda \neq 0 \in \Lambda_1.$$

Теорема 4.4. *Если* $P_1 = 0$, $C = 0$, *то система* (4.3) *порядка* $k+l$ *управляема тогда и только тогда, когда* $F^{(3)} = E_{l-k}$ *и выполняется одно из условий*

а) $\operatorname{rank}\left\| L_1(\lambda) \quad F^{(1)} \quad D_3^T F^{(2)} \right\| = k$ *для любого* $\lambda \in \Lambda_1$,

б) *управляющие воздействия прикладываются по всем позиционным координатам, скорости которые независимы в силу уравнений связей* ($F^{(1)} = E_k$).

Таким образом, для управляемости системы (4.3) в случае $P_1 = 0$, $C = 0$ необходимо прикладывать управляющие воздействия по позиционным координатам, причём управляемости можно достичь приложением управляющих воздействий как по тем позиционным координатам, скорости которых независимы, так и по позиционным координатам, скорости которых зависимы в силу уравнений связей.

В случае $P_1 \neq 0$, $C = 0$ систему (4.3) можно рассматривать как систему, состоящую из последовательно соединённых подсистем, одна из которых, очевидно, управляема.

В том случае, когда $P_1 \neq 0$, $C \neq 0$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.5. *Система* (4.3) *порядка* $k + l$ *управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\left\| L_1(\lambda) \quad F^{(1)} \quad D_3^T F^{(2)} \quad (\lambda C + P_1)B^{-1}F^{(3)} \right\| = k \quad \text{для любого } \lambda \in \Lambda,\ \lambda_1 = 0.$$

Следствие 4.1. *Если управляющие силы действуют только по всем циклическим координатам* ($F^{(1)} = 0$, $F^{(2)} = 0$, $F^{(3)} = E_{l-k}$) *и они независимы, то система* (4.3) *порядка* $k + l_1$ *управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\left\| L_1(\lambda) \quad C\lambda + P_1 \right\| = k \ \ \text{для любого } \lambda \in \Lambda_1.$$

Аналогичные теоремы о редукции задачи управляемости и критерии управляемости можно сформулировать при выполнении других дополнительных условий раздела 3.1.2.

4.2.2. Управляемость неголономных систем специального класса. Используя приведённый критерий управляемости (теорема 4.1), легко получить критерии управляемости для неголономных систем рассмотренного в разделе 3.1.2 специального класса.

Линеаризованные уравнения возмущённого движения в окрестности СД (3.16) с учётом управляющих воздействий имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{y} &= P_1 y + V_1 z + F^{(1)}u^{(1)} + P_2^T F^{(2)} u^{(2)}, \\ \dot{z} &= P_2 y + V_2 z. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Теорема 4.6. *Система* (4.5) *управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} G_1 = m, \quad G_1 = \begin{Vmatrix} G(\lambda) & F \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} F^{(1)} & P_2^T F^{(2)} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{4.6}$$

где $G(\lambda)$ *определяется соотношением* (3.33), *для любого* $\lambda \in \Lambda$,

$$\Lambda = \{\lambda_i\colon \det G(\lambda) = 0\}.$$

Следствие 4.2. *Если управляющие воздействия приложены только по всем циклическим координатам* ($F^{(1)} = E_l$, $F^{(2)} = 0$), *то система* (4.5) *управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} P_2 & \lambda E - V_2 \end{Vmatrix} = m - l \quad \text{для любого } \lambda \in \Lambda.$$

Следствие 4.3. *Если управляющие воздействия вводятся только по всем позиционным координатам* ($F^{(1)} = 0$, $F^{(2)} = E_{m-l}$) *и система имеет многообразие СД размерности* m_1, *то для управляемости системы* (4.5) *необходимо, чтобы размерность многообразия СД не превышала числа позиционных координат* $m-l$. *Это утверждение показывает, что если* $m_1 > m-l$, *то для стабилизации СД необходимо вводить управляющие воздействия не только по позиционным координатам, но хотя бы по части циклических координат.*

4.3. Наблюдаемость

Для решения задачи стабилизации неголономных механических систем путём формирования управления в виде линейной обратной связи необходимо иметь информацию о состоянии системы, которая доставляется различными измерительными устройствами. Практический интерес представляет вопрос о минимальном количестве измерительной информации, необходимой для определения полного вектора состояния системы. Следует иметь в виду, что измерение позиционных координат, позиционных скоростей и циклических скоростей проводится посредством разных датчиков.

Анализ наблюдаемости системы позволяет определить рациональный состав измерительной информации о состоянии системы, необходимой для построения стабилизирующего управления.

При выполнении тех или иных дополнительных условий специфика структуры системы позволяет, так же как при анализе управляемости, осуществив редукцию задачи, получить новые более простые и эффективные критерии наблюдаемости.

Здесь ограничимся лишь рассмотрением вопросов наблюдаемости линеаризованной системы (4.1) в случае, когда выполнены условия (3.11) и (3.12). Эта система в отсутствие управления имеет вид

$$\begin{aligned} A\ddot{x} + C\dot{y} &= W_1 x + D_1\dot{x} + P_1 y + V_1 z, \\ C^T\ddot{x} + B\dot{y} &= D_2\dot{x}, \\ \dot{z} &= D_3\dot{x}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Рассмотрим измерения σ_1 размерности $s_1 \times 1$ и σ_2 размерности $s_2 \times 1$

$$\sigma_1 = H_1 x + H_2\dot{x}, \tag{4.8}$$

$$\sigma_2 = H_3 y. \tag{4.9}$$

Предполагается, что матрицы H_1, H_2, H_3 размерностей $s_1 \times k$, $s_1 \times k$, $s_2 \times (l-k)$ соответственно имеют полный ранг.

Теорема 4.7. *Для того чтобы система* (4.7), (4.8) *была наблюдаема, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\begin{gathered} \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} L_1(\lambda) \\ H_1 + \lambda H_2 \end{Vmatrix} = k \quad \text{для любого } \lambda \in \Lambda_1, \\ \operatorname{rank} H_1 = k, \quad \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} P_1 & V_1 \end{Vmatrix} = m - k. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Для доказательства удобно ввести, как и в разделе 4.2, переменные ζ, η, а также переменную $\chi = P_1 B^{-1}\eta + V_1\zeta$ и представить систему (4.7) в виде

$$S\ddot{x} + N\dot{x} + Kx - \chi = 0, \quad \dot{\chi} = 0.$$

Матрицы S, N, K, $L_1(\lambda)$ введены в разделе 4.2.

Важно подчеркнуть, что для выполнения условий (4.10) необходимо, чтобы выполнялось равенство $s_1 = k$ (число s_1 измерений (4.8) равно числу позиционных координат x, т. е. необходимо измерять все позиционные координаты). Для того чтобы из наблюдаемости вектора χ следовала наблюдаемость переменных η, ζ необходимо, чтобы $k \geqslant m-k$, т. е. число k позиционных координат должно быть не меньше суммы числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида.

Очевидно, что система (4.7) не наблюдаема по измерению только позиционных скоростей ($H_1 \equiv 0$). Можно показать, что полной наблюдаемости системы (4.7) не может быть и по измерению (4.9).

Замечание 4.1. В задаче стабилизации до неасимптотической устойчивости стационарных движений неголономной механической системы нет необходимости в оценке *всего* вектора состояния. Поэтому может оказаться целесообразным оценивание только той части вектора циклических скоростей (см. раздел 4.2), по которой вводится управляющее воздействие.

В случае, когда измеряются оба вектора σ_1, σ_2, первое и второе условия наблюдаемости теоремы 4.7 сохраняются, а третье имеет вид

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} P_1 B^{-1} & V_1 \\ H_3 & 0 \end{Vmatrix} = m - k.$$

4.4. Алгоритмы стабилизации стационарных движений и исследование устойчивости замкнутой системы

В общем случае исходная линеаризованная система (4.1), (4.2) может быть управляемой и наблюдаемой. Тогда в ней всегда можно построить управление в виде обратной связи по оценке вектора состояния таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость нулевого решения полной замкнутой нелинейной системы.

Однако, как уже указывалось, система (4.1), (4.2) в наиболее распространённых случаях не является полностью управляемой и наблюдаемой. Поэтому обеспечить асимптотическую устойчивость стационарного движения (3.3) введением обратной связи по оценке вектора состояния, вообще говоря, невозможно. В этих случаях, построив управление для управляемой подсистемы, необходимо провести анализ устойчивости нулевого решения полной системы, замкнутой выбранной обратной связью по состоянию (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению в данном случае не применима).

Пусть выполнены условия (3.11), (3.12). Как показано в разделе 4.2, система (4.1) расщепляется на две подсистемы. Одной из них — системе (4.4) — соответствуют нулевые корни характеристического уравнения. Если выполнены условия теорем 4.2—4.5, подсистема (4.3) управляема и для неё можно построить управление в виде

$$u^{(j)} = -K_{j1}x - K_{j2}\dot{x} - K_{j3}\eta \quad (j = 1, 2, 3), \tag{4.11}$$

где K_{ji} — постоянные матрицы соответствующих размеров, выбранные из условий асимптотической устойчивости системы (4.3), замкнутой управлением (4.11).

При выполнении условий наблюдаемости теоремы 4.7 существует возможность формирования линейной обратной связи по оценке вектора состояния системы в виде

$$u^{(j)} = -K_{j1}\tilde{x} - K_{j2}\dot{\tilde{x}} - K_{j3}\tilde{\eta} \quad (j = 1, 2, 3), \tag{4.12}$$

где $\tilde{x}$, $\dot{\tilde{x}}$, $\tilde{\eta}$ — оценки векторов x, $\dot{x}$, η, полученные, например, из алгоритма оценивания

$$\dot{\tilde{w}} = A_w\tilde{w} + L_w(\sigma - C_w\tilde{w}) + B_w u, \quad w = \mathrm{col}\lfloor x^T, \dot{x}^T, \eta^T \rfloor. \tag{4.13}$$

Здесь $\sigma = C_w w$ — измерение, по которому система наблюдаема. Матрица коэффициентов усиления L_w определяется из какого-либо критерия малости ошибки оценки $\Delta w = w - \tilde{w}$. Ошибка оценки Δw подчиняется уравнению

$$\Delta\dot{w} = (A_w - L_w C_w)\Delta w,$$

которое при наличии наблюдаемости системы может иметь наперёд заданный характеристический многочлен за счёт соответствующего выбора постоянной матрицы коэффициентов усиления фильтра L_w. В частности, при наличии случайных погрешностей измерений матрица L_w может выбираться из условий минимизации дисперсии ошибки оценки Δw. Замкнутая управляемая система в этом случае описывается соотношениями (4.3), (4.12), (4.13).

Исследуем устойчивость нулевого решения полной замкнутой линейным управлением системы (3.19) при условии, что подсистема (4.3) полностью управляема и управления $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ имеют вид (4.11).

Характеристическое уравнение линейной системы (3.19), замкнутой управлением (4.11), имеет $m - l$ нулевых корней, а остальные лежат в левой полуплоскости. Можно показать, что рассматриваемая система приводится к виду, который полностью отвечает особенному случаю нескольких нулевых корней, и выполняется теорема Ляпунова—Малкина [26,27], согласно которой нулевое решение системы устойчиво. При этом всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных СД.

5. Приложения

Теоретические результаты, изложенные в разделах 2—4, были успешно применены для исследования динамики, устойчивости и стабилизации как в классических задачах о движении твёрдого тела и гиростата по абсолютно шероховатой поверхности, так и при анализе движения сложных механических объектов, моделями которых служат неголономные механические системы.

Движение одного твёрдого тела или тела с ротором (гиростата) по поверхности без проскальзывания рассматривалось в [4, 16, 19, 21, 30, 36, 45, 53]. Эффективным оказался подход к исследованию устойчивости неголономных систем, описанный в разделе 2.

Устойчивость и стабилизация стационарных движений различных моделей моноцикла исследовались в [5, 10, 12, 31, 32] при помощи подхода, описанного в разделах 3, 4. Модели трёхколесных экипажей, которые описываются неголономными системами специального класса (см. раздел 3.1.2), изучались в [6, 9]. Отметим, что некоторые вопросы, связанные с движением колёсных роботов, рассматривались в [1, 23, 29].

В последнее время появились новые объекты, моделями которых служат неголономные системы, в частности самокаты Segway и снейкборды. Исследование динамики снейкборда предлагается в [22].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00194, 04-01-00398) и программы «Университеты России».

Литература

[1] Буданов В. М., Девянин Е. А. О движении колёсных роботов // ПММ. — 2003. — Т. 67, вып. 2. — С. 244—255.

[2] Воронец П. В. Уравнения движения твёрдого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности. — Киев: Тип. Ун-та Св. Владимира, 1903.

[3] Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2002.

[4] Зобова А. А. Построение диаграмм Пуанкаре—Четаева и Смейла в задаче о движении тела вращения на шероховатой плоскости // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. — С. 107—139.

[5] Калёнова В. И., Морозов В. М. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. — 2002. — Т. 66, вып. 2. — С. 192—199.

[6] Калёнова В. И., Морозов В. М. Об устойчивости установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами // ПММ. — 2004. — Т. 68, вып. 2. — С. 195—205.

[7] Калёнова В. И., Морозов В. М., Салмина М. А. К задаче стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ. — 1989. — Т. 53, вып. 5. — С. 714—867.

[8] Калёнова В. И., Морозов В. М., Салмина М. А. Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации механических систем с циклическими координатами // ПММ. — 1992. — Т. 56, вып. 6. — С. 959—967.

[9] Калёнова В. И., Морозов В. М., Салмина М. А. Устойчивость и стабилизация стационарных движений неголономных механических систем одного класса // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. — С. 119—134.

[10] Калёнова В. И., Морозов В. М., Шевелёва Е. Н. Устойчивость и стабилизация движения одноколёсного экипажа (моноцикла) // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — С. 28—31.

[11] Калёнова В. И., Морозов В. М., Шевелёва Е. Н. Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами // ПММ. — 2001. — Т. 65, вып. 6. — С. 915—924.

[12] Калёнова В. И., Морозов В. М., Шевелёва Е. Н. Устойчивость и стабилизация движения одноколёсного велосипеда // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 4. — С. 49—58.

[13] Калман Д., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.

[14] Карапетян А. В. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. — 1978. — Т. 42. — Вып. 5. — С. 801—807.

[15] Карапетян А. В. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. — 1980. — Т. 44, вып. 3. — С. 418—426.

[16] Карапетян А. В. Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. — 1983. — № 2. — С. 45—52.

[17] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. — М.: Эдиториал УРСС, 1988.

[18] Карапетян А. В. О специфике применения теории Рауса к системам с дифференциальными связями // ПММ. — 1994. — Т. 58, вып. 3. — С. 17—22.

[19] Карапетян А. В., Кулешов А. С. Методы исследования устойчивости и бифуркации стационарных движений консервативных неголономных систем // Проблемы механики. — М.: Физматлит, 2003. — С. 429—464.

[20] Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. — М.: ВИНИТИ, 1983. — (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика; Т. 6).

[21] Кулешов А. С. К динамике волчка на шероховатой плоскости. — М.: ВЦ РАН, 1999.

[22] Кулешов А. С. Элементарное изложение динамики снейкборда // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. — С. 159—166.

[23] Лобас Л. Г. Неголономные модели колёсных экипажей. — Киев: Наукова думка, 1986.

[24] Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.

[25] Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твёрдого тела в жидкости. — Харьков: Изд-во Харьковского мат. общ-ва, 1888.

[26] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — Харьков: Изд-во Харьковского мат. общ-ва, 1892.

[27] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.

[28] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твёрдой поверхностью. — М.: Наука, 1992.

[29] Мартыненко Ю. Г., Орлов И. В. Влияние переходных процессов в электроприводе на устойчивость движения мобильного колёсного робота // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. — С. 135—149.

[30] Миндлин И. М., Пожарицкий Г. К. Об устойчивости стационарных движений тяжёлого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. — 1965. — Т. 29, вып. 4. — С. 742—745.

[31] Морозов В. М., Кожанов А. А. Стационарные движения одноколёсного экипажа и их устойчивость // Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002. — С. 132—141.

[32] Морозов В. М., Назаренко А. Ю. Об одной механической модели одноколёсного экипажа. — Мобильные роботы и мехатронные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. — С. 227—237.

[33] Неголономные динамические системы / Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.). — Москва; Ижевск, 2002.

[34] Неймарк Ю. И, Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967.

[35] Румянцев В. В. Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. — 1972. — Т. 36, вып. 6. — С. 966—976.

[36] Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжёлого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. — 1980. — № 4. — С. 11—21.

[37] Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

[38] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.

[39] Abraham R., Marsden J. Foundations of Mechanics. — New York; Amsterdam: Benjamin, 1978.

[40] Bloch A. M. Stability of nonholonomic control systems // Automatica. — 1992. — Vol. 28, no. 2. — P. 431—435.

[41] Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Murray R. Nonholonomic mechanical systems with symmetry // Arch. Rational Mech. Anal. — 1996. — Vol. 136. — P. 21—99.

[42] Bloch A. M., McClamroch N. H. Control and stabilization of nonhoionomic Chaplygin dynamic systems // Proc. IEEE Conf. Decision Control. 1991. Brighton, UK. — P. 1127—1132.

[43] Bloch A. M., Reyhanoglu M., McClamroch N. H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic system // IEEE Trans. Automat. Control. — 1992. — Vol. 37, no. 11. — P. 1746—1757.

[44] Hautis M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — Vol. 72. — P. 443—448.

[45] Karapetyan A. V., Kuleshov A. S. Steady motions of nonholonomic systems // Regular Chaotic Dynamics. — 2002. — Vol. 7, no. 1.

[46] Laub A. J., Arnold W. F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models // IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — Vol. 29, no. 2. — P. 163—165.

[47] Levi-Civita T. Sur la recherche des solutions particulieres des systemes differentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace Math. Fis. — 1906. — Vol. 17. — P. 1—140.

[48] Poincare H. Sur l'equilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation // Acta Math. — 1885. — Vol. 7. — P. 259—380.

[49] Routh E. J. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. — London: MacMillan and Co, 1877.

[50] Routh E. J. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. — London: MacMillan and Co, 1884.

[51] Smale S. Topology and mechanics // Invent. Math. — 1970. — Vol. 10. — P. 305—311; 1970. — Vol. 11. — P. 45—64.

[52] Zenkov D. V., Bloch A. M, Leonard N. E., Marsden J. E. Matching and stabilization of the unicycle with rider // Proc. IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control. — 2000. — P. 187—188.

[53] Zenkov D. V., Bloch A. M., Marsden J. E. The energy-momentum method for the stability of nonholonomic systems // Dynam. Stability Systems. — 1998. — Vol. 13. — P. 123—166.

[54] Zenkov D. V., Bloch A. M., Marsden J. E. Stabilization of the unicycle with rider // Proc. CDC. — 1999. — Vol. 38. — P. 3470—3471.

[55] Zenkov D. V., Bloch A. M., Marsden J. E. The Luapunov—Malkin theorem and stabilization of the unicycle with rider // Systems and Control Letters. — 2002. — Vol. 45. — P. 293—302.