

Анализ точности решения задачи авиагравиметрии при идентификации параметров гравиметра в полёте

Ю. В. БОЛОТИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: ybolotin@moids.math.msu.su

М. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: mpopelens@mech.math.msu.su

УДК 621.396.91

Ключевые слова: гравиметрия, аномалия силы тяжести.

Аннотация

Целью обработки авиагравиметрической информации являются определение удельной силы тяжести вдоль траектории движения летательного аппарата по измерениям наземно-бортового комплекса и последующее построение карт аномалий силы тяжести. Качество карт зависит как от шума измерений, так и от их методических погрешностей. В работе обсуждаются возможные ошибки определения аномалии силы тяжести, вызванные неточной калибровкой гравиметра, и предлагается методика дополнительной калибровки гравиметра по полётным данным и по картам аномалий.

Abstract

Yu. V. Bolotin, M. Yu. Popelensky, Accuracy analysis of airborne gravity when gravimeter parameters are identified in flight, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 167–180.

In airborne gravimetry the data received from an airborne survey system is used to obtain the specific gravity along the aircraft path and to construct maps of the gravity anomaly. The quality of the maps depends largely on both the instrument noise and modeling errors. The paper discusses the errors in the estimated gravity caused by imperfect calibration of the gravimeter and how to calibrate the instrument using the survey flights data and gravity maps.

1. Введение

Карты аномалий силы тяжести применяются в геодезии, геофизике, геологии и геодинамике. Авиационная гравиразведка важна как способ выявления перспективных районов для применения более точных методов разведки, таких как

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 167–180.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

сейсморазведка и бурение. Авиаразведка оказывается единственным способом анализа геологической обстановки на шельфах, в полярных районах, в районах тропических лесов и других труднодоступных районах.

В гравиметрии используется несколько понятий аномалии силы тяжести: аномалия в свободном воздухе, в редукции Буге, изостатическая аномалия и т. д. [7]. Ниже будем рассматривать аномалию в свободном воздухе, которой называется разность между истинной силой тяжести \mathbf{g} и нормальной $\mathbf{g}_0(\varphi, h)$ удельной силой тяжести в пункте измерения:

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_0(\varphi, h). \quad (1)$$

Здесь φ — географическая широта, h — высота над референц-эллипсоидом. Значение модуля $g_0(\varphi, h)$ нормальной составляющей силы тяжести, направленной по нормали к референц-эллипсоиду, вычисляется по формуле Гельмерта [7]:

$$g_0(\varphi, h) = g_e [1 + \beta \sin \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi] + \beta_0 - 2\omega_0^2 h,$$

где

$$g_e = 9,7803 \text{ м/с}^2, \quad \beta = 0,005302, \quad \beta_1 = -0,000007, \\ \beta_0 = -0,00014 \text{ м/с}^2, \quad \omega_0 = 0,00123 \text{ с}^{-1}.$$

В скалярной гравиметрии уравнение (1) рассматривается в проекции на географическую вертикаль (внешнюю нормаль к референц-эллипсоиду):

$$\Delta g = g_z - g_0(\varphi, h), \quad (2)$$

где Δg — вертикальная составляющая аномалии силы тяжести в свободном воздухе (далее, для краткости, аномалия силы тяжести), g_z — вертикальная составляющая удельной силы тяжести.

Методика площадных авиагравиметрических съёмок заключается в следующем: над небольшими участками местности проводится серия полётов на заданной высоте, так что прямолинейные участки траекторий (галсы) летательного аппарата (ЛА) образуют прямоугольную решётку.

Картой аномального поля будем называть цифровую карту — набор значений географических координат и аномального поля на высоте полёта в узлах заданной прямоугольной решётки. Карта строится по измерениям на галсах, иногда с привлечением дополнительной геофизической информации [3].

Измерения проводятся с использованием наземно-бортового авиагравиметрического комплекса (АГК). В состав АГК, используемого в скалярной гравиметрии (2), входят инерциальная навигационная система (ИНС) с горизонтируемой платформой; гравиметр, ось чувствительности которого жёстко связана с приборной вертикалью; бортовой приёмник сигналов спутниковой навигационной системы (СНС) и наземный приёмник сигналов СНС (базовая станция).

Выходной информацией АГК является информация ИНС, измерения гравиметров, показания бортового и наземного приёмников СНС. Задачей аэрогравиметрии будем называть задачу построения карт аномалий по указанным измерениям.

Задачу можно разбить на следующие подзадачи.

1. Определение координат и скоростей антенны СНС в фазо-дифференциальном режиме.
2. Определение координат и скоростей чувствительного элемента гравиметра.
3. Вычисление поправки Этвёша (влияния кориолисова и центробежного ускорений) и нормального поля силы тяжести.
4. Определение угловых ошибок горизонтирования платформы ИНС.
5. Калибровка гравиметра.
6. Определение аномалии вдоль траектории движения ЛА.
7. Согласование (уравнивание) галсов (устранение трендов гравиметра).
8. Построение карты аномального поля на высоте полёта.
9. Редукция карты на Землю, учёт топографических поправок и т. д.

Первые четыре задачи являются вспомогательными и решаются по данным ИНС и СНС без привлечения показаний гравиметра. Они описаны в [2, 5]. Задача 9 относится к задачам геологии и решается с использованием различных предположений о строении земной коры [6, 7]. Задачи 5–8 традиционно решаются раздельно. Например, задачи согласования галсов и построения карты часто решаются без учёта специфики методических погрешностей авиационных измерений, что может привести к снижению точности карт. Ниже обсуждаются возможности интегрированной обработки данных, включающей, в частности, уточнённую калибровку гравиметра по полётным данным и по карте.

2. Определение аномалии вдоль траектории

Основным уравнением для определения аномалии силы тяжести вдоль траектории полёта ЛА является уравнение движения чувствительной массы гравиметра (ЧМ) в проекции на географическую вертикаль:

$$\ddot{h} = f_3 + f_E - g_0(\varphi, h) - \Delta g. \quad (3)$$

Здесь f_3 — вертикальная составляющая удельной силы, действующей на ЧМ, f_E — поправка Этвёша.

Задача состоит в решении уравнения (3) относительно Δg с использованием измерений гравиметра f'_g , показаний установленных на платформе ИНС акселерометров f'_1 , f'_2 и показаний СНС. Уравнения измерений гравиметра и акселерометров можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tau \dot{f}'_g + k f'_g &= f_g + \delta f_T + \delta f, \\ f'_1 &= f_{z_1} + \delta f_1, \\ f'_2 &= f_{z_2} + \delta f_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $f_g = f_3 - (\alpha_1 + \delta_1)f_{z_2} + (\alpha_2 + \delta_2)f_{z_1}$ — составляющая действующей на ЧМ удельной силы, направленная по оси чувствительности гравиметра; f_{z_1} , f_{z_2} —

боковые ускорения; α_1, α_2 — угловые ошибки горизонтирования платформы ИНС; δ_1, δ_2 — угловые ошибки установки гравиметра на платформе ИНС; k — масштабный коэффициент гравиметра; τ — постоянная времени запаздывания гравиметра; $\delta f_1, \delta f_2$ — инструментальные погрешности горизонтальных акселерометров. Отметим, что запаздывание может быть как аппаратным (жидкостный демпфер), так и цифровым (предварительное сглаживание).

Погрешность гравиметра можно разделить на высокочастотную составляющую δf , вызванную тепловыми шумами и внешними возмущениями, и низкочастотную δf_T (тренд гравиметра), обусловленную старением материала чувствительного элемента, процессом разгерметизации или другими факторами [6, 7].

Угловые ошибки $\delta_1, \delta_2, \alpha_1, \alpha_2$ приводят к влиянию боковых ускорений f_{z_1}, f_{z_2} на показания гравиметра. Ошибки α_1, α_2 оцениваются при коррекции ИНС (подзадача 4). В отличие от них, ошибки δ_1, δ_2 при коррекции ИНС не определяются. Они обычно постоянны в течение полёта, но могут меняться от полёта к полёту вследствие старения материала, температурных процессов и т. д. [7]. Величины δ_1, δ_2, k и τ будем называть параметрами гравиметра.

Существует два типа решений измерений СНС: фазовые и доплеровские. В первом случае решение навигационных задач СНС (подзадачи 1 и 2) в проекции на географическую вертикаль даёт оценку высоты z_h , во втором — оценку вертикальной скорости z_V [5]:

$$z_h = h + \delta h, \quad z_V = V + \delta V. \quad (5)$$

Здесь $V = \dot{h}$ — вертикальная скорость ЧМ, $\delta h, \delta V$ — погрешности определения соответствующих величин.

При использовании фазовых измерений уравнения (3), (4), (5) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V, \\ \dot{V} &= \tilde{f}_c + \tau \dot{f}'_g + k f'_g + \delta_1 f_{z_2} - \delta_2 f_{z_1} - \Delta g + \delta f_T + \delta f', \\ \dot{\tau} &= 0, \\ \dot{k} &= 0, \\ \dot{\delta}_1 &= 0, \\ \dot{\delta}_2 &= 0, \\ f'_1 &= f_{z_1} + \delta f_1, \\ f'_2 &= f_{z_2} + \delta f_2, \\ z_h &= h + \delta h. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \tilde{f}_c — оценка поправки $f_c = f_E - \alpha_2 f_{z_1} + \alpha_1 f_{z_2} - g_0(\varphi, h)$. Погрешность $\delta f'$ представляет собой сумму инструментальной погрешности гравиметра δf и погрешности оценивания поправки f_c .

При использовании доплеровских измерений уравнения (3), (4), (5) примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \tilde{f}_c + \tau \dot{f}'_g + k \dot{f}'_g + \delta_1 \dot{f}_{z_2} - \delta_2 \dot{f}_{z_1} - \Delta g + \delta f_T + \delta f', \\
\dot{\tau} &= 0, \\
\dot{k} &= 0, \\
\dot{\delta}_1 &= 0, \\
\dot{\delta}_2 &= 0, \\
f'_1 &= f_{z_1} + \delta f_1, \\
f'_2 &= f_{z_2} + \delta f_2, \\
z_V &= V + \delta V.
\end{aligned} \tag{7}$$

В предположении, что проведена высокоточная предполётная калибровка гравиметра [9], параметры гравиметра известны, и уравнения (6), (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= V, \\
\dot{V} &= \tilde{f}_{c_2} - \Delta g + \delta f_T + \delta f'', \\
z_h &= h + \delta h
\end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \tilde{f}_{c_2} - \Delta g + \delta f_T + \delta f'', \\
z_V &= V + \delta V.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь \tilde{f}_{c_2} — оценка величины $f_{c_2} = f_c + \delta_1 f_{z_2} - \delta_2 f_{z_1} + \tau \dot{f}'_g + k \dot{f}'_g$, $\delta f'' = \delta f' + \delta f_{c_2}$, где δf_{c_2} — ошибка оценивания поправки f_{c_2} .

Для этого случая асимптотические оценки дисперсии ошибки определения аномалии силы тяжести при различных типах информации СНС содержатся в [4].

Заметим, что высокочастотная составляющая погрешностей гравиметра компенсируется в процессе определения аномалии вдоль траекторий. Разделение низкочастотной аномалии силы тяжести и тренда гравиметра требует привлечения дополнительной информации, например наземных измерений. Эта информация доступна не всегда. Поэтому при определении аномалии вдоль траектории оценивается не сама аномалия, а сумма аномалии и тренда гравиметра. Разделение аномалии и тренда гравиметра возможно при уравнивании галсов (подзадача 7). Здесь в качестве дополнительной информации используется информация о совпадении значений поля в точках пересечения галсов, как показано ниже.

3. Калибровка гравиметра в полёте

Проведём анализ уравнений (6), (7) на основе стохастического подхода. Предположим, что аномалия силы тяжести является стационарным, плоско однородным случайным процессом с известными стохастическими характеристиками [6]. Во временной области аномалия описывается ковариационной

функцией $R_{\Delta g}(t, s) = E[\Delta g(t)\Delta g(s)]$, которая, в силу однородности, представима в виде $R_{\Delta g}(t, s) = C_{\Delta g}(t - s)$. В частотной области аномалия описывается спектральной плотностью [3]

$$S_{\Delta g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\Delta g}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Стохастическую модель аномалии можно выбрать исходя из геофизических предположений о распределении масс внутри Земли. Однако характер распределения масс, как правило, заранее неизвестен и значительно меняется от региона к региону. Поэтому чаще всего стохастическая модель выбирается из эвристических соображений. Подобный подход сводит задачу стохастического оптимального оценивания аномалии к одному из способов регуляризации данных. Одним из достоинств данного метода регуляризации является его наглядная физическая интерпретация.

Для внутренней согласованности метода при определении аномалии силы тяжести вдоль траектории полёта в качестве модели аномалии выбирается одномерная модель, согласованная с трёхмерной моделью, которая затем используется при построении карты аномалий.

Одномерные согласованные модели аномалии с конечным радиусом корреляции можно классифицировать по коэффициенту наклона спектральной плотности в области пересечения со спектральной плотностью инструментальных погрешностей измерительных приборов. Для каждого класса моделей аномалии существует модель с бесконечным радиусом корреляции с характерным для данного класса коэффициентом наклона спектральной плотности в соответствующей области [4]. При определённых условиях подобные модели могут рассматриваться в качестве аппроксимации согласованных моделей. В таком случае они называются аппроксимационными.

Опыт обработки данных нескольких АГК в различных регионах показал, что вместо согласованной модели можно использовать аппроксимационные модели [3, 4]. Последние описываются меньшим числом параметров. Эти параметры зависят как от интенсивности и радиуса корреляции аномалии, так и от скорости движения ЛА вдоль траектории [4, 10].

Рассмотрим случай, когда точности предполётной калибровки недостаточно и, помимо аномалии, требуется определить параметры гравиметра. В этом случае уравнения (6), (7) можно записать в виде

$$z(t) = X^T c(t) + \Delta g(t) + r(t). \quad (10)$$

Здесь $X^T = (\tau, k, \delta_1, \delta_2)$, $c^T(t) = (f'_g, f'_g, -f_{z_2}, f_{z_1})$. В случае доплеровских измерений $z(t) = \dot{z}_V$, $r(t) = \delta \dot{V} + \delta f$; для случая фазовых измерений $z(t) = \ddot{z}_h$, $r(t) = \delta \ddot{h} + \delta f$. Величины $\delta \ddot{h}$, $\delta \dot{V}$ — ошибки определения соответствующих производных высоты и скорости.

Предполагается, что $\Delta g(t)$, $r(t)$ — стационарные квадратично интегрируемые гауссовские случайные процессы. Вектор X предполагается постоянным априори неизвестным.

Для качественного исследования задачи будем рассматривать уравнение (10) на бесконечном интервале времени. Предполагается, однако, что участок калибровки гравиметра (интенсивных манёвров) ограничен, так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |c(t)| dt \leq \infty \quad (11)$$

Задача оценивания формулируется следующим образом: при известных измерениях $z(t)$, $c(t)$, спектральных плотностях $S_{\Delta g}(\omega)$, $S_r(\omega)$ случайных процессов $\Delta g(t)$, $r(t)$ соответственно и при динамических ограничениях (10) минимизировать функцию

$$-\log p(\Delta g, r, X | z, c) \longrightarrow \min. \quad (12)$$

Перейдём в частотную область. Обозначим $\hat{c}(\omega)$ преобразования Фурье функции $c(t)$; $\Delta \hat{g}(\omega)$, $\hat{z}(\omega)$, $\hat{r}(\omega)$ — спектральное представление соответствующих случайных процессов. Уравнение (10) примет вид

$$\hat{z}(\omega) = X^T \hat{c}(\omega) + \Delta \hat{g}(\omega) + \hat{r}(\omega). \quad (13)$$

Нахождение X и $\Delta \hat{g}(\omega)$ из уравнений (12), (13) распадается на две последовательные задачи [3].

1. Нахождение оценки вектора X из линейного уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{c}(\omega) \hat{c}^*(\omega) X \Gamma(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{c}(\omega) \hat{z}^*(\omega) \Gamma(\omega) d\omega,$$

где $\Gamma(\omega) = (S_{\Delta g}(\omega) + S_r(\omega))^{-1}$, $S_r(\omega) = \omega^2 S_V + S_{\delta f}$ в случае доплеровских измерений СНС и $S_r(\omega) = \omega^4 S_h + S_{\delta f}$ для случая позиционных данных СНС; S_V , S_h , $S_{\delta f}$ — соответственно спектральные плотности погрешностей определения вертикальной скорости и высоты и инструментальной погрешности гравиметра. Дисперсия ошибки оценки X определяется формулой

$$D_{XX} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{c}(\omega) \hat{c}^*(\omega) \Gamma(\omega) d\omega \right]^{-1}. \quad (14)$$

2. Если оптимальная оценка \tilde{X} найдена, то оптимальная оценка аномалии силы тяжести определяется по стандартной формуле линейного оценивания [1]:

$$\Delta \tilde{g}(\omega) = H_{\Delta g}(\omega) [\hat{z}(\omega) - \tilde{X}^T \hat{c}(\omega)], \quad H_{\Delta g}(\omega) = S_{\Delta g}(\omega) \Gamma(\omega). \quad (15)$$

Дисперсия ошибки оценки аномалии определяется формулой

$$D_{\Delta g} = \int_{-\infty}^{+\infty} [S_r(\omega)H_{\Delta g}(\omega) + H_{\Delta g}^2(\omega)\hat{c}^*(\omega)D_{XX}\hat{c}(\omega)] d\omega. \quad (16)$$

Передаточная функция $H_{\Delta g}(\omega)$ иногда называется гравиметрическим фильтром. Частота ω_c , при которой $H_{\Delta g}(\omega) = 1/2$, называется частотой среза фильтра. Для авиагравиметрии характерны значения частоты среза $\omega_c \sim 0,01c^{-1}$ [3].

4. Дисперсия ошибки калибровки гравиметра

Пусть $[-T, T]$ — отрезок полёта, на котором проводится калибровка гравиметра. Исследуем поведение дисперсии ошибки определения параметров гравиметра в предположении, что $c(t)$ является участком реализации стационарного случайного процесса $c_0(t)$ с известной спектральной плотностью $S_c(\omega)$:

$$c(t) = \begin{cases} c_0(t), & t \in [-T, T], \\ 0, & t \notin [-T, T]. \end{cases}$$

Выражение (14) можно записать в виде

$$D_{XX}^{-1}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin T(\omega - \nu) \sin T(\omega - \sigma)}{\pi^2(\omega - \nu)(\omega - \sigma)} \Gamma(\omega) dV_c(\nu) dV_c(\sigma), \quad (17)$$

где $V_c(\omega)$ — порождающий спектральное представление $c_0(t)$ случайный процесс с ортогональными приращениями. Математическое ожидание информационной матрицы D_{XX}^{-1} имеет вид

$$E[D_{XX}^{-1}] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S_c(\sigma) \frac{\sin^2 T(\omega - \sigma)}{\pi^2(\omega - \sigma)^2} \Gamma(\omega) d\sigma. \quad (18)$$

При $T \rightarrow +\infty$ формула (18) приводит к асимптотической оценке дисперсии:

$$D_{XX} \approx \frac{4\pi}{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_c(\sigma) \Gamma(\sigma) d\sigma \right]^{-1}. \quad (19)$$

Для анализа оценки (19) рассмотрим аппроксимационную модель аномалии первого порядка [4]:

$$S_{\Delta g}(\omega) = \frac{d}{2\pi\omega^2}, \quad d = \frac{6V_0\sigma^2}{r_c},$$

где r_c — радиус корреляции аномалии, σ^2 — интенсивность аномалии, V_0 — скорость движения ЛА вдоль траектории. Пусть погрешности δh , δV , δf являются

белыми шумами со спектральными плотностями

$$S_{\delta h} = \frac{d_h}{2\pi}, \quad S_{\delta V} = \frac{d_V}{2\pi}, \quad S_{\delta f} = \frac{d_f}{2\pi}$$

соответственно. Предположим, что компоненты $c(t)$ — гармонические сигналы, т. е. $S_c(\omega) = A_c \delta(\omega - \omega_*)$ для f'_g, f_{z1}, f_{z2} и $S_{f'_g}(\omega) = \omega^2 S_{f_g}(\omega)$.

Рассмотрим среднеквадратичную ошибку (СКО) определения параметров гравиметра в зависимости от типа измерений спутниковой навигационной системы и скорости движения ЛА. Для каждого параметра ошибка ищется в предположении, что остальные параметры известны. Результаты представлены в таблицах 1 и 2.

Данные получены при следующих условиях: время калибровки $T = 1$ час; амплитуда ускорений движения ЛА $A_c = 3$ м/с²; $\omega_* = g_e/V_0$, $d_V = (0,5 \text{ см/с})^2$ с, $d_h = (2 \text{ см})^2$ с, $d_f = (5 \text{ мГал})^2$ с (1 мГал = 10^{-5} м/с²); аномалия силы тяжести характеризуется отношением $6\sigma^2/r_c = 0,1$ мГал²/км; постоянная времени запаздывания гравиметра при вычислении ошибки определения коэффициента гравиметра составляет 2 с.

Отметим, что на практике предположение о большой длительности полёта, необходимое для применимости метода Фурье, не выполняется. Оценивание обычно проводится методом калмановской фильтрации, асимптотически эквивалентным методу Фурье [3].

5. Построение карт

Задача построения карты аномалии силы тяжести состоит в определении значений аномалии в узлах карты, задаваемых заранее. Пусть \mathbb{N} — совокуп-

Таблица 1. СКО ошибки калибровки гравиметра при доплеровских измерениях СНС

параметр	СКО	V_0 км/ч		
		100	200	300
δ	$\left[\frac{2(\omega_*^4 d_V + \omega_*^2 d_f + d)}{T A_c \omega_*^2} \right]^{0,5}$	$0,6 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
τ	$\left[\frac{2(\omega_*^4 d_V + \omega_*^2 d_f + d)}{T A_c \omega_*^4} \right]^{0,5}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$17,9 \cdot 10^{-3}$	$74 \cdot 10^{-3}$
k	$\left[\frac{2(\omega_*^4 d_V + \omega_*^2 d_f + d)}{T A_c \omega_*^2 (1 + \tau^2 \omega_*^2)} \right]^{0,5}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2. СКО ошибки калибровки гравиметра при фазовых измерениях СНС

параметр	СКО	V_0 км/ч		
		100	200	300
δ	$\left[\frac{2(\omega_*^6 d_h + \omega_*^2 d_f + d)}{TA_c \omega_*^2} \right]^{0,5}$	$0,7 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
τ	$\left[\frac{2(\omega_*^6 d_h + \omega_*^2 d_f + d)}{TA_c \omega_*^4} \right]^{0,5}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$17,9 \cdot 10^{-3}$	$74 \cdot 10^{-3}$
k	$\left[\frac{2(\omega_*^6 d_h + \omega_*^2 d_f + d)}{TA_c \omega_*^2 (1 + \tau^2 \omega_*^2)} \right]^{0,5}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-3}$

ность узлов. Задача решается в предположении, что Δg — реализация стационарного случайного процесса. Пусть решётка галсов состоит из N продольных и M поперечных галсов. Пусть $\varrho'(t)$ — географические координаты точек галсов, $\varrho''(\xi)$, $\xi \in \mathbb{N}$, — географические координаты узлов карты. Тогда имеет место соотношение, связывающее значения аномалии $\Delta g'(t) = \Delta g(\varrho'(t))$ на галсах и $\Delta g'' = \Delta g(\varrho'')$ на карте:

$$\Delta g'(t) = K_{\varrho' \varrho''} K_{\varrho' \varrho''}^{-1} \Delta g'' + \Delta g^\perp(t), \quad (20)$$

где $K_{\varrho' \varrho''}(t, \xi) = C_{\Delta g}(\varrho'(t) - \varrho''(\xi))$, $K_{\varrho'' \varrho''}(\xi, \eta) = C_{\Delta g}(\varrho''(\xi) - \varrho''(\eta))$ — соответствующие матрицы корреляции; $\Delta g^\perp(t)$ — случайная величина, некоррелированная с $\Delta g''$. Корреляционная функция $K^\perp(t, s)$ величины $\Delta g^\perp(t)$ имеет вид

$$K^\perp = K_{\varrho' \varrho'} - K_{\varrho' \varrho''} K_{\varrho'' \varrho''}^{-1} K_{\varrho'' \varrho'},$$

где $K_{\varrho' \varrho'}(t, s) = C_{\Delta g}(\varrho'(t) - \varrho'(s))$, $K_{\varrho'' \varrho''} = K_{\varrho' \varrho''}^T$. Корреляционная функция $C_{\Delta g}(\varrho)$ выбирается на основе априорных стохастических данных об аномалии.

Оценка аномалии на галсе является результатом сглаживания (15), она связана с истинным значением аномалии $\Delta g'(t)$ уравнением свёртки с оператором сглаживания $W(t)$:

$$\Delta \tilde{g}'(t) = W[\Delta g'(t) + X^T c(t) + \delta f_T(t) + r(t)]. \quad (21)$$

Здесь δf_T — низкочастотная составляющая показаний гравиметра, не искажаемая сглаживанием, так что $W \delta f_T = \delta f_T$; r — инструментальные погрешности гравиметра и СНС с ковариационной функцией $C_r(t)$ — преобразованием Фурье $S_r(\omega)$. Оператор сглаживания $W(t)$ приближённо (при большой длительности полёта на галсе) определяется как обратное преобразование Фурье $H_{\Delta g}(\omega)$.

Объединяя приведённые соотношения, получим уравнение, связывающее оценку аномалии на галсе со значениями поля в узлах карты:

$$\Delta\tilde{g}' = \Phi\Delta g'' + WX^T c + \delta f_T + q. \quad (22)$$

Здесь $\Phi = WK_{g'g''}K_{g''g''}^{-1}$, ковариации ошибки $q = W(r + \Delta g^\perp)$ вычисляется по формуле $Q(t, s) = W(t) * [C_r(t - s) + K^\perp(t - s)] * W(s)^T$.

В качестве модели тренда гравиметра δf_T рассмотрим полиномиальную по времени функцию порядка p , $\delta f_T(t) = l_0 + l_1 t + \dots + l_p t^p$, свою для каждого галса (возможна также модель, когда тренд считается общим на всех галсах данного полёта). Запишем соотношения вида (22) для продольных и поперечных галсов соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{g}'_\lambda &= \Phi_\lambda \Delta g'' + \Theta_\lambda l_\lambda + WX^T c_\lambda + q_\lambda, \\ \Delta\tilde{g}'_\varphi &= \Phi_\varphi \Delta g'' + \Theta_\varphi l_\varphi + WX^T c_\varphi + q_\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\Delta\tilde{g}'_\lambda$, $\Delta\tilde{g}'_\varphi$ — вектор-функции длины M , N соответственно, составленные из значений аномалии на галсах; l_λ , l_φ — векторы длины Mp , Np соответственно, представляющие собой набор коэффициентов полиномиальной модели тренда гравиметра; Θ_λ , Θ_φ — матрицы соответствующей размерности, составленные из степеней $0, \dots, p$ времён на галсах.

Задача определения параметров модели тренда гравиметра вырожденна. Для регуляризации задачи уравнивания необходимо наложить определённые условия на параметры тренда. Например, можно считать, что на одном (произвольном) галсе тренда нет и уравнивание проводить по этому галсу. При этом в матрице Θ_λ (Θ_φ) необходимо удалить соответствующий столбец.

Алгоритм уравнивания галсов и построения карт аномальных полей состоит из двух этапов. На первом этапе определяются параметры гравиметра и модели тренда. Здесь в качестве узлов карты рассматриваются точки пересечения галсов. При этом используется дополнительная информация о равенстве силы тяжести в точках пересечения галсов. Таким образом, матрицы Φ_λ , Φ_φ имеют полный ранг по столбцам. Соотношения (23) можно представить в виде (верхний индекс + обозначает псевдообращение)

$$\Phi_\lambda^+ \Delta\tilde{g}'_\lambda - \Phi_\varphi^+ \Delta\tilde{g}'_\varphi = \Theta l + Bq. \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Theta &= [\Phi_\lambda^+ \Theta_\lambda, -\Phi_\varphi^+ \Theta_\varphi, \Phi_\lambda^+ W c_\lambda^T - \Phi_\varphi^+ W c_\varphi^T], \\ l^T &= [l_\lambda^T l_\varphi^T X^T], \quad B = [\Phi_\lambda^+, -\Phi_\varphi^+], \quad q^T = [q_\lambda^T q_\varphi^T]. \end{aligned}$$

Оптимальная в среднеквадратичном оценка параметров тренда и гравиметра на основе соотношений (24) строится стандартными методами линейноквадратичной теории оценивания [1].

На втором этапе определяются значения аномалии силы тяжести в узлах карты, которые теперь выбираются исходя из первоначально требуемого разрешения. Оптимальная в среднеквадратичном оценка значений аномалии в узлах

карты (23) строится стандартными методами [1] на основе соотношений

$$\Delta\tilde{g}' - \Theta\tilde{l} = \Phi\Delta g'' + B'q,$$

где $\Phi = [\Phi_\lambda \Phi_\varphi]$, $B' = I - \Theta(\Theta^T D \Theta)^{-1} \Theta^T D B$, $D = (B Q B^T)^{-1}$, Q — ковариационная матрица q . При этом учитывается априорная информация о величине поля $\Delta g_0'' = 0$ и априорная информация о ковариационной матрице ошибок определения поля $P_{\delta g} = K_{g'' g''}$.

Следует отметить, что описанная процедура, по существу, сводится к пространственно нестационарной линейной фильтрации. Если решётка галсов однородна, то вдали от границ участка съёмки фильтр близок к стационарному. Длина волны аномалии, подавляемая фильтром вдвое, называется пространственным разрешением. Если структура галсов регулярна, возможна асимптотическая оценка точности и разрешения карты методом Фурье, аналогичная (19) [3]. Для общего случая получение оценки разрешения представляется сложной задачей.

6. Результаты испытаний

В период 2001—2003 гг. лаборатория управления и навигации МГУ провела обработку данных серии испытаний аэрогравиметрической системы GT-1A, разработанной АО «Гравиметрические технологии» [8, 9]. Целью испытаний была проверка достижимых точностей и разрешающих способностей аэрогравиметрии. Ниже приводятся краткие результаты площадных съёмки, выполненных в декабре 2002 г. в районе Калгорли, Австралия. Съёмки проводились с борта самолёта Cressco VN-KPY при полётах на высоте 300 и 500 м над поверхностью Земли. Использовались приёмники СНС Ashtech Surveyor на частоте 2 Гц. Всего сделано 10 полётов по 50 галсам.

Построение карт и уравнивание галсов проводилось с использованием описанного алгоритма. По результатам анализа данных для определения аномалии вдоль траектории был выбран фильтр с частотой среза 0,0125 Гц.

Линии уровня карты аномалии приведены на рис. 1. Разрешение карты составляет 8 км. Точность оценки аномалий определяется как среднеквадратичное расхождение оценок с известной в регионе наземной картой. Эта точность составляет 0,5—0,6 мГал.

Литература

- [1] Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М. Оптимизация динамики управляемых систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
- [2] Болотин Ю. В., Голован А. А., Кручинин П. А., Парусников Н. А., Тихомиров В. В., Трубников С. А. Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1999. — Вып. 2. — С. 36—41.

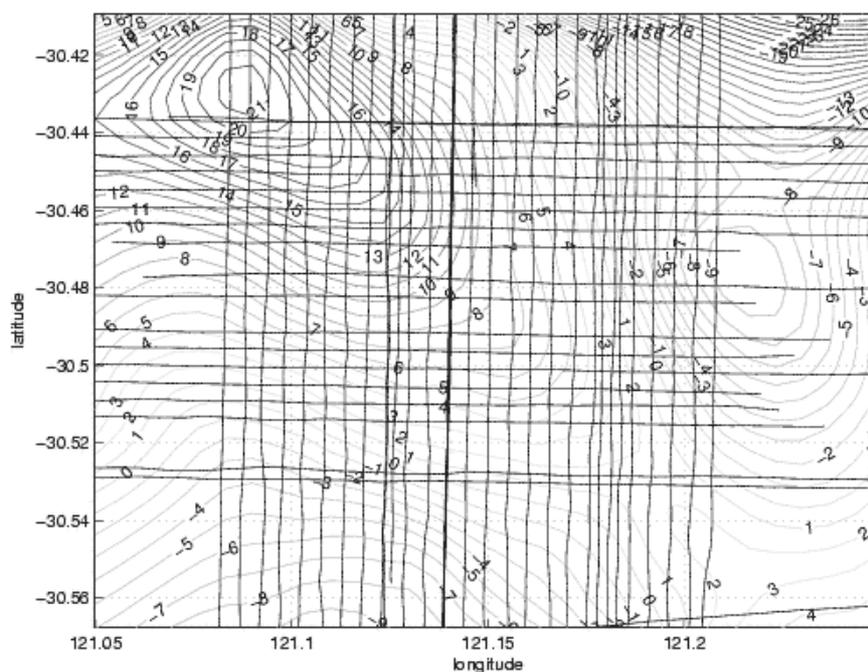


Рис. 1. Карта аномалии в свободном воздухе и решётка галсов

- [3] Болотин Ю. В., Голован А. А., Парусников Н. А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2002.
- [4] Болотин Ю. В., Попеленский М. Ю. Анализ точности решения задачи авиагравиметрии на основе стохастических моделей // Авиакосмическое приборостроение. — 2003. — Вып. 4. — С. 42—48.
- [5] Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А., Трубников С. А. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2001.
- [6] Гравиразведка: справочник геофизика / Под ред. Мудрецов Е. А., Веселова К. Е. — 2-е изд. — М.: Недра, 1990.
- [7] Торге В. Гравиметрия. — М.: Мир, 1999.
- [8] Berzhitsky V. N., Bolotin Yu. V., Golovan A. A., Iljin V. N., Parusnikov N. A., Smoller Yu. L., Yurist S. Sh. GT-1A Inertial Gravimeter System. Results of Flight Tests. — Moscow: Center of Applied Research Publishing House, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU, 2002.,
- [9] Berzhitsky V. N., Iljin V. N., Saveliev E. B., Smoller Yu. L., Yurist S. Sh., Bolotin Yu. V., Golovan A. A., Parusnikov N. A., Popov G. V., Chichinadze M. V., Parusnikov N. A. GT-1A inertial gravimeter system design consideration and results of

flight tests // Proc. 9th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems. Russia, St. Petersburg, May 27–29, 2002.

- [10] Stepanov O. A., Blazhnov B. A., Koshaev D. A. The efficiency of using velocity and coordinate satellite measurements in determining gravity aboard an aircraft // Proc. 9th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems. Russia, St. Petersburg, May 27–29, 2002.