Спутниковая навигация. Задачи обработки первичных измерений спутниковой навигационной системы для геофизических приложений

А. А. ГОЛОВАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: navlab@mech.math.msu.su, aagolovan@yandex.ru

Н. Б. ВАВИЛОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 621.396.946

Ключевые слова: спутниковая навигация, авиационная гравиметрия, задачи обработки.

Аннотация

В геофизических приложениях активно используются возможности спутниковых навигационных систем для высокоточного определения траекторных параметров носителя геофизической аппаратуры. В частности, в задаче авиационной гравиметрии, помимо позиционного решения, необходимо определять ускорение и скорость носителя. Описываются математические модели и алгоритмы решения этих задач. Исходной информацией служат дифференциальные доплеровские и фазовые измерения спутниковой навигационной системы GPS.

Abstract

A. A. Golovan, N. B. Vavilova, Satellite navigation. Raw data processing for geophysical applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 181—196.

Satellite navigation systems are widely used in geophysical applications for precise trajectory determination of a vehicle–carrier of a geophysical equipment. In particular, in airborne gravimetry it is necessary to determine the velocity and acceleration of the vehicle in addition to the position determination. Mathematical models and algorithms for the solution of these problems are described. The source data consists of differential Doppler and carrier phase GPS observations.

Введение

Представляемый материал основан на работах лаборатории управления и навигации механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 181—196.

в области спутниковой навигации. Они проводились в рамках выполнения конкретных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ совместно с рядом специализированных предприятий.

Толчком к развитию данного направления послужило участие лаборатории в разработке математического и программного обеспечения задачи авиационной гравиметрии для конкретных гравиметрических комплексов, созданных в России. Здесь следует упомянуть разработки Московского института электромеханики и автоматики, ВНИИГеофизика, компании «Аэрогеофизика», разработку ЗАО «Гравиметрические технологии» [1]. С последней организацией лаборатория активно и плодотворно сотрудничает последние годы. Разработанный в ЗАО «Гравиметрические технологии» гравиметрический комплекс МАГ-1 (английское название — GT1A) участвовал в масштабных гравиметрических съёмках как в России, так и за рубежом.

Лаборатория разработала и внедрила несколько версий программного обеспечения для комплекса МАГ-1 (GT1A), для гравиметрической системы разработки компании «Аэрогеофизика». Существенную часть этого программного обеспечения составляют задачи спутниковой навигации.

Данная статья носит скорее методический характер, в ней выделяются основные использованные подходы к решению задач спутниковой навигации.

В дальнейшем изложении ограничимся случаем применения американской спутниковой навигационной системы GPS (Global Positioning System).

Основная задача обработки измерений спутниковой навигационной системы (СНС) — определение местоположения объекта. Для её решения используются так называемые кодовые или фазовые спутниковые измерения, полученные в стандартном или дифференциальном режиме функционирования СНС.

Коммерческое программное обеспечение, разрабатываемое фирмами-производителями спутникового навигационного оборудования, предназначено прежде всего для решения этой задачи [9, 10]. Вместе с тем в ряде геофизических приложений, например в авиагравиметрии, требуется определение скорости и/или ускорений объекта именно при помощи первичных измерений СНС [4, 6, 7].

О задачах определения скорости и ускорения

Поясним необходимость решения задач определения скорости и/или ускорения объекта в авиагравиметрии. Рассмотрим основное гравиметрическое уравнение [2]:

$$\ddot{h} = \left(\frac{V_E^2}{R_E} + \frac{V_N^2}{R_N} + 2uV_E\cos\varphi\right) - \gamma_0 - \delta\gamma + \delta g_3 + f_3.$$

Здесь h — высота полёта; в скобках сгруппированы члены, называемые в гравиметрии поправками Этвёша и представляющие собой переносное и кориолисово ускорения, вызванные движением объекта вокруг эллипсоидальной вращающейся Земли; V_E, V_N — восточная и северная составляющая скорости движения;

R_E, R_N — радиусы кривизны первого вертикала и меридионального сечения; u — угловая скорость вращения Земли; φ — географическая широта; γ_0 — нормальное ускорение силы тяжести на поверхности Земли, определяемое, например, формулой Гельмерта

$$\gamma_0 = 9{,}78030(1 + 0{,}005302 \sin\varphi^2 - 0{,}000007 \sin^2 2\varphi) - 0{,}00014; \tag{1}$$

$\delta\gamma = -2\omega_0^2 h$ — поправка нормального ускорения силы тяжести, обусловленная ненулевой высотой полёта; $\omega_0 \sim 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ — частота Шулера; f_3 — проекция на географическую вертикаль внешней удельной силы, действующей на объект; δg_3 — искомая гравитационная аномалия.

Основной информацией для оценивания аномалии δg_3 служат показания гравиметра, измеряющего величину f_3, и спутниковая информация о высоте полёта h.

Не вдаваясь в детали, сформулируем три подхода к решению этой задачи (см. [2]).

1. Первый подход предполагает двукратное интегрирование показаний гравиметра и сравнение полученной реализации с высотой полёта с целью выделения из разности этих сигналов гравитационной аномалии δg.
2. Второй подход, напротив, предполагает двукратное дифференцирование высоты и сравнение полученной реализации с показанием гравиметра.
3. Наконец, третий «компромиссный» вариант — однократное дифференцирование высоты и однократное интегрирование показаний гравиметра.

Два последних подхода предполагают определение скорости и ускорения объекта.

Конечно, скорость и ускорение объекта можно определить путём прямого численного дифференцирования позиционных решений. Но такой способ представляет собой неявное дифференцирование первичной измерительной информации — первичных кодовых или фазовых измерений СНС. Поэтому была поставлена задачи определения скорости и ускорения объекта именно при помощи первичных измерений СНС, минуя этап получения позиционных решений.

Задачи определения скорости и ускорения объекта можно решать, привлекая как доплеровские, так и фазовые измерения, потенциально более точные. На практике доплеровские измерения реже используются при комплексной обработке измерительной информации СНС, чем кодовые и фазовые измерения. Однако доплеровские решения целесообразно применять в качестве начального приближения для соответствующих задач обработки фазовых измерений [4,6,7].

Определение скорости движения навигационного спутника

Для задач определения скорости и ускорения объекта необходимо знать скорости движения навигационных спутников, поскольку они являются параметрами соответствующих задач обработки измерений.

Опишем алгоритм определения скорости навигационных спутников при помощи эфемеридных данных, транслируемых системой GPS и предназначенных прежде всего для определения координат навигационных спутников. Исходными данными для определения траекторных параметров движения спутника служат [8]:

1) время t_{em}, для которого определяются гринвичские координаты и вектор относительной скорости спутника;
2) эфемеридные данные: время эфемеридных данных T_{oe}; поправка к среднему движению Δn; средняя аномалия M_0; эксцентриситет орбиты e; квадратный корень $\sqrt{a}$ из большой полуоси a орбиты; поправки C_{rc}, C_{rs} радиуса r орбиты; поправки C_{ic}, C_{is} наклонения i орбиты; поправки C_{uc}, C_{us} углового положения спутника; долгота восходящего узла Ω_0; аргумент перигея ω; наклонение орбиты i_0; производная от долготы восходящего узла $\dot{\Omega}_0$; производная от угла наклонения орбиты $\dot{i}_0$.

Определяемые величины:

1) $R_\eta^{\text{sat}} = (R_{\eta_1}^{\text{sat}}, R_{\eta_2}^{\text{sat}}, R_{\eta_3}^{\text{sat}})^T$ — гринвичские координаты спутника в момент времени t_{em};
2) $V_\eta^{\text{sat}} = (V_{\eta_1}^{\text{sat}}, V_{\eta_2}^{\text{sat}}, V_{\eta_3}^{\text{sat}})^T$ — компоненты вектора V относительной скорости спутника в момент времени t_{em} в гринвичской системе координат.

Для определения гринвичских координат и скоростей навигационного спутника осуществляется следующая последовательность вычислений (описывается стандартный алгоритм вычисления координат навигационного спутника [8], который дополнен блоком вычисления компонент вектора относительной скорости спутника).

1. Определяется относительное время t^*:

$$t^* = t_{\text{em}} - T_{\text{oe}}.$$

Проверяется принадлежность значения t^* нужному интервалу времени. Если $t^* > 302400$, то t^* заменяется на $t^* - 604800$. Если $t^* < -302400$, то t^* заменяется на $t^* + 604800$. (Число $N_{\text{sec}} = 604800$ — число секунд в неделе, $N_{\text{sec}}/2 = 302400$.)

2. Вычисляется средняя аномалия M в момент времени t^*:

$$M = M_0 + \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} + \Delta n\right) \cdot t^*.$$

3. Итерационно решается уравнение Кеплера для эксцентрической аномалии E_k. Для $E_0 = M$, $k = 1, 2\ldots$ вычисляем

$$E_k = M + e \sin E_{k-1}.$$

Если $|E_k - E_{k-1}| \leqslant 10^{-8}$, то итерационный процесс заканчивается.

4. Определяются значения синуса и косинуса истинной аномалии f_k:
$$\sin f_k = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1-e\cos E_k}, \quad \cos f_k = \frac{\cos E_k - e}{1-e\cos E_k},$$
$$f_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{\cos E_k - e}\right).$$
5. Определяется значение аргумента широты φ_k:
$$\varphi_k = f_k + \omega.$$
6. Определяются значения δu_k, δr_k, δi_k для коррекции аргумента широты φ_k, радиуса r, угла наклона орбиты i_0:
$$\delta u_k = C_{\mathrm{us}}\sin 2\varphi_k + C_{\mathrm{uc}}\cos 2\varphi_k, \quad \delta r_k = C_{\mathrm{rs}}\sin 2\varphi_k + C_{\mathrm{rc}}\cos 2\varphi_k,$$
$$\delta i_k = C_{\mathrm{is}}\sin 2\varphi_k + C_{\mathrm{ic}}\cos 2\varphi_k.$$
7. Определяются скорректированные значения u_k, r_k, i_k для аргумента широты φ_k, радиуса r_k, угла наклона орбиты i_k:
$$u_k = \varphi_k + \delta u_k, \quad r_k = a(1-e\cos E_k) + \delta r_k, \quad i_k = i_0 + \delta i_k + \dot{i}_0 t^*.$$
8. Определяются декартовы координаты r_1^{o}, r_2^{o} спутника в орбитальной системе координат $O\zeta$:
$$r_1^{\mathrm{o}} = r_k\cos u_k, \quad r_2^{\mathrm{o}} = r_k \sin u_k.$$
9. Определяется скорректированное значение долготы Ω_k восходящего узла:
$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega}_0 - u)t^* - ut_{\mathrm{oe}},$$
$u = 7{,}2921151467\cdot 10^{-5}$ (рад/сек) — угловая скорость вращения Земли.
10. Определяются декартовы координаты $R_\eta^{\mathrm{sat}} = (R_{\eta_1}^{\mathrm{sat}}, R_{\eta_2}^{\mathrm{sat}}, R_{\eta_3}^{\mathrm{sat}})^T$ спутника в гринвичской системе координат $O\eta$:
$$R_{\eta_1}^{\mathrm{sat}} = r_1^{\mathrm{o}}\cos\Omega_k - r_2^{\mathrm{o}}\cos i_k \sin\Omega_k, \quad R_{\eta_2}^{\mathrm{sat}} = r_1^{\mathrm{o}}\sin\Omega_k + r_2^{\mathrm{o}}\cos i_k\cos\Omega_k,$$
$$R_{\eta_3}^{\mathrm{sat}} = r_2^{\mathrm{o}}\sin i_k.$$
11. Определяются компоненты $V_\eta^{\mathrm{sat}} = (V_{\eta_1}^{\mathrm{sat}}, V_{\eta_2}^{\mathrm{sat}}, V_{\eta_3}^{\mathrm{sat}})^T$ относительной скорости спутника в гринвичской системе координат $O\eta$:
   а) определяются значения некоторых параметров кеплерова движения спутников: производной $\dot{f}_k$ истинной аномалии f_k, производных $\delta\dot{u}_k$, $\delta\dot{r}_k$, $\delta\dot{i}_k$, параметров коррекции аргумента широты δu_k, радиуса r_k и угла наклона орбиты i_0
$$\dot{f}_k = \frac{(\sqrt{\mu}/a^{3/2} + \Delta n)\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E_k)^2},$$
$$\delta\dot{u}_k = 2(C_{\mathrm{us}}\cos 2\varphi_k - C_{\mathrm{uc}}\sin 2\varphi_k)\dot{f}_k,$$
$$\delta\dot{r}_k = 2(C_{\mathrm{rs}}\cos 2\varphi_k - C_{\mathrm{rc}}\sin 2\varphi_k)\dot{f}_k,$$
$$\delta\dot{i}_k = 2(C_{\mathrm{is}}\cos 2\varphi_k - C_{\mathrm{ic}}\sin 2\varphi_k)\dot{f}_k.$$

Определяются модули радиальной v_r и трансверсальной v_u составляющих скорости спутника:

$$v_r = a\left(\sqrt{\frac{\mu}{a^{3/2}}} + \Delta n\right)\frac{e\sin E_k}{1 - e\cos E_k} + \delta\dot r_k, \quad v_u = r_k(\dot f_k + \delta\dot u_k);$$

б) определяются компоненты v_1^{o}, v_2^{o}, v_3^{o} вектора v абсолютной скорости движения спутника в орбитальной системе координат $O\zeta$:

$$v_1^{\mathrm{o}} = v_r\cos u_k - v_u\sin u_k, \quad v_2^{\mathrm{o}} = v_r\sin u_k + v_u\cos u_k,$$
$$v_3^{\mathrm{o}} = r_k\sin f_k(\dot i_0 + \delta\dot i_k);$$

в) определяются компоненты $v_{\eta_1}^{\mathrm{sat}}$, $v_{\eta_2}^{\mathrm{sat}}$, $v_{\eta_3}^{\mathrm{sat}}$ вектора v абсолютной скорости в гринвичской системе координат $O\eta$:

$$\begin{aligned}
v_{\eta_1}^{\mathrm{sat}} &= v_1^{\mathrm{o}}\cos\Omega_k - v_2^{\mathrm{o}}\cos i_k\sin\Omega_k + v_3^{\mathrm{o}}\sin i_k\sin\Omega_k,\\
v_{\eta_2}^{\mathrm{sat}} &= v_1^{\mathrm{o}}\sin\Omega_k + v_2^{\mathrm{o}}\cos i_k\cos\Omega_k - v_3^{\mathrm{o}}\sin i_k\cos\Omega_k,\\
v_{\eta_3}^{\mathrm{sat}} &= v_2^{\mathrm{o}}\sin i_k + v_3^{\mathrm{o}}\cos i_k;
\end{aligned}$$

г) определяются компоненты $V_{\eta_1}^{\mathrm{sat}}$, $V_{\eta_2}^{\mathrm{sat}}$, $V_{\eta_3}^{\mathrm{sat}}$ вектора V относительной скорости в гринвичской системе координат $O\eta$:

$$V_{\eta_1}^{\mathrm{sat}} = v_{\eta_1}^{\mathrm{sat}} + (u - \dot\Omega_0)R_{\eta_2}^{\mathrm{sat}}, \quad V_{\eta_2}^{\mathrm{sat}} = v_{\eta_2}^{\mathrm{sat}} - (u - \dot\Omega_0)R_{\eta_1}^{\mathrm{sat}}, \quad V_{\eta_3}^{\mathrm{sat}} = v_{\eta_3}^{\mathrm{sat}}.$$

Математические модели задачи определения скорости объекта

Модели первичных доплеровских измерений

Обобщённая модель первичных доплеровских измерений Z_{V_ρ} (м/сек) имеет вид [5, 9]

$$Z_{V_\rho} = V_\rho - \lambda(f_{\Delta\tau} - f_{\Delta T}) + \delta V_{\mathrm{ion}} + \delta V_{\mathrm{trop}} + \delta V_{\mathrm{mp}} + \delta V_{\mathrm{sat}} + \delta V_{\mathrm{rcv}} + \delta V^s. \qquad (2)$$

Здесь используются следующие обозначения:

- λ — длина волны радиосигнала;
- V_ρ — радиальная скорость вдоль линии объект—спутник (полезный сигнал измерения), определяется выражением

$$V_\rho = \frac{(R_\eta^{\mathrm{sat}} - R_\eta)^T(V_\eta^{\mathrm{sat}} - V_\eta)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{(R_\eta^{\mathrm{sat}} - R_\eta)^T(R_\eta^{\mathrm{sat}} - R_\eta)}, \qquad (3)$$

  где R_η^{sat}, V_η^{sat} — координаты и относительная скорость навигационного спутника в гринвичской системе координат, определённые на момент излучения радиосигнала; R_η, V_η — гринвичские координаты и относительная скорость приёмника;

- $f_{\Delta\tau}$ — неизвестная скорость ухода погрешности часов спутникового приёмника — определяемый (оцениваемый) в процессе обработки параметр;
- $f_{\Delta T}$ — моделируемая скорость ухода погрешности часов спутника — алгоритмически компенсируемая величина;
- δV_{ion}, δV_{trop} — погрешности, вызванные прохождением радиосигнала через ионосферу и тропосферу;
- δV_{mp} — погрешность многолучевости, вызванная переотражением радиосигнала от окружающих спутниковую антенну поверхностей;
- δV_{sat}, δV_{rcv} — достаточно стабильные во времени инструментальные погрешности аппаратуры спутника и приёмника;
- δV^s — случайная составляющая погрешности доплеровских измерений.

В дифференциальном режиме функционирования GPS в обработке используются так называемые двойные разности $\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}$ первичных спутниковых измерений, полученных от двух приёмников — подвижного приёмника и базовой станции:

$$\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}} = (Z^{\text{base}}_{V_{\rho_i}} - Z^{\text{rcv}}_{V_{\rho_i}}) - (Z^{\text{base}}_{V_{\rho_z}} - Z^{\text{rcv}}_{V_{\rho_z}}), \tag{4}$$

где верхний индекс «base» обозначает измерение базового приёмника, индекс «rcv» — измерение рабочего приёмника, индексы i, z соответствует измерениям, полученных от спутников с соответствующими номерами, z — обычно номер зенитного спутника.

Измерение (4) с учётом (2) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}} &= \nabla\Delta V_{\rho_i} + \nabla\Delta V_{\text{ion}_i} + \nabla\Delta V_{\text{trop}_i} + \nabla\Delta V_{\text{mp}_i} + \nabla\Delta V_i^s,\\
\nabla\Delta V_{\rho_i} &= (V_{\rho_i^{\text{base}}} - V_{\rho_i^{\text{rcv}}}) - (V_{\rho_z^{\text{base}}} - V_{\rho_z^{\text{rcv}}}),\\
\nabla\Delta V_{(***)_i} &= \big(\delta V_{(***)_i^{\text{base}}} - \delta V_{(***)_i^{\text{rcv}}}\big) - \big(\delta V_{(***)_z^{\text{base}}} - \delta V_{(***)_z^{\text{rcv}}}\big).
\end{aligned} \tag{5}$$

Полезным сигналом в измерении (5) является величина $\nabla\Delta V_{\rho_i}$ — дифференциальная комбинация радиальных скоростей.

Главное свойство измерения (5) — отсутствие в модели инструментальных погрешностей приёмника и спутников, погрешностей их часов, уменьшение уровня остаточных погрешностей $\nabla\Delta V_{\text{ion}_i}$, $\nabla\Delta V_{\text{trop}_i}$ ионосферы и тропосферы, причём этот уровень тем меньше, чем меньше расстояние между базовым и рабочим приёмниками и меньше перепад их высот.

Определение скорости объекта при помощи дифференциальных доплеровских измерений

При помощи информации о гринвичских координатах R_η^{base}, R_η^{rcv} базовой станции и объекта, гринвичских координатах $R_\eta^{\text{sat}_i}$ и относительных скоростях $V_\eta^{\text{sat}_i}$ навигационных спутников вычислим радиальные скорости $V_{\rho_i^{\text{base}}}$ линии спутники—базовая станция:

$$V_{\rho_i^{\text{base}}} = \frac{(R_\eta^{\text{sat}_i} - R_\eta^{\text{base}})^T}{\rho_i^{\text{base}}} V_\eta^{\text{sat}_i}. \tag{6}$$

Радиальная скорость $V_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}$ определяется аналогичной формулой, в которой учитывается собственная скорость V_η^{rcv} объекта:

$$\begin{gathered} V_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} = V^{(1)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} + V^{(2)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}, \\ V^{(1)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} = \frac{(R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})^T}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} V_\eta^{\mathrm{sat}_i}, \quad V^{(2)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} = -\frac{(R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})^T}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} V_\eta^{\mathrm{rcv}}, \end{gathered} \tag{7}$$

причём составляющая $V^{(1)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}$ вычисляется в явном виде по известной информации о координатах и скоростях навигационных спутников, координатах объекта.

Составляющая $V^{(2)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}$ содержит информацию об искомой скорости V_η^{rcv} движения объекта. Сформируем уравнения измерений «в малом»:

$$\nabla\Delta z_{V_{\rho_i}} = \nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}} - \left[\left(V_{\rho_i^{\mathrm{base}}} - V^{(1)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}\right) - \left(V_{\rho_z^{\mathrm{base}}} - V^{(1)}_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\right)\right]. \tag{8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla\Delta z_{V_{\rho_i}} &= -\left(V^{(2)}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} - V^{(2)}_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\right) + \nabla\Delta V_{\mathrm{ion}_i} + \nabla\Delta V_{\mathrm{trop}_i} + \nabla\Delta V_{\mathrm{mp}_i} + \nabla\Delta V_i^s = \\ &= h^T_{(i)} V_\eta^{\mathrm{rcv}} + \nabla\Delta r_{\dot\rho_i}, \\ h^T_{(i)} &= \left(\frac{R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}}}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} - \frac{R_\eta^{\mathrm{sat}_z} - R_\eta^{\mathrm{rcv}}}{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\right)^T. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь через

$$\nabla\Delta r_{\dot\rho_i} = \nabla\Delta V_{\mathrm{ion}_i} + \nabla\Delta V_{\mathrm{trop}_i} + \nabla\Delta V_{\mathrm{mp}_i} + \nabla\Delta V_i^s$$

обозначена остаточная погрешность двойных разностей доплеровских измерений.

В результате получим

$$\nabla\Delta z_{V_\rho} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta z_{V_{\rho_1}} \\ \nabla\Delta z_{V_{\rho_2}} \\ \dots \\ \nabla\Delta z_{V_{\rho_{N-1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^T_{(1)} \\ h^T_{(2)} \\ \dots \\ h^T_{(N-1)} \end{pmatrix} V_\eta^{\mathrm{rcv}} + \begin{pmatrix} \nabla\Delta r_{\dot\rho_1} \\ \nabla\Delta r_{\dot\rho_2} \\ \dots \\ \nabla\Delta r_{\dot\rho_{N-1}} \end{pmatrix} = H_{(\eta)} V_\eta^{\mathrm{rcv}} + \nabla\Delta r_{\dot\rho}. \tag{10}$$

Решение задачи (10) по методу наименьших квадратов (при постулировании соответствующих гипотез о погрешности $\nabla\Delta r_{\dot\rho}$) имеет вид

$$\tilde V_\eta^{\mathrm{rcv}} = (H^T_{(\eta)} W^{-1} H_{(\eta)})^{-1} H^T_{(\eta)} W^{-1} \nabla\Delta z_{V_\rho}. \tag{11}$$

Здесь W — ковариационная матрица погрешностей $\{\nabla\Delta r_{\dot\rho_i}\}$.

Модели первичных фазовых измерений

Модель первичных фазовых измерений Z_{V_φ} такова [5, 9, 10]:

$$Z_\varphi = \frac{\rho}{\lambda} + f(\Delta\tau - \Delta T) + N + \delta\varphi_{\mathrm{ion}} + \delta\varphi_{\mathrm{trop}} + \delta\varphi_{\mathrm{sat}} + \delta\varphi_{\mathrm{rcv}} + \delta\varphi_{\mathrm{mp}} + \delta\varphi^s. \tag{12}$$

Здесь ρ — расстояние от объекта до спутника; f — частота радиосигнала; N — некоторое неизвестное целое число, целочисленная неопределённость фазового измерения; $\delta\varphi_{\text{ion}}$, $\delta\varphi_{\text{trop}}$ — ионосферные и тропосферные задержки; $\delta\varphi_{\text{sat}}$, $\delta\varphi_{\text{rcv}}$ — инструментальные погрешности аппаратуры спутника и приёмника; $\delta\varphi_{\text{mp}}$ — погрешность многолучевости; $\delta\varphi^s$ — случайная составляющая погрешности фазовых измерений.

Первые разности ∇Z_{φ_i}, ΔZ_{φ_i} фазовых измерений имеют вид

$$\nabla Z_{\varphi_i} = Z_{\varphi_i} - Z_{\varphi_z}, \quad \Delta Z_{\varphi_i} = Z_{\varphi_i}^{\text{base}} - Z_{\varphi_i}^{\text{rcv}}, \tag{13}$$

где $Z_{\varphi_i}^{\text{base}}$ — фазовое измерение базовой станции; $Z_{\varphi_i}^{\text{rcv}}$ — аналогичное измерение рабочего приёмника; i — номер спутника.

Двойная разность $\nabla\Delta Z_{\varphi_i}$ имеет вид

$$\nabla\Delta Z_{\varphi_i} = (Z_{\varphi_i}^{\text{base}} - Z_{\varphi_i}^{\text{rcv}}) - (Z_{\varphi_z}^{\text{base}} - Z_{\varphi_z}^{\text{rcv}}). \tag{14}$$

Измерение (14) с учётом (12) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\nabla\Delta Z_{\varphi_i} &= \frac{\nabla\Delta\rho_i}{\lambda} + \nabla\Delta N_i + \nabla\Delta\varphi_{\text{ion}_i} + \nabla\Delta\varphi_{\text{trop}_i} + \nabla\Delta\varphi_{\text{mp}_i} + \nabla\Delta\varphi_i^s, \\
\nabla\Delta\rho_i &= (\rho_i^{\text{base}} - \rho_i^{\text{rcv}}) - (\rho_z^{\text{base}} - \rho_z^{\text{rcv}}), \\
\nabla\Delta N_i &= (N_i^{\text{base}} - N_i^{\text{rcv}}) - (N_z^{\text{base}} - N_z^{\text{rcv}}), \\
\nabla\Delta\varphi_{(***)_i} &= \left(\delta\varphi_{(***)_i}^{\text{base}} - \delta\varphi_{(***)_i}^{\text{rcv}}\right) - \left(\delta\varphi_{(***)_z}^{\text{base}} - \delta\varphi_{(***)_z}^{\text{rcv}}\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Полезным сигналом в измерении (15) является величина $\nabla\Delta\rho_i/\lambda$.

Главное свойство измерения (15) — отсутствие в модели инструментальных погрешностей приёмника и спутников, погрешностей их часов, а также уменьшение уровня остаточных погрешностей $\nabla\Delta\varphi_{\text{ion}_i}$, $\nabla\Delta\varphi_{\text{trop}_i}$ ионосферы и тропосферы, причём этот уровень тем меньше, чем меньше расстояние между базовым и рабочим приёмниками и меньше перепад их высот.

Величина $\nabla\Delta N_i$ представляет собой целочисленную неопределённость двойных разностей фазовых измерений.

Определения скорости объекта при помощи дифференциальных фазовых измерений

Главная идея алгоритма состоит в прямом численном дифференцировании фазовых измерений. В остальном алгоритм отличается от представленного выше только иным способом формирования измерений, содержащих полезную информацию о скорости движения объекта. Поэтому ограничимся лаконичными комментариями.

Рассмотрим численную производную

$$\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}^*(t_j) = \lambda\frac{\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_{j+1}) - \nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_{j-1})}{t_{j+1} - t_{j-1}} \tag{16}$$

дифференциальных фазовых измерений $\{\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_j)\}$. Выражение (16) является приближением (оценкой) двойных разностей

$$\nabla\Delta V_{\rho_i} = (V_{\rho_i^{\text{base}}} - V_{\rho_i^{\text{rcv}}}) - (V_{\rho_z^{\text{base}}} - V_{\rho_z^{\text{rcv}}})$$

радиальных скоростей по линиям приёмники—спутники в момент времени t_j:

$$\nabla\Delta Z^*_{V_{\rho_i}}(t_j) \simeq \frac{\nabla\Delta\rho_i(t_{j+1}) - \nabla\Delta\rho_i(t_{j-1})}{t_{j+1} - t_{j-1}} \simeq \nabla\Delta V_{\rho_i}. \tag{17}$$

Далее значение $\nabla\Delta Z^*_{V_{\rho_i}}(t_j)$ используется в алгоритме (8)—(11) вместо аналогичного доплеровского измерения $\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t_j)$.

Главное в алгоритме — численное дифференцирование двойных разностей фазовых измерений. Корректное осуществление данной процедуры предполагает отсутствие сбоев фазы (изменения значений неопределённостей $\{\nabla\Delta N_i\}$) на интервале дифференцирования, поэтому необходимым элементом задачи являются алгоритмы детектирования и компенсации возможных сбоев фазовых измерений. Например, в задаче (10) можно использовать алгоритм метода наименьших модулей, «хорошо» работающий при наличии сбоев в измерениях. Полезной дополнительной информацией служит также скоростное доплеровское решение.

Математические модели задачи определения ускорения объекта

Абсолютное ускорение W объекта складывается из ускорения силы тяготения и ускорения, вызванного внешними силами, действующими на объект. Запишем динамическое уравнение движения объекта в осях гринвичской системы координат $O\eta$ (O — центр Земли, $O\eta_1\eta_2$ — плоскость экватора, $O\eta_3$ — ось вращения Земли):

$$\dot V_\eta^{\text{rcv}} = 2\hat u_\eta V_\eta^{\text{rcv}} + g_\eta + W_\eta^{\text{rcv}}, \quad g_\eta = g_{0\eta} - \hat u_\eta^2 R_\eta^{\text{rcv}}. \tag{18}$$

Здесь V_η^{rcv} — относительная скорость объекта в осях $O\eta$; $u_\eta = (0,0,u)^T$ — вектор угловой скорости вращения Земли; $\hat u_\eta$ — кососимметрическая матрица, соответствующая вектору u_η; $g_{0\eta}$ — удельная составляющая силы тяготения; g_η — удельная составляющая силы тяжести; W_η^{rcv} — искомое ускорение объекта в гринвичской системе координат.

Соответственно имеем

$$W_\eta^{\text{rcv}} = \dot V_\eta^{\text{rcv}} - 2\hat u_\eta V_\eta^{\text{rcv}} - (g_{0\eta} - \hat u_\eta^2 R_\eta^{\text{rcv}}).$$

Для гравиметрических приложений абсолютное значение нормального ускорения силы тяжести γ с поправкой на высоту h полёта определяется при помощи формулы Гельмерта (1). В гринвичских осях $O\eta$ имеем

$$g_\eta = B\begin{pmatrix}0\\0\\-\gamma\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\varphi & \cos\lambda\cos\varphi\\ \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\varphi & \sin\lambda\cos\varphi\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\end{pmatrix},$$

где B — матрица взаимной ориентации гринвичской и географической систем координат; λ, φ — географические координаты объекта.

Предположим, что доступна информация о радиальном ускорении A_{ρ^i} по линии объект—навигационный спутник:

$$\begin{aligned} A_{\rho_i} &= \frac{(V_\eta^{\mathrm{sat}_i} - V_\eta^{\mathrm{rcv}})^T (V_\eta^{\mathrm{sat}_i} - V_\eta^{\mathrm{rcv}})}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} - \frac{\dot\rho_i^{\mathrm{rcv}\,2}}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} + \frac{(R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})^T}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} (\dot V_\eta^{\mathrm{sat}_i} - \dot V_\eta^{\mathrm{rcv}}),\\ \rho_i^{\mathrm{rcv}} &= \sqrt{(R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})^T (R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $R_\eta^{\mathrm{sat}_i}$, $V_\eta^{\mathrm{sat}_i}$ — гринвичские координаты и вектор относительной скорости навигационного спутника с номером i; R_η^{rcv}, V_η^{rcv} — гринвичские координаты и вектор относительной скорости объекта; ρ_i^{rcv} — расстояние от спутника до объекта.

Представим радиальное ускорение A_{ρ_i} в виде суммы двух составляющих $A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})}$, $A_{\rho_i}^{(\mathrm{II})}$, где

$$\begin{aligned} A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})} &= \frac{(V_\eta^{\mathrm{sat}_i} - V_\eta^{\mathrm{rcv}})^T (V_\eta^{\mathrm{sat}_i} - V_\eta^{\mathrm{rcv}})}{\rho_i} - \frac{\dot\rho_i^{\mathrm{rcv}\,2}}{\rho_i} + \frac{(R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})^T}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} \dot V_\eta^{\mathrm{sat}_i},\\ A_{\rho_i}^{(\mathrm{II})} &= -\frac{(R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}})^T}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} \dot V_\eta^{\mathrm{rcv}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Первая составляющая $A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})}$ может быть вычислена в явном виде при помощи известной информации о координатах и скоростях движения спутника и объекта. Составляющая $A_{\rho_i}^{(\mathrm{II})}$ содержит информацию о производной $\dot V_\eta^{\mathrm{rcv}}$ скорости движения объекта и, соответственно, об искомом ускорении W_η^{rcv}.

Предположим, что посредством первичных измерений СНС можно оценить величину A_{ρ_i} радиального ускорения по линии объект—спутник:

$$Z_{A_{\rho_i}} = A_{\rho_i} + r_{\ddot\rho_i},$$

где $r_{\ddot\rho_i}$ — обобщённая погрешность определения величины A_{ρ_i}.

Введём $z_{A_{\rho_i}} = Z_{A_{\rho_i}} - A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})}$. Тогда производную $\dot V_\eta$ можно определить путём решения следующей задачи оценивания:

$$\begin{aligned} z_{A_\rho} &= \begin{pmatrix} z_{A_{\rho_1}}\\ z_{A_{\rho_2}}\\ \cdots\\ z_{A_{\rho_{(N)}}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{(1)}^T\\ h_{(2)}^T\\ \cdots\\ h_N^T\end{pmatrix} \dot V_\eta^{\mathrm{rcv}} + \begin{pmatrix} r_{\ddot\rho_1}\\ r_{\ddot\rho_2}\\ \cdots\\ r_{\ddot\rho_N}\end{pmatrix} = H\dot V_\eta^{\mathrm{rcv}} + r_{\ddot\rho},\\ h_{(i)}^T &= -\frac{R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}}}{\rho_i}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $r_{\ddot\rho}$ — обобщённая погрешность измерения; N — число видимых спутников.

Решение задачи (21) по методу наименьших квадратов (при постулировании соответствующих гипотез о шумах измерений $r_{\ddot\rho}$) имеет вид

$$\dot{\tilde{V}}_\eta^{\mathrm{rcv}} = (H^T Q^{-1} H)^{-1} H^T Q^{-1} z_{A_\rho},$$

где Q — ковариационная матрица шумов измерений $r_{\ddot\rho_i}$.

И, наконец, с использованием уравнения (18) моделей удельных сил тяготения g_η определяется оценка $\tilde W_\eta^{\mathrm{rcv}}$ ускорения W_η^{rcv} объекта:

$$\tilde W_\eta^{\mathrm{rcv}} = \dot{\tilde{V}}_\eta^{\mathrm{rcv}} - 2\hat u_\eta V_\eta^{\mathrm{rcv}} - (g_{0\eta} - \hat u_\eta^2 R_\eta^{\mathrm{rcv}}). \tag{22}$$

Определение ускорения объекта при помощи доплеровских измерений

Рассмотрим три последовательных отсчёта $\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t_{j-1})$, $\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t_j)$, $\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t_{j+1})$ двойных разностей доплеровских измерений. С помощью центральной первой разности этих отсчётов сформируем оценку $\nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}}(t)$ производной функции $\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t)$ в момент времени t_j:

$$\nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}}(t_j) = \frac{\nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t_{j+1}) - \nabla\Delta Z_{V_{\rho_i}}(t_{j-1})}{t_{j+1} - t_{j-1}}. \tag{23}$$

Полезным сигналом $\nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}}(t_j)$ служит следующая двойная разность $\nabla\Delta A_{\rho_i}(t_j)$ радиальных ускорений:

$$\nabla\Delta A_{\rho_i}(t_j) = (A_{\rho_i^{\mathrm{base}}}(t_j) - A_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}(t_j)) - (A_{\rho_z^{\mathrm{base}}}(t_j) - A_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}(t_j)).$$

Соответственно введём в рассмотрение модель

$$\nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}} = \nabla\Delta A_{\rho_i} + \nabla\Delta r_{\ddot\rho_i},$$

где $\nabla\Delta r_{\ddot\rho_i}$ — обобщённая погрешность определения двойной разности радиальных ускорений.

Двойную разность $\nabla\Delta A_{\rho_i}$ радиальных ускорений с учётом (19), (20) можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\nabla\Delta A_{\rho_i} = \nabla\Delta A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})} + \nabla\Delta A_{\rho_i}^{(\mathrm{II})},$$

$$\nabla\Delta A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})} = \big(A_{\rho_i^{\mathrm{base}}} - A^{(\mathrm{I})}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}\big) - \big(A_{\rho_z^{\mathrm{base}}} - A^{(\mathrm{I})}_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\big), \quad \nabla\Delta A_{\rho_i}^{(\mathrm{II})} = -\big(A^{(\mathrm{II})}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} - A^{(\mathrm{II})}_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\big).$$

Первая составляющая вычисляется в явном виде по известной информации о координатах и скоростях движения навигационных спутников, рабочего приёмника и базовой станции. Вторая содержит неизвестный оцениваемый параметр — производную $\dot V_\eta^{\mathrm{rcv}}$ относительной скорости V_η^{rcv} приёмника. Соответственно введём

$$\nabla\Delta z_{A_{\rho_i}} = \nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}} - \nabla\Delta A_{\rho_i}^{(\mathrm{I})}.$$

Тогда для $\nabla\Delta z_{A_{\rho_i}}$ будет справедлива следующая модель:

$$\nabla\Delta z_{A_{\rho_i}} = h_{(i)}^T \dot V_\eta^{\mathrm{rcv}} + \nabla\Delta r_{\ddot\rho_i}, \quad h_{(i)}^T = \left(\frac{R_\eta^{\mathrm{sat}_i} - R_\eta^{\mathrm{rcv}}}{\rho_i^{\mathrm{rcv}}} - \frac{R_\eta^{\mathrm{sat}_z} - R_\eta^{\mathrm{rcv}}}{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\right)^T. \tag{24}$$

Для случая $N-1$ измерений (N видимых спутников) получим следующую линейную модель задачи оценивания величины $\dot{V}_\eta$:

$$z_{A_\rho} = \begin{pmatrix} z_{A_{\rho_1}} \\ z_{A_{\rho_2}} \\ \dots \\ z_{A_{\rho_{N-1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^T_{(1)} \\ h^T_{(2)} \\ \dots \\ h^T_N \end{pmatrix} \dot{V}^{\mathrm{rcv}}_\eta + \begin{pmatrix} \nabla\Delta r_{\ddot{\rho}_1} \\ \nabla\Delta r_{\ddot{\rho}_2} \\ \dots \\ \nabla\Delta r_{\ddot{\rho}_{N-1}} \end{pmatrix} = H\dot{V}^{\mathrm{rcv}}_\eta + \nabla\Delta r_{\ddot{\rho}}. \qquad (25)$$

Решение задачи (25) по методу наименьших квадратов (при постулировании соответствующих гипотез о шумах измерений $\nabla\Delta r_{\ddot{\rho}}$) имеет вид

$$\hat{\dot{V}}^{\mathrm{rcv}}_\eta = (H^T Q^{-1} H)^{-1} H^T Q^{-1} \nabla\Delta z_{A_\rho}.$$

Здесь Q — ковариационная матрица шумов измерений $\{\nabla\Delta r_{\ddot{\rho}_i}\}$.

Далее для определения оценки ускорения $\tilde{W}^{\mathrm{rcv}}_\eta$ используется уравнение (22).

Определение ускорения объекта при помощи дифференциальных комбинаций фазовых измерений

Описываемый алгоритм отличается от представленного выше только иным способом формирования измерений, содержащих полезную информацию об ускорении объекта. Поэтому ограничимся лаконичными комментариями.

Рассмотрим три последовательных дифференциальных фазовых отсчёта $\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_{j-1})$, $\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_j)$, $\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_{j+1})$. С помощью центральной второй разности осуществим численное дифференцирование этих отсчётов. Результатом этой процедуры станет оценка $\nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}}$ (см. (15)) двойных разностей

$$\nabla\Delta A_{\rho_i} = (A_{\rho_i^{\mathrm{base}}} - A_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}) - (A_{\rho_z^{\mathrm{base}}} - A_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}})$$

радиальных ускорений по линиям приёмники—спутники в момент времени t_j:

$$\nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}}(t_j) = \lambda \frac{\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_{j+1}) - 2\nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_j) + \nabla\Delta Z_{\varphi_i}(t_{j-1})}{\Delta t^2}, \qquad (26)$$

$\Delta t = t_{j+1} - t_j = t_j - t_{j-1}$.

Как и в задаче определения ускорения объекта при помощи доплеровских измерений, введём

$$\nabla\Delta z_{A_{\rho_i}} = \nabla\Delta Z_{A_{\rho_i}} - \nabla\Delta A^{(\mathrm{I})}_{\rho_i},$$

где

$$\nabla\Delta A^{(\mathrm{I})}_{\rho_i} = \left(A_{\rho_i^{\mathrm{base}}} - A^{(\mathrm{I})}_{\rho_i^{\mathrm{rcv}}}\right) - \left(A_{\rho_z^{\mathrm{base}}} - A^{(\mathrm{I})}_{\rho_z^{\mathrm{rcv}}}\right)$$

и составляющие $A_{\rho_{(*)}^{\mathrm{base}}}$, $A^{(\mathrm{I})}_{\rho_{(*)}^{\mathrm{rcv}}}$ определяются формулами (19), (20).

Тогда в соответствии с (24), (25) модель задачи оценивания вектора $\dot{V}_\eta$ примет вид

$$\nabla\Delta z_{A_\rho} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta z_{A_{\rho_1}} \\ \nabla\Delta z_{A_{\rho_2}} \\ \dots \\ \nabla\Delta z_{A_{\rho_{N-1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^T_{(1)} \\ h^T_{(2)} \\ \dots \\ h^T_{(N-1)} \end{pmatrix} \dot{V}^{\text{rcv}}_\eta + \begin{pmatrix} \nabla\Delta r_{\ddot{\varphi}_1} \\ \nabla\Delta r_{\ddot{\varphi}_2} \\ \dots \\ \nabla\Delta r_{\ddot{\varphi}_{N-1}} \end{pmatrix} = H\dot{V}^{\text{rcv}}_\eta + \nabla\Delta r_{\ddot{\varphi}}, \tag{27}$$

$$h^T_{(i)} = \left(\frac{R^{\text{sat}_i}_\eta - R^{\text{rcv}\prime}_\eta}{\rho^{\text{rcv}\prime}_i} - \frac{R^{\text{sat}_z}_\eta - R^{\text{rcv}\prime}_\eta}{\rho^{\text{rcv}\prime}_z} \right)^T.$$

Здесь через $\nabla\Delta r_{\ddot{\varphi}_i}$ обозначена интегральная погрешность измерения, обусловленная численным дифференцированием погрешностей фазовых измерений.

Задача (27) структурно полностью совпадает с аналогичной моделью (24) задачи определения ускорения при помощи доплеровских измерений. Для её решения также можно использовать метод наименьших квадратов при постулировании соответствующих гипотез о характеристиках погрешности $\nabla\Delta r_{\ddot{\varphi}}$.

Так же как и при определении скорости при помощи фазовых измерений, алгоритм определения ускорения включает в себя численное дифференцирование двойных разностей фазовых измерений. Поэтому здесь остаются в силе замечания о необходимости детектирования и компенсации возможных сбоев фазовых измерений.

Задача определения координат объекта при помощи дифференциальных фазовых измерений

Вернёмся к центральной задаче спутниковой навигации — задаче определения координат объекта при помощи дифференциальных фазовых измерений. Будем предполагать, что в режиме постобработки уже доступны скоростные спутниковые решения, полученные при помощи алгоритмов, изложенных выше.

Очевиден следующий подход к задаче определения местоположения. Введём кинематическую модель движения объекта:

$$\dot{R}^{\text{rcv}\prime}_\eta = \tilde{V}^{\text{rcv}}_\eta, \tag{28}$$

где $R^{\text{rcv}\prime}_\eta$ — модельные координаты объекта, $\tilde{V}^{\text{rcv}}_\eta$ — оценка скорости движения объекта, полученная путём обработки дифференциальных фазовых или доплеровских измерений.

Введём ошибки модели (28):

$$\Delta R_\eta = R^{\text{rcv}\prime}_\eta - R^{\text{rcv}}_\eta, \quad \delta V_\eta = \tilde{V}^{\text{rcv}}_\eta - V^{\text{rcv}}_\eta,$$

где R^{rcv}_η, V^{rcv}_η — истинные координаты и скорости движения объекта, ΔR_η — ошибка определения местоположения, δV_η — ошибка скоростного решения. Тогда

$$\Delta\dot{R}_\eta = \delta V_\eta. \tag{29}$$

Линеаризованные в окрестности модельного решения $R_\eta^{rcv'}(t_j)$ уравнения (15) фазовых измерений примут вид

$$\nabla\Delta z(t_j) = \begin{pmatrix} h_{(1)}^T \\ h_{(2)}^T \\ \dots \\ h_{(N-1)}^T \end{pmatrix} \Delta R_\eta(t_j) + \begin{pmatrix} \nabla\Delta N_1 \\ \nabla\Delta N_2 \\ \dots \\ \nabla\Delta N_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\Delta r_1 \\ \nabla\Delta r_2 \\ \dots \\ \nabla\Delta r_{N-1} \end{pmatrix} =$$
$$= H(t_j)\Delta R_\eta(t_j) + \nabla\Delta N + \nabla\Delta r(t_j), \quad (30)$$

где строки $h_{(i)}^T$ матрицы $H(t_j)$ определяются формулами (27), $\nabla\Delta N$ — сводный вектор целочисленных неопределённостей фазовых измерений, $\nabla\Delta r$ — вектор суммарных ошибок дифференциальных фазовых измерений.

Введём вектор состояния

$$x_j = (\Delta R_\eta{}^T(t_j), \nabla\Delta N^T)^T$$

и осуществим переход от непрерывной модели (29) уравнений ошибок счисления координат к дискретной.

Тогда для вектора $x_j = x(t_j)$ можно поставить следующую стандартную линейную задачу оценивания при помощи фазовых измерений $\nabla\Delta z_j = \nabla\Delta z(t_j)$:

$$x_{j+1} = x_j + q_j, \quad \nabla\Delta z_j = H_j x_j + r_j, \quad (31)$$

где $H_j = H(t_j)$, $r_j = \nabla\Delta r(t_j)$, q_j — эквивалентная δV_η погрешность скоростных решений при дискретном представлении уравнения (29).

Для решения задачи (31) можно использовать алгоритмы сглаживания калмановского типа при постулировании соответствующих гипотез о случайных погрешностях q_j, r_j.

Особенность предлагаемого алгоритма — необходимость параметризации моделей ошибок определения скорости δV_η. Здесь могут быть использованы эвристические, априорные модели, а также модели, основанные на статистическом анализе остаточных разностей скоростных решений.

Достоинство предлагаемого подхода состоит в том, что существенно упрощается задача детектирования и компенсации возможных сбоев фазовых измерений, поскольку аналогичная задача легче решается на этапе получения скоростных решений.

Опыт применения данного подхода показал, что он устойчиво работает при превосходящих 100 км длинах базовых линий.

Выводы

Рассмотрены важные для авиагравиметрических приложений задачи определения скорости, ускорения и координат подвижного объекта с помощью первичных измерений СНС. Описаны математические модели используемых в этих задачах дифференциальных доплеровских и фазовых спутниковых измерений.

Для задач определения скорости и ускорения предложен подход, основанный на прямом численном дифференцировании первичных фазовых измерений. Рассмотренные задачи приведены к форме стандартных линейных задач оценивания. Опыт применения [1, 3] описанных алгоритмов в задаче авиационной гравиметрии показал их эффективность.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00738.

Литература

[1] Бержицкий В. Н., Болотин Ю. В., Голован А. А., Парусников Н. А. и др. Инерциально-гравиметрический комплекс МАГ-1. Результаты лётных испытаний. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2001.

[2] Болотин Ю. В., Голован А. А., Кручинин П. А., Парусников Н. А., Тихомиров В. В., Трубников С. А. Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1999. — № 2. — С. 36—41.

[3] Голован А. А., Болотин Ю. В., Парусников Н. А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002.

[4] Голован А. А., Болотин Ю. В., Парусников Н. А. Методы решения задачи авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний // Проблемы механики: сборник статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. — М.: Физматлит, 2003. — С. 130—145.

[5] Голован А. А., Вавилова Н. Б., Парусников Н. А., Трубников С. А. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2001.

[6] Голован А. А., Вавилова Н. Б. Определение ускорения объекта при помощи первичных измерений спутниковой навигационной системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 5. — С. 18—25.

[7] Голован А. А., Вавилова Н. Б. Особенности использования спутниковых измерений для определения скорости носителя в задаче авиационной гравиметрии // Аэрокосмическое приборостроение. — 2003. — № 3.

[8] Global Positioning System. Standard Positioning Service. Signal Specification. — 2nd ed. — June 2, 1995.

[9] Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J. GPS: Theory and Practice. — 4th ed. — Wien: Springer, 1994.

[10] Leick A. GPS Satellite Surveying. — 2nd ed. — New York: Wileys–Interscience; John Wiley and Sons, 1995.