Особые множества и динамические свойства билинейных систем управления

В. Н. ЖЕРМОЛЕНКО
Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина
e-mail: zhermolenko@gubkin.ru

УДК 531.3:62-50

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, полная неустойчивость, полная управляемость, особое множество, особое управление, область свободных движений, инвариантное многообразие.

Аннотация

Развиваются качественные методы исследования динамических систем с управлением. Произведена классификация особых множеств двумерных билинейных систем управления и получены конструктивные критерии наличия на фазовом портрете особых множеств разных видов. Исследована зависимость динамических свойств систем, таких как колебательность, устойчивость, неустойчивость и управляемость, от видов особых множеств. Получены аналитические условия, при которых анализ динамических свойств билинейных систем является простым.

Abstract

V. N. Zhermolenko, Singular sets and dynamic properties of bilinear control systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 8, pp. 105—117.

The paper deals with qualitative methods of investigation of dynamic systems with control. Classification of singular sets of two-dimensional bilinear control systems is proposed. Constructive criteria of presence of different kinds of singular sets in the phase portrait are obtained. Dependence of dynamic properties of systems such as oscillation, stability, instability, and controllability on the types of singular sets is investigated. Analytical conditions under which analysis of above properties is relatively simple are obtained.

1. Введение

Особые множества на фазовых портретах динамических систем с управлением рассматривались в [1, 2]. Показано, что они играют важную роль в исследовании вопросов управляемости. В предлагаемой работе изучается зависимость ряда динамических свойств двумерных билинейных систем, таких как колебательность, устойчивость, неустойчивость и управляемость, от видов особых множеств на фазовом портрете. Найдены условия, при которых решения задач устойчивости, неустойчивости и управляемости билинейных систем либо очевидны, либо достаточно просты.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 8, с. 105—117.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ — вектор состояния, $\top$ — знак транспонирования, а коэффициенты $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ перед фазовыми переменными являются управлениями, о которых известно лишь, что это измеримые функции, удовлетворяющие почти всюду на $\mathbb{R}_+$ интервальным ограничениям $a_{ij}^- \leqslant a_{ij}(t) \leqslant a_{ij}^+$, или в матричной форме

$$A^- \leqslant A(t) \leqslant A^+. \tag{2}$$

В пространстве $\mathbb{R}^4$ параметров a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} системы (1) ограничения (2) определяют параллелепипед

$$P = [a_{11}^-, a_{11}^+] \times [a_{12}^-, a_{12}^+] \times [a_{21}^-, a_{21}^+] \times [a_{22}^-, a_{22}^+],$$

который является областью значений измеримого матричного управления $A(t)$. Вершинам параллелепипеда P соответствуют пронумерованные в определённом порядке матрицы $A_1 = A^-, \ldots, A_k, \ldots, A_{16} = A^+$. Совокупность матричных управлений $A(t)$, удовлетворяющих почти всюду на $\mathbb{R}_+$ ограничениям (2), обозначим через

$$\Omega = \{A(t) \colon A^- \leqslant A(t) \leqslant A^+ \Longleftrightarrow A(t) \in P\}.$$

Таким образом, рассматривается не одна нестационарная система (1), а семейство билинейных систем, определяемое функциональным включением $A(\cdot) \in \Omega$. Решение системы (1), соответствующее конкретной функции $A(\cdot) \in \Omega$ и начальному условию x^0, понимается как абсолютно непрерывная вектор-функция $x_A(x^0, t)$, удовлетворяющая почти всюду на $\mathbb{R}_+$ уравнениям (1). Системы (1) и вопросы их устойчивости рассматривались в [5, 6]. Исчерпывающий анализ осцилляционных свойств билинейной системы (1), (2) проведён в [4].

Задача состоит в исследовании зависимости динамических свойств билинейной системы (1), (2), таких как колебательность, устойчивость, неустойчивость и управляемость, от видов особых множеств на её фазовом портрете.

Билинейная система (1), (2) называется колебательной, если она имеет осциллирующее в положительном или отрицательном направлении на фазовой плоскости решение. В противном случае система является абсолютно неколебательной. Под устойчивостью билинейной системы (1), (2) понимается, как и в [5,6], абсолютная устойчивость в классе Ω, т. е. асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1) при любых функциях $A(\cdot) \in \Omega$. Управляемость билинейной системы (1), (2) в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ понимается как полная управляемость по Калману с тем лишь отличием, что две любые точки фазового пространства, которые могут быть соединены управляемым переходом за конечное время, должны быть ненулевыми. Неустойчивость понимаются как полная неустойчивость в смысле следующего нового определения.

Определение 1. Билинейная система (1), (2) называется полностью неустойчивой, если при любых x^0, $\|x^0\| = 1$, и всех $A(\cdot) \in \Omega$ для её решений $x_A(x^0, t)$ выполняется предельное условие $\lim\limits_{t\to\infty} \|x_A(x^0, t)\| = \infty$.

Другими словами, все траекторные воронки

$$X_\Omega(x^0) = \{x_A(x^0, t)\colon A(\cdot) \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}_+\}$$

с вершинами x^0 на единичной сфере $\|x^0\| = 1$ должны уходить в бесконечность. Свойства абсолютной устойчивости, полной неустойчивости и полной управляемости являются взаимоисключающими, т. е. одно исключает два других.

Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$\operatorname{tr} A = (a_{11} + a_{22}), \quad \Delta A = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad D(A) = \operatorname{tr}^2 A - 4\det A\,—$$

след, определитель и дискриминант матрицы A;

$$P^- = \{A\colon D(A) < 0,\ A \in P\}, \quad P^+ = \{A\colon D(A) \geqslant 0,\ A \in P\},$$

следовательно, $P = P^- \cup P^+$;

$$Q_1 = [a_{11}^-, a_{11}^+] \times [a_{12}^-, a_{12}^+], \quad Q_2 = [a_{21}^-, a_{21}^+] \times [a_{22}^-, a_{22}^+],$$

следовательно, $P = Q_1 \cup Q_2$. Пусть $q_i = (a_{i1}, a_{i2})^\top$ $(i = 1, 2)$ — вектор-столбец, причём начальной точкой вектора q_i считается начало координат, а конечная точка принадлежит прямоугольнику Q_i, что далее будем обозначать как $q_i \in Q_i$, тогда

$$\det A = \det A^\top = |q_1, q_2| = \|q_1\|\,\|q_2\| \sin\psi,$$

где ψ — угол, отсчитываемый в положительном направлении от первого вектора q_1 ко второму вектору q_2, т. е. $0 \leqslant \psi < 2\pi$. Будем обозначать $\{q_i\}$ пучок векторов q_i с общим началом в нулевой точке, конечные точки которых образуют прямоугольник Q_i, т. е. $q_i \in Q_i$ тогда и только тогда, когда $q_i \in \{q_i\}$ $(i = 1, 2)$. Пусть $l_i(q_i, x) = \langle q_i, x\rangle = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$, $q_i \in Q_i$, $x \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$, — билинейные функции, представляющие собой правые части уравнений семейства стационарных систем $\dot{x} = Ax$, $A \in P$. Пусть $l_i\colon l_i(q_i, x) = \langle q_i, x\rangle = 0$ — прямая, на которой $\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$ $(i = 1, 2)$; $L_i = \{l_i\} = \{l_i(q_i, x) = 0,\ q_i \in Q_i\}$ — пучок прямых l_i $(i = 1, 2)$; q_i^- (q_i^+) и l_i^- (l_i^+) — граничные при $0 \notin Q_i$ векторы и прямые пучков $\{q_i\}$ и L_i, имеющие наименьший (наибольший) в $\{q_i\}$ и L_i угол с положительной полуосью OX_1^+, отсчитываемый в положительном направлении; $l_i^\pm\colon \langle q_i^\pm, x\rangle = 0$, — уравнения граничных прямых пучков L_i $(i = 1, 2)$.

3. Особые множества

Заметим, что в силу однородности билинейной системы (1), (2) её особые множества являются линейчатыми, т. е. состоят из прямых, проходящих через начало координат. Рассмотрим пространство $\{\dot{x}\}$ фазовых скоростей системы (касательное пространство), связанное с фазовой точкой x. Его начало $\dot{O}(x)$

считаем помещённым в точку x, а оси $\dot{O}\dot{X}_1$, $\dot{O}\dot{X}_2$ сонаправленными с осями OX_1, OX_2 фазового пространства $\{x\}$. Любой фазовой точке x соответствует в касательном пространстве множество допустимых фазовых скоростей системы, которое обозначается через $F(x)$. Для билинейной системы (1), (2) это прямоугольник $F(x) = \{y\colon y = Ax,\ A \in P\}$ со сторонами, параллельными осям $\dot{O}\dot{X}_1$, $\dot{O}\dot{X}_2$. Он представляет собой отображение параллелепипеда P в касательное пространство функцией $y = Ax$ при фиксированном x. Другими словами, система (1), (2) задаёт пучок допустимых фазовых скоростей $\Pi(x)$ с началом в точке $\dot{O}(x)$ и конечными точками в прямоугольнике $F(x)$, т. е. $\Pi(x) = \{\dot{x}\colon \dot{x} = Ax,\ A \in P\}$. Для любой фазовой точки x имеет место только одна из трёх следующих ситуаций.

1. $\dot{O}(x) \in \operatorname{int} F(x)$.
2. $\dot{O}(x) \notin F(x)$.
3. $\dot{O}(x) \in \partial F(x)$.

Через int и ∂ обозначены внутренняя часть и граница $F(x)$.

1. Если $\dot{O}(x) \in \operatorname{int} F(x)$, то пучок $\Pi(x)$ заполняет всю окрестность точки x, а конус допустимых направлений фазовых скоростей заполняет всё касательное пространство $\{\dot{x}\}$. Следовательно, находясь в точке x, система может либо оставаться на месте, либо двигаться в любом направлении. Если множество таких точек образует некоторую открытую область D в фазовом пространстве, то любые две точки x^0 и x^1 связной части этой области могут быть соединены в управляемом переходе $x^0 \to x^1$ за конечное время траекторией, целиком в ней лежащей. Эта открытая область D называется областью нестеснённых траекторий (свободных движений) [2]. Системы, имеющие такую область свободных движений D, назовём системами D-класса.

2. Если $\dot{O}(x) \notin F(x)$, то пучок допустимых фазовых скоростей $\Pi(x)$ билинейной системы (1), (2) имеет два граничных вектора. Крайний правый (левый) вектор $\dot{x}^-(x) = \dot{x}^{\mathrm{R}}(x)$ ($\dot{x}^+(x) = \dot{x}^{\mathrm{L}}(x)$) имеет наименьший (наибольший) в $\Pi(x)$ угол с положительной полуосью $\dot{O}\dot{X}_1^+$, отсчитываемый в положительном направлении. Обозначим через $\varphi(x)$ угол между граничными векторами, который отсчитывается в положительном направлении от крайнего правого вектора $\dot{x}^{\mathrm{R}}(x)$ к крайнему левому вектору $\dot{x}^{\mathrm{L}}(x)$. Величина угла $\varphi(x)$ в рассматриваемой ситуации 2 ($\dot{O}(x) \notin F(x)$) удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \varphi(x) < \pi$. Заметим, что в ситуации 2 для некоторых фазовых точек x при определённых граничных значениях $a_{ij}^{\mp}$ $(i, j = 1, 2)$ параметров билинейной системы (1), (2) прямоугольник $F(x)$ может выродиться либо в точку пространства $\{\dot{x}\}$, либо в отрезок на одной из полуосей $\dot{O}\dot{X}_j \setminus \{0\}$ $(j = 1, 2)$. Другими словами, в таких точках тоже возникает особенность, поскольку в обоих указанных случаях пучок допустимых фазовых скоростей $\Pi(x)$ «складывается» подобно вееру. На прямой, проходящей через начало координат и такую точку x, крайние векторы $\dot{x}^{\mathrm{R}}(x)$ и $\dot{x}^{\mathrm{L}}(x)$ сонаправленны. Будем называть её общей изоклиной.

3. В ситуации $\dot{O}(x) \in \partial F(x)$ система также может либо оставаться в точке x, либо двигаться из неё, но не во всех направлениях, так как величина угла $\varphi(x)$

между крайними векторами $\dot{x}^{\mathrm{R}}(x)$ и $\dot{x}^{\mathrm{L}}(x)$ пучка $\Pi(x)$, совпадающего с $F(x)$, не превосходит π. Ситуация 3 подразделяется на две: а) точка $\dot{O}(x)$ совпадает с одной из вершин $F(x)$, т. е. является угловой точкой границы: $\dot{O}(x) \in \operatorname{extr} \partial F(x)$, при этом $\varphi(x) = \pi/2$; б) точка $\dot{O}(x)$ совпадает с внутренней точкой какой-то стороны прямоугольника $F(x)$, т. е. $\dot{O}(x) \in \operatorname{int} \partial F(x)$, при этом $\varphi(x) = \pi$. В ситуации 3 также имеются фазовые точки x и граничные значения $a_{ij}^{\mp}$ $(i, j = 1, 2)$, для которых прямоугольник $F(x)$ может выродиться в отрезок на оси $\dot{O}\dot{X}_1$ или $\dot{O}\dot{X}_2$, содержащий точку $\dot{O}(x)$.

Рассмотрим определитель $\sigma(x)$, столбцами которого являются крайние векторы $\dot{x}^{\mathrm{R}}(x)$ и $\dot{x}^{\mathrm{L}}(x)$ пучка $\Pi(x)$:

$$\sigma(x) = \det(\dot{x}^{\mathrm{R}}, \dot{x}^{\mathrm{L}}) = \|\dot{x}^{\mathrm{R}}\| \, \|\dot{x}^{\mathrm{L}}\| \sin \varphi(x), \quad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \pi.$$

Введём определение особой точки, сходное с определением в [1].

Определение 2. Точка $x \in \mathbb{R}^2$ называется особой, если $\dot{O}(x) \in F(x)$ или $\sigma(x) = 0$ в случае $\dot{O}(x) \notin F(x)$.

Основными видами особых множеств являются область свободных движений D, множества относительного и абсолютного равновесия, инвариантное многообразие [2]. Открытая область свободных движений D состоит из особых точек вида 1, $\dot{O}(x) \in \operatorname{int} F(x)$. Множество относительного равновесия образуют точки, для которых существуют такие допустимые управления, при которых вектор фазовой скорости становится нулевым. К ним относятся и сама область D, и её граница ∂D, состоящая из особых точек вида 3, $\dot{O}(x) \in \partial F(x)$. Множество абсолютного равновесия образуют точки x, из которых невозможно выйти под действием допустимых управлений, что имеет место только в случае, когда $F(x) = \{\dot{O}(x)\}$. Начало координат является очевидной точкой абсолютного равновесия билинейной системы. Инвариантным называется такое множество точек в фазовом пространстве, попав в которое, изображающая точка системы далее в нём и остаётся. Фазовые точки вида 2, $\dot{O}(x) \notin F(x)$, в случае вырождения прямоугольника $F(x)$ также могут образовывать особую прямую — общую изоклину.

Зависимость динамических свойств системы от наличия особых множеств на её фазовом портрете поясняют следующие утверждения. Если билинейная система (1), (2) имеет множество абсолютного равновесия, отличное от начала координат, то она не может быть ни колебательной, ни абсолютно устойчивой, ни полностью неустойчивой, ни вполне управляемой. Если на фазовом портрете системы (1), (2) имеется инвариантное многообразие, то она не может быть ни колебательной, ни вполне управляемой. В [4] получено, что критерий абсолютной неколебательности билинейной системы (1), (2) имеет вид

$$\min_{A \in P} \mathrm{D}(A) \geqslant 0 \iff P = P^{+}.$$

Установлено также, что данное условие служит одновременно и критерием существования инвариантного многообразия на фазовом портрете системы (1), (2), которым является пучок собственных прямых, соответствующих при каждой матрице $A \in P$ её большему собственному значению. Тем самым доказано, что абсолютно неколебательные билинейные системы (1), (2) не являются вполне управляемыми. Наличие на фазовом портрете множества относительного равновесия означает, что такая система не может быть ни абсолютно устойчивой, ни полностью неустойчивой, а абсолютно неколебательная не может быть ещё и вполне управляемой. Это относится, в частности, к системам D-класса. Ниже будет показано, что критерием полной управляемости билинейной системы (1), (2) D-класса служит её принадлежность к классу колебательных, когда $P^- \neq \varnothing$, $P^+ \neq \varnothing$.

Наличие или отсутствие особых множеств у билинейной системы (1), (2) определяется расположением на фазовой плоскости пучков L_i $(i = 1, 2)$ прямых, на которых обращаются в нуль производные $\dot{x}_i = l_i(q_i, x) = \langle q_i, x\rangle$ i-х компонент решений $x_A(x^0, t)$ стационарных систем $\dot{x} = Ax$, $A \in P$. Угловые размеры и положения пучков L_1, L_2 однозначно определены размерами и положением в плоскостях $Oa_{11}a_{12}$, $Oa_{21}a_{22}$ прямоугольников Q_1, Q_2 и связанных с ними пучков векторов $\{q_1\}$, $\{q_2\}$. Характерное дифференциально-геометрическое свойство пучков L_i $(i = 1, 2)$ поясняет следующее утверждение, справедливое как для семейства стационарных систем $\dot{x} = Ax$, $A \in P$, так и для совокупности нестационарных систем (1), (2).

Утверждение. Пучок L_i $(i = 1, 2)$ представляет собой область, где билинейная функция $l_i(q_i, x) = \langle q_i, x\rangle$, $q_i \in Q_i$, $x \in \mathbb{R}^2$, которая равна производной $\dot{x}_i$ i-й компоненты решения системы семейства $\dot{x} = Ax$, $A \in P$, может обращаться в нуль. Внутри пучка функция может принимать значения любого знака. Вне пучка L_i производная $\dot{x}_i = \langle q_i, x\rangle$ является знакоопределённой функцией, принимающей с разных его сторон значения противоположных знаков, причём $\dot{x}_i > 0$ с той стороны, где расположен пучок $\{q_i\}$ нормальных векторов, и $\dot{x}_i < 0$ с противоположной стороны. На граничных прямых $l_i^{\pm}$ пучка L_i производная $\dot{x}_i$ является знакопостоянной.

На этом утверждении основана следующая лемма.

Лемма 1. *Билинейная система* (1), (2) *имеет множество относительного равновесия* (*область свободных движений* D) *в том и только в том случае, если пучки L_1 и L_2 имеют общие прямые* (*общие сектора*). *Множеством относительного равновесия* (*областью свободных движений* D) *являются эти общие прямые* (*общие сектора, при этом* $\mathrm{D} = \mathrm{int}\{L_1 \cap L_2\}$).

Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Прямая l, проходящая через начало координат, является множеством относительного равновесия билинейной системы* (1), (2), *которое состоит из особых точек вида* 3а, $\dot{O}(x) \in \mathrm{extr}\,\partial F(x)$ (*вида* 3б, $\dot{O}(x) \in \mathrm{int}\,\partial F(x)$), *в том и только в том случае, если граничная прямая пучка L_1 совпадает с граничной прямой пучка L_2 и с прямой l* (*если граничная прямая одного из пучков находится внутри другого пучка и совпадает с прямой l*).

Отметим также, что если билинейная система (1), (2) D-класса абсолютно неколебательна ($P = P^{+}$), то она не является вполне управляемой, но в каждом из двух открытых секторов двусвязной области свободных движений $\mathrm{D} = \mathrm{int}\{L_1 \cap L_2\}$ определение полной управляемости выполняется.

Если $0 \in Q_1$ $(0 \in Q_2)$, то пучок L_1 (L_2) заполняет всю фазовую плоскость, а каждый из открытых секторов второго пучка L_2 (L_1) согласно лемме 1 представляет собой связную область свободных движений. Если $0 \in Q_1$ и $0 \in Q_2$, то каждый из пучков L_1, L_2 заполняет собой всю фазовую плоскость, которая в данном случае является областью свободных движений D, естественно без нулевой точки. В этом случае билинейная система (1), (2) является вполне управляемой и не может быть ни абсолютно устойчивой, ни полностью неустойчивой. Поэтому в дальнейшем полагаем, что $0 \notin Q_1$ и $0 \notin Q_2$.

Если $0 \notin Q_i$ $(i = 1, 2)$, то у пучка $\{q_i\}$ имеются крайний правый и крайний левый векторы q_i^{-} и q_i^{+}, которые являются опорными для прямоугольника Q_i. Они проходят через две противоположные (смежные) вершины прямоугольника Q_i, если он целиком расположен в каком-то одном квадранте (двух квадрантах). Эти две вершины, а следовательно, и соответствующие крайние векторы $q_i^{\pm}$ пучка $\{q_i\}$ однозначно определены граничными значениями $a_{ij}^{\mp}$ $(i, j = 1, 2)$. Уравнения граничных прямых $l_i^{\pm}$ пучков L_1 и L_2 также однозначно определены и имеют вид $\langle q_i^{\pm}, x\rangle = 0$. Каждому пучку $\{q_i\}$ поставим в соответствие определитель

$$\nabla_i = |q_i^{-}, q_i^{+}| = \|q_i^{-}\|\,\|q_i^{+}\| \sin\theta_i,$$

где угол θ_i отсчитывается в положительном направлении от первого вектора q_i^{-} ко второму вектору q_i^{+}, т. е.

$$0 \leqslant \theta_i < \pi \iff \sin\theta_i \geqslant 0 \iff \nabla_i \geqslant 0.$$

Возможны только следующие два случая. В первом хотя бы один из прямоугольников Q_i $(i \in \{1, 2\})$ вырождается в точку плоскости $Oa_{i1}a_{i2}$ или в отрезок на полуоси Oa_{i1} или Oa_{i2}, т. е. соответствующий пучок $\{q_i\}$ складывается, а его крайние векторы q_i^{-}, q_i^{+} становятся сонаправленными, и $\nabla_i = 0$. Пучок L_i при этом также вырождается в прямую, ортогональную векторам q_i^{-}, q_i^{+}. Не допускается вырождение обоих прямоугольников Q_1 и Q_2 в точки, так как при этом матрица $A(t)$ постоянна. Второй случай характеризуется условиями $\nabla_1 > 0$ и $\nabla_2 > 0$.

4. Критерии видов особых множеств

В первом случае ($\nabla_1 = 0$ или $\nabla_2 = 0$), рассмотрев всевозможные допустимые случаи вырождения прямоугольников Q_1 и Q_2, нетрудно получить критерии наличия на фазовом портрете билинейной системы (1), (2) следующих видов особых множеств.

Теорема 1.

1. *Билинейная система* (1), (2) *имеет отличное от нулевой точки множество абсолютного равновесия, которым может быть только координатная ось* OX_1 (OX_2), *в том и только в том случае, если первый* (*второй*) *столбец матрицы* $A(t)$ *является нулевым.*
2. *Координатная ось* OX_1 (OX_2) *представляет собой инвариантное многообразие билинейной системы* (1), (2) *тогда и только тогда, когда* $a_{21}(t) \equiv 0$ ($a_{12}(t) \equiv 0$).
3. *Координатная ось* OX_1 (OX_2) *является множеством относительного равновесия, если и только если* $a_{11}(t) \equiv 0$, $a_{21}^{-}a_{21}^{+} \leqslant 0$ ($a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}^{-}a_{12}^{+} \leqslant 0$), *при этом крайние векторы* $\dot{x}^{\mathrm{R}}(x)$ *и* $\dot{x}^{\mathrm{L}}(x)$ *пучка* $\Pi(x)$ *ортогональны к оси* OX_1 (OX_2) *и являются противоположно направленными, если* $a_{21}^{-}a_{21}^{+} < 0$ ($a_{12}^{-}a_{12}^{+} < 0$), *если же* $a_{21}^{-}a_{21}^{+} = 0$ ($a_{12}^{-}a_{12}^{+} = 0$), *то один из них становится нулевым.*
4. *Координатная ось* OX_1 (OX_2) *является ортогонально пересекаемой общей изоклиной в том и только в том случае, если* $a_{11}(t) \equiv 0$, $a_{21}^{-}a_{21}^{+} > 0$ ($a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}^{-}a_{12}^{+} > 0$). *Координатная ось* OX_1 (OX_2) *является неортогонально пересекаемой общей изоклиной в том и только в том случае, если первый* (*второй*) *столбец матрицы* $A(t)$ *является постоянным, а его элементы отличны от нуля*: $a_{11} \equiv a_{11}^{0}$, $a_{21} \equiv a_{21}^{0}$ ($a_{12} \equiv a_{12}^{0}$, $a_{22} \equiv a_{22}^{0}$); *угловой коэффициент наклона общей касательной к изоклине* OX_1 (OX_2) *при этом равен* a_{21}^{0}/a_{11}^{0} (a_{22}^{0}/a_{12}^{0}).
5. *Некоторая прямая* l^0, *проходящая через начало координат, является общей изоклиной с вертикальной* (*горизонтальной*) *касательной в том и только в том случае, если первая* (*вторая*) *строка матрицы* $A(t)$ *является постоянной, а её элементы отличны от нуля*: $a_{11}(t) \equiv a_{11}^{0}$, $a_{12}(t) \equiv a_{12}^{0}$ ($a_{21}(t) \equiv a_{21}^{0}$, $a_{22}(t) \equiv a_{22}^{0}$). *Уравнение прямой* l^0 *имеет вид* $\langle q_1^0, x\rangle = 0$ ($\langle q_2^0, x\rangle = 0$), *где* $q_1^0 = (a_{11}^{0}, a_{12}^{0})^{\top}$ ($q_2^0 = (a_{21}^{0}, a_{22}^{0})^{\top}$).

Общие изоклины являются простейшими особыми множествами, их наличие на фазовом портрете не вносит существенных изменений в его структуру и не приводит к очевидным или простым решениям задач об устойчивости и управляемости.

Замечание. Если выполнено условие 2 теоремы 1, $a_{21}(t) \equiv 0$ ($a_{12}(t) \equiv 0$), $x \in OX_1$ ($x \in OX_2$), то в задачах оптимального управления о минимизации на траекториях билинейной системы (1), (2) терминального функционала $J(x(T))$ имеются особые режимы [3], т. е. особые управления и соответствующие им особые траектории. Действительно, при движении по инвариантному многообразию — координатной оси OX_1 (OX_2) — гамильтониан задачи имеет вид $H = a_{11}p_1x_1$ ($H = a_{22}p_2x_2$), где p_1, p_2 — сопряжённые переменные, т. е. не зависит от элементов 2-го (1-го) столбца матрицы управлений $A(\cdot) \in \Omega$. Особой траекторией является инвариантное многообразие OX_1 (OX_2), а особым управлением — матрица $A^{*}(\cdot) \in \Omega$, где $a_{21}^{*}(\cdot) \equiv 0$ ($a_{12}^{*}(\cdot) \equiv 0$), $a_{12}^{*}(\cdot)$, $a_{22}^{*}(\cdot)$

$(a_{11}^*(\cdot),\ a_{21}^*(\cdot))$ — произвольные допустимые функции, а функция $a_{11}^*(\cdot)$ $(a_{22}^*(\cdot))$ определяется в процессе решения конкретной задачи оптимального управления. Этот результат следует также из [1], так как при выполнении условия 2 теоремы 1 пучок допустимых фазовых скоростей $\Pi(x)$ вырождается и все его векторы коллинеарны.

Во втором случае, когда $\nabla_1 > 0$, $\nabla_2 > 0$, ни один из пучков $\{q_1\}$, $\{q_2\}$ не вырождается. Из крайних векторов $q_1^{\mp}$, $q_2^{\mp}$ разных пучков $\{q_1\}$, $\{q_2\}$ можно составить четыре определителя:

$$\Delta_1 = |q_1^-, q_2^-| = \det A_k, \qquad \Delta_2 = |q_1^-, q_2^+| = \det A_m,$$
$$\Delta_3 = |q_1^+, q_2^-| = \det A_n, \qquad \Delta_4 = |q_1^+, q_2^+| = \det A_s,$$

здесь

$$\Delta_i = |q_1^{\mp}, q_2^{\mp}| = \|q_1^{\mp}\|\,\|q_2^{\mp}\| \sin\psi_i \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

углы ψ_i отсчитываются в положительном направлении от первого вектора $q_1^{\mp}$ ко второму вектору $q_2^{\mp}$, т. е. $0 \leqslant \psi_i < 2\pi$; матрицы A_k, A_m, A_n, A_s $(k, m, n, s \in \in \{1, \ldots, 16\})$ и их определители Δ_i однозначно определены положением прямоугольников Q_1 и Q_2 в плоскостях $Oa_{11}a_{12}$ и $Oa_{21}a_{22}$.

Рассмотрим всевозможные положения прямоугольника Q_2 и связанного с ним пучка векторов $\{q_2\}$ по отношению к пучку прямых, проходящих через начало координат и точки другого прямоугольника Q_1. Напомним, что направляющими для этих прямых служат векторы пучка $\{q_1\}$. Анализируя изменения знаков определителей Δ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ при всевозможных изменениях положений и размеров прямоугольников Q_1 и Q_2, получим утверждение, регламентирующее взаимное расположение пучков L_1 и L_2.

Лемма 2. *Пусть* $0 \notin Q_1$, $0 \notin Q_2$, $\nabla_1 > 0$, $\nabla_2 > 0$. *Для того чтобы пучки прямых* L_1 *и* L_2 *имели одно из следующих расположений*:

1) *были отделены друг от друга,*
2) *касались внешним образом с одной стороны* (*с обеих сторон*),
3) *имели общие сектора,*
4) *касались внутренним образом* (*совпадали*),
5) *один пучок находился внутри другого, т. е.* $L_1 \subset \operatorname{int} L_2$ $(L_2 \subset \operatorname{int} L_1)$,

необходимо и достаточно выполнение соответствующего условия:

1) *три определителя* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *или* Δ_2, Δ_3, Δ_4 *отличны от нуля и имеют один знак,*
2) $\Delta_2 = 0$ *или* $\Delta_3 = 0$ $(\Delta_2 = 0$ *или* $\Delta_3 = 0)$, *остальные определители имеют один знак,*
3) *среди определителей* $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ *есть два с противоположными знаками,*
4) $\Delta_1 = 0$ *или* $\Delta_4 = 0$ $(\Delta_1 = 0$ *или* $\Delta_4 = 0)$,
5) $\operatorname{sign}\Delta_1 = -\operatorname{sign}\Delta_3$, $\operatorname{sign}\Delta_2 = -\operatorname{sign}\Delta_4$, *при этом* $\operatorname{sign}\Delta_1 = \operatorname{sign}\Delta_2$ $(\operatorname{sign}\Delta_1 = -\operatorname{sign}\Delta_2)$.

Результатам леммы 2 можно дать геометрическую иллюстрацию. Если параллелепипед P не пересекается конусом $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, т. е. расположен либо снаружи конуса, либо внутри одной из его полостей (пересекается конусом), то $\det A$ является знакоопределённой (знакопеременной) в P функцией матрицы A. Следовательно, семейство систем линейных алгебраических уравнений $\{Ax = 0,\ A \in P\}$ не имеет (имеет) нетривиальные решения. А так как геометрической иллюстрацией решений первого или второго уравнения семейства $\{Ax = 0,\ A \in P\}$ является пучок L_1 или L_2, то сказанное означает, что пучки L_1 и L_2 не имеют общих секторов (имеют общие сектора). Если параллелепипед P касается конуса $\det A = 0$ изнутри или снаружи одной или несколькими вершинами, то $\det A$ является знакопостоянной в P функцией и обращается в нуль в соответствующей вершине или в нескольких вершинах параллелепипеда P. Тогда пучки L_1 и L_2 внутренним или внешним образом касаются друг друга одной или обеими своими граничными прямыми. Результаты леммы 2 позволяют представить в конструктивной форме критерии существования некоторых видов особых множеств.

Теорема 2. *Граничная прямая пучка L_1 или L_2 представляет собой множество относительного равновесия билинейной системы* (1), (2), *состоящее из особых точек вида* 3а, $\dot{O}(x) \in \operatorname{extr} \partial F(x)$ (*вида* 3б, $\dot{O}(x) \in \operatorname{int} \partial F(x)$), *в том и только в том случае, если хотя бы один из определителей $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ равен нулю* (*если среди определителей $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ есть два с противоположными знаками, но хотя бы один определитель Δ_1 или Δ_4 не равен нулю*).

Из лемм 1, 2 и их геометрических иллюстраций следует также критерий, выделяющий D-класс билинейных систем (1), (2), т. е. систем, имеющих область свободных движений.

Теорема 3. *Билинейная система* (1), (2) *имеет область свободных движений* D *в том и только в том случае, если* $\det A$ *является знакопеременной в P функцией.*

Билинейные системы (1), (2), не принадлежащие D-классу, делятся на два подкласса:

$$\min_{A \in P} \det A \geqslant 0, \quad \max_{A \in P} \det A \leqslant 0.$$

Выделяющие их критерии получаются аналогично доказательству леммы 2 с использованием определителей Δ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ и формулируются следующим образом.

Функция $\det A$ при $A \in P$ является неотрицательной (положительной) в том и только в том случае, если

$$\Delta_1 \geqslant 0, \quad \Delta_2 \geqslant 0, \quad \Delta_3 \geqslant 0 \quad (\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0).$$

Функция $\det A$ при $A \in P$ является неположительной (отрицательной) в том и только в том случае, если

$$\Delta_1 \leqslant 0, \quad \Delta_2 \leqslant 0, \quad \Delta_3 \leqslant 0 \quad (\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 < 0, \quad \Delta_3 < 0).$$

5. Основные утверждения

Рассмотрим билинейную систему (1), (2), удовлетворяющую условию

$$\min_{A \in P} \det A < 0.$$

К такому типу относятся билинейные системы (1), (2), у которых функция $\det A$, $A \in P$, является либо отрицательной, либо неположительной, либо знакопеременной. Из приведённых выше критериев знакопостоянства в P функции $\det A$ следует, что

$$\min_{A \in P} \det A < 0 \iff \{(\Delta_2 < 0) \cup (\Delta_3 > 0)\}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Билинейная система* (1), (2), *удовлетворяющая условию* (3), *не является ни абсолютно устойчивой, ни полностью неустойчивой. Для полной управляемости такой системы необходимо и достаточно, чтобы она была колебательной.*

Доказательство леммы 3 приведено в приложении. Из лемм 1, 2 и теоремы 3 следует, что билинейная система (1), (2) D-класса удовлетворяет условию (3) леммы 3. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Для полной управляемости билинейной системы* (1), (2) D*-класса необходимо и достаточно, чтобы она была колебательной, т. е.* $P^- \neq \varnothing$, $P^+ \neq \varnothing$.

Ранее уже отмечалось, что билинейная система (1), (2) D-класса не может быть ни абсолютно устойчивой, ни полностью неустойчивой.

Теперь рассмотрим билинейную систему (1), (2) одного из подклассов, не принадлежащих D-классу, а именно удовлетворяющую условию

$$\max_{A \in P} \det A \leqslant 0 \iff (\Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \leqslant 0,\ \Delta_3 \leqslant 0). \tag{4}$$

Билинейная система (1), (2) в условиях (4) абсолютно неколебательна, так как в силу равенства $D(A) = \operatorname{tr}^2 A - 4 \det A$ имеем

$$\max_{A \in P} \det A \leqslant 0 \iff \min_{A \in P} D(A) \geqslant 0 \iff P = P^+.$$

Учитывая лемму 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Билинейная система* (1), (2), *удовлетворяющая условию* (4), *не является ни абсолютно устойчивой, ни полностью неустойчивой, ни вполне управляемой.*

Представленная классификация особых множеств билинейной системы (1), (2) и полученные в теоремах 1—3 конструктивные критерии наличия на фазовом портрете системы некоторых из них позволили найти условия, при которых решения вопросов устойчивости, неустойчивости и управляемости либо очевидны, либо достаточно просты. Установлено, что все ситуации, когда это имеет место, являются частными случаями выполнения условия (3). Противоположным ему является условие

$$\min_{A\in P}\det A \geqslant 0 \iff (\Delta_1 \geqslant 0,\ \Delta_2 \geqslant 0,\ \Delta_3 \geqslant 0). \tag{5}$$

Геометрический смысл условия (5) состоит в том, что кратчайший поворот от векторов пучка $\{q_1\}$ к векторам пучка $\{q_2\}$ происходит в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, а угол поворота не превосходит π. В случае строгих неравенств в условии (5) пучки L_1 и L_2 не имеют общих прямых, т. е. разделены. Если $\Delta_2 = 0$ $(\Delta_3 = 0)$ $[\Delta_2 = \Delta_3 = 0]$, то пучки L_1 и L_2 касаются внешним образом вдоль совпавших граничных прямых $l_1^- = l_2^+$ $(l_1^+ = l_2^-)$ $[l_1^- = l_2^+,\ l_1^+ = l_2^-]$. При этом совпавшие граничные прямые представляют собой множество относительного равновесия. Поэтому задача о полной управляемости содержательна для билинейной системы (1), (2), удовлетворяющей условию (5), а задачи абсолютной устойчивости и полной неустойчивости содержательны при выполнении в условии (5) строгих неравенств.

6. Приложение

Доказательство леммы 3. Из условия (3) следует, что $P^+ = \{A\colon D(A) \geqslant 0,\ A \in P\} \neq \varnothing$. Пусть $\hat{A} \in P^+$, $D(A) > 0$, $\det \hat{A} < 0$, тогда особой точкой стационарной системы $\dot{x} = \hat{A}x$ является седло, а фазовыми траекториями системы служат гиперболы и их асимптоты, представляющие собой собственные прямые матрицы $\hat{A}$. По одной из них изображающая точка стремится в начало координат, а по другой уходит в бесконечность. Это доказывает первую часть леммы 3.

Необходимость условия второй части леммы 3 следует из того, что абсолютно неколебательная $(P = P^+)$ билинейная система (1), (2) не является вполне управляемой.

Докажем достаточность. Если билинейная система (1), (2) колебательна $(P^- \neq \varnothing,\ P^+ \neq \varnothing)$, то при $A^* \in P^-$ фазовые траектории стационарной системы $\dot{x} = A^*x$, $x(0) = x^0$ и системы $x' = -A^*x$, $x(0) = x^1$, полученной из неё обращением времени $\tau = -t$, исходящие из произвольных ненулевых точек x^0 и x^1, являются осциллирующими. Они пересекают обе собственные прямые матрицы $\hat{A}$. С траектории $x(x^0, A^*, t)$ на траекторию $\tilde{x}(x^1, A^*, \tau)$ изображающая точка билинейной системы (1), (2) может быть переведена по подходящей собственной прямой матрицы $\hat{A}$ посредством управления $A(t) \equiv \hat{A}$. Если в момент t^* её встречи с траекторией $\tilde{x}(x^1, A^*, \tau)$ вторично произвести переключение, снова полагая $A(t) \equiv A^*$ при $t \geqslant t^*$, то траектория системы $\dot{x} = A^*x$, исходящая из точки встречи $x^* = x(t^*)$, проходит через x^1. Следовательно, две любые точки $x^0 \neq 0$ и $x^1 \neq 0$ могут быть соединены управляемым переходом $x^0 \to x^1$ за конечное время. Лемма 3 доказана.

Литература

[1] Бабичев А. В., Бутковский А. Г., Лепе Н. Л. Особые множества на фазовых портретах динамических систем с управлением. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 5. — С. 24—31; № 7. — С. 48—54.

[2] Бутковский А. Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. — М.: Наука, 1985.

[3] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.

[4] Жермоленко В. Н. Колебательность двумерных билинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 2005. — В печати.

[5] Молчанов А. П., Пятницкий Е. С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем. II // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 4. — С. 5—14.

[6] Филиппов А. Ф. Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 8. — С. 48—55.