Наблюдаемость по угловым измерениям и гладкость границы области достижимости

Ю. В. БОЛОТИН, С. Н. МОРГУНОВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 62-50

Ключевые слова: угловые измерения, наблюдаемость, область достижимости.

Аннотация

Область достижимости линейных управляемых систем может иметь как гладкую, так и негладкую границу. В литературе известно несколько подходов к классификации систем с точки зрения гладкости указанной границы. В частности, в работах А. И. Овсиевича в случае гладкого ограничивающего множества управлений выявлена связь гладкости границы со сферической наблюдаемостью сопряжённой системы. В данной работе эти результаты обобщаются для специального класса негладких ограничивающих множеств управлений. При этом понятие сферической наблюдаемости сопряжённой системы обобщается на случай нескольких угловых измерений.

Abstract

Yu. V. Bolotin, S. N. Morgunova, Observability with bearing-only observations and smoothness of attainable set, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 8, pp. 119—130.

The attainable set of a linear control system can have both smooth and not smooth boundary. This smoothness property is known to be used to classify such systems. One approach, suggested by A. I. Ovseevich in the case of a smooth control set, is based on connecting smoothness of the attainable set with spherical observability of the dual system. This paper generalizes these results to a case of nonsmooth control sets. The corresponding property of spherical observability notion can be treated as observability with several bearing-only observations.

1. Введение

В навигации часто исследуется задача оценивания траекторий $\mathbf{r}_{\mathrm{v}}(t) \in \mathbb{R}^3$ движущихся объектов в трёхмерном пространстве по угловым измерениям с борта наблюдателя, движущегося по траектории $\mathbf{r}_{\mathrm{o}}(t)$. Угловые измерения классической радиолокационной станции (РЛС) с подвижной антенной обычно записываются в следующем виде [9]:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \delta\phi, \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\right) + \delta\theta. \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 8, с. 119—130.

Здесь r_1, r_2, r_3 — компоненты вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\mathrm{v} - \mathbf{r}_\mathrm{o}$ относительных координат, ϕ — азимут цели, θ — её возвышение, $\delta\phi$, $\delta\theta$ — ошибки измерений.

Задача наблюдаемости для такой системы в предположении, что движение цели описывается уравнением $\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{v}(t) \equiv 0$, рассматривалась многими авторами. В [12] в плоском случае получены необходимые и достаточные условия наблюдаемости. Эти условия в [4] обобщены на трёхмерный случай и произвольное уравнение авторегрессии, описывающее динамику объекта $\sum\limits_k a_k d^k/dt^k \mathbf{r}_\mathrm{v}(t) \equiv 0$.

Для РЛС с фазированной решёткой, или для оптического матричного датчика, угловые измерения естественнее записать в виде

$$\phi_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{r_1}{r_3}\right) + \delta\phi_1, \quad \phi_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{r_2}{r_3}\right) + \delta\phi_2. \tag{2}$$

Здесь z_3 — компонента $\mathbf{r}$ перпендикулярно плоскости антенны, z_1, z_2 — компоненты $\mathbf{r}$ в её плоскости. Эти измерения можно рассматривать как точки единичных окружностей в плоскостях $z_l = (r_l, r_3) \in \mathbb{R}^2$, $l = 1, 2$, или как классы эквивалентности всех $z'_l = \lambda z_l$, $\lambda > 0$.

Обобщая задачу (2), можно рассматривать сферические и проективные измерения в случае, когда z_l, $l = 1, \ldots, L$, принадлежат евклидовым пространствам произвольной размерности $m_l \geqslant 0$. В этом случае можно считать, что угловое измерение принадлежит единичной сфере размерности $m_l - 1$. Следуя [7], будем называть такие измерения сферическими. Следуя [9], будем рассматривать также классы эквивалентности с произвольным знаком $\lambda \neq 0$. Такие измерения называются модифицированными угловыми или проективными измерениями.

Пусть динамика движения описывается произвольным линейным дифференциальным уравнением. Траектория называется сферически (проективно) наблюдаемой, если её можно определить по сферическим (проективным) измерениям с точностью до сферической (проективной) эквивалентности.

Данные определения для случая $L = 1$ введены в [7]. Для случая $L > 1$ оно, возможно, вводится здесь впервые. Цель двоякая: с одной стороны, исследовать наблюдаемость по измерениям РЛС с фазированной решёткой, а с другой стороны, получить геометрический критерий гладкости границы области достижимости.

Хорошо известно, что область достижимости линейных управляемых систем (область, куда можно попасть из нуля за заданное время) может иметь как гладкую, так и негладкую границу [6]. В литературе известно много подходов к проведению классификации систем с точки зрения гладкости указанной границы (см. [8]). В [7] выявлена связь гладкости границы со сферической наблюдаемостью сопряжённой системы в случае гладкого ограничивающего множества управлений.

В данной работе результаты [7] обобщаются для специального класса негладких ограничивающих множеств управлений. Показано, что в предположении нормальности условия сферической и проективной наблюдаемости практически тождественны гладкости границы области достижимости двойственной системы.

1.1. Условия проективной и сферической наблюдаемости

Пусть движение линейной динамической системы G в n-мерном пространстве $X \ni x$ с L m_l-мерными линейными измерениями $z_l \in \mathbb{Z}^{m_l}$, $l = 1, \dots, L$, описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax, \quad z_1 = C_1 x, \dots, \quad z_L = C_L x. \tag{3}$$

Здесь A, C_l есть соответственно постоянные матрицы размера $n \times n$, $m_l \times n$. Рассматривается множество траекторий $x(t) \in X_T = X \times [0, T]$. Система называется линейно наблюдаемой, если по зависимости $z_l(t) \in \mathbb{Z}_T^{m_l}$ однозначно восстанавливается $x(t) \in X_T$.

Определение 1. Вектор-функции $z_l'(t)$, $z_l''(t)$ ($l = 1, \dots, L$) сферически (проективно) эквивалентны на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, если существуют такие вещественные функции $\mu_l(t) > 0$ ($\mu_l(t) \neq 0$), что $z_l''(t) \equiv \mu_l(t) z_l'(t)$. Система (3) сферически (проективно) наблюдаема на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, если для любых траекторий $x'(t)$, $x''(t)$ сферическая (проективная) эквивалентность измерений $z_l'(t)$, $z_l''(t)$ влечёт сферическую (проективную) эквивалентность траекторий.

Предложение 1. *Из сферической ненаблюдаемости следует проективная.*

Доказательство. Пусть существуют сферически неэквивалентные траектории $x'(t)$, $x''(t)$ со сферически эквивалентными измерениями. Тогда существуют такие функции $\mu_l(t) > 0$, что $z_l''(t) \equiv \mu_l(t) z_l'(t)$. Если система проективно наблюдаема, то отсюда следует, что $x''(t) = \lambda(t) x'(t)$ для некоторой функции $\lambda(t) \not\equiv 0$. Последнее возможно только если либо $z''(t) \equiv 0$ (и тогда система линейно ненаблюдаема), либо $\mu_l(t) \equiv \lambda(t)$ (и тогда траектории сферически эквивалентны). В обоих случаях система сферически ненаблюдаема.

Предложение 2. *Из проективной ненаблюдаемости следует сферическая ненаблюдаемость при достаточно малых $T > 0$.*

Доказательство. Пусть система проективно ненаблюдаема. Тогда существуют такие проективно неэквивалентные траектории $x'(t)$, $x''(t)$ и функции $\mu_l(t) \not\equiv 0$, что $z_l''(t) \equiv \mu_l(t) z_l'(t)$. Очевидно, $\mu_l(t)$ аналитическая и гладкая почти всюду. Потому существует интервал длины T, на котором $\mu_l(t)$ строго сохраняет знак. Заменив, если требуется, $x'(t)$ на $-x'(t)$, можно считать, что $\mu_l(t) > 0$. Если система сферически наблюдаема на отрезке длины T, отсюда получаем $x''(t) \equiv \mu_l(t) x'(t)$, что противоречит проективной ненаблюдаемости.

Заметим также, что имеет смысл также понятие комплексной проективной наблюдаемости, где $\mu(t)$, $\lambda(t)$ принимают комплексные значения. Вещественная и комплексная проективная наблюдаемость не всегда эквивалентны.

Сначала рассмотрим условия, при которых несколько проективных измерений $z_1, \dots, z_L$ сводятся к одному $z = Cx$. При этом понадобится следующая конструкция. Определим для каждой матрицы C_l линейный оператор $\tilde{C}_l$, действующий в пространстве кососимметрических $(m_l \times m_l)$-матриц, формулой $\tilde{C}_l \Omega = C_l \Omega C_l^T$.

Предложение 3. *Пусть для некоторой матрицы C выполнено равенство*

$$\bigcap_l \operatorname{Ker} \tilde{C}_l = \operatorname{Ker} \tilde{C}.$$

Тогда проективные измерения $z_1, \ldots, z_L$ эквивалентны одному проективному измерению $z = Cx$.

Пример. В случае угловых наблюдений (2) измерениям z_1, z_2 отвечают матрицы

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта пара проективных измерений эквивалентна одному проективному измерению z с матрицей $C = I$.

Рассмотрим особо интересующий нас случай механических систем с фазовыми переменными $x = (q, \dot{q})$, где $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$, $k = n/2$, — обобщённые координаты [2] вида

$$\ddot{q} + 2\Gamma\dot{q} + Kq = 0, \quad z_l = D_l q. \tag{4}$$

Здесь Γ — кососимметрическая матрица гироскопических сил, а K — симметрическая матрица жёсткостей.

Предложение 4. *Механическая система* (4), *удовлетворяющая условию*

$$\bigcap_l \operatorname{Ker} \tilde{D}_l = 0,$$

проективно ненаблюдаема, если и только если существует собственное подпространство $\mathcal{L}_\kappa$ матрицы $K - \Gamma^2$ с совпадающим собственным значением κ, инвариантное относительно вращения $\exp(\Gamma t)$, т. е. $\exp(\Gamma t)\mathcal{L}_\kappa \subset \mathcal{L}_\kappa$.

Для доказательства достаточно сослаться на аналогичное утверждение в [5], доказанное для случая $L = 1$, $D_1 = I$, и применить утверждение 3.

Перейдём к рассмотрению общей, не обязательно механической системы. Ограничимся комплексным случаем: вещественный значительно более сложен. Введём линейную систему $\tilde{G}$ с вектором состояния $\Omega \in \tilde{X}$ и векторами измерения $\Psi_l \in \tilde{Z}_l$, заданную формулами

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \tilde{A}\Omega, \qquad \tilde{A}\Omega \stackrel{\text{def}}{=} A\Omega + \Omega A^T, \\ \Psi_l &= \tilde{C}_l\Omega, \qquad \tilde{C}_l\Omega \stackrel{\text{def}}{=} C_l \Omega C_l^T. \end{aligned} \tag{5}$$

Система (3) называется Λ-наблюдаемой, если (5) линейно вполне наблюдаема [1]. Следующая теорема доказывается аналогично соответствующему результату при $L = 1$ (см. [5]).

Теорема 1. *Если система G вида* (3) *Λ-ненаблюдаема, то существует такая замена переменных $Fx = (q\ p\ w)$, что подпространство $V = \{w \equiv 0\}$ инвариантно относительно G, причём на V система проективно эквивалентна* *гамильтоновой системе*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad z_l = D_l q + E_l p, \quad l = 1, \ldots, L. \tag{6}$$

Более того, для каждого фиксированного l *система координат* p, q *в* V *может быть выбрана так, что* $E_l = 0$.

Таким образом, в определённом смысле вопрос о проективной наблюдаемости общей системы сводится к вопросу о проективной наблюдаемости механической (гамильтоновой) системы.

2. Сферическая наблюдаемость и гладкость границы области достижимости

2.1. Геометрия области достижимости

Рассмотрим общую линейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{L} B_i u_i. \tag{7}$$

Здесь x — n-мерный вектор состояния, $u = (u_1, \ldots, u_L)$ — управление. Размерность каждой из компонент u_i равна $m_i \geqslant 1$, множество допустимых значений u_i является строго выпуклым замкнутым множеством Ω_i с гладкой границей, содержащим внутреннюю точку $u_i = 0$. Таким образом, управление u принадлежит цилиндру $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_L$ в m-мерном пространстве, где $m = m_1 + \ldots + m_L$. Обозначим для краткости $B = (B_1, \ldots, B_L)$.

При сделанных предположениях существуют такие гладкие строго выпуклые однородные второй степени функции $\rho_i(u_i)$, что условие $u_i \in \Omega_i$ эквивалентно неравенству $\rho_i(u_i) \leqslant 1$. В качестве ρ_i можно взять, например,

$$\rho_i(u_i) = \frac{1}{\|v_{\max}\|^4} \max_{v \in \partial\Omega_i} (v^T u_i)^2.$$

Здесь $v_{\max}$ — то значение v, при котором достигается максимум в правой части. Подмножества $\mathcal{S}_i \in \Omega$, определённые условием $\rho_j = 1$, $j \neq i$, будем называть гранями границы $\partial\Omega$.

Пусть задано начальное состояние x_0 системы (7).

Определение 2. Для заданного интервала движения $0 \leqslant t \leqslant T$ (или, короче, для заданного конечного момента T) область достижимости $\mathcal{D}_T$ — множество точек, достижимых из x_0 на этом интервале.

Известно, что область достижимости замкнута и выпукла. Значит, в любой точке x границы $\partial\mathcal{D}_T$ существует опорная гиперплоскость $\Pi(x)$. Внешняя нормаль $\psi(x)$ к опорной гиперплоскости называется внешней нормалью к области достижимости. Если в точке x внешняя нормаль единственна, то граница в этой точке гладкая. Если нормаль единственна в каждой точке, то вся граница является гладкой. Мы будем изучать условия, когда гладкость границы нарушается, используя идеи [7], связывая их с условиями сферической наблюдаемости сопряжённой системы.

Введём в рассмотрение систему с вектором состояния ψ и измерениями η_i, функционально двойственную к (7):

$$\dot{\psi} = -A^T\psi, \quad \eta_i(t) = B_i^T\psi(t), \quad i = 1, \dots, L. \tag{8}$$

Эта система (линейно) вполне наблюдаема по $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_L)$, если и только если (7) вполне управляема. Для не вполне управляемых систем, у которых $\operatorname{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) < n$, размерность области достижимости меньше n, и её граница всегда негладкая в приведённом выше смысле. Поэтому ограничимся рассмотрением вполне управляемых и вполне наблюдаемых систем.

Определение 3. Задача управления, определённая уравнением (7), называется нормальной [6], если любые два управления $u'(t)$ и $u''(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, переводящие x_0 в одну и ту же граничную точку $\bar{x} \in \partial\mathcal{D}_T$, совпадают почти всюду.

Сформулируем принцип максимума (см. [6]) для задачи выхода на границу области достижимости. Для любого единичного вектора ω в пространстве состояний траектория, оптимизирующая функционал $-\omega^T x(T) \to \min$ (т. е. заканчивающаяся в точке с внешней нормалью ω), определяется как решение краевой задачи относительно тройки $(x(t), \psi(t), u_i(t))$: $x(0) = x_0$, $\psi(T) = \omega$,

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{L} B_i u_i, \quad \dot{\psi} = -A^T\psi, \tag{9}$$

$$u_i = \arg\max_{u_i}[\psi^T B_i u_i,\ \rho_i(u_i) \leqslant 1]. \tag{10}$$

Определим оптимальное управление. Решение задачи максимизации (10) определяется формулой

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\rho_i\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_i}\right)}}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_i}, \quad \eta_i = B_i^T\psi. \tag{11}$$

Здесь $\sigma_i(\eta_i)$ — функция, двойственная ρ_i по Лежандру, определённая формулой (в силу строгой выпуклости $\rho_i(\cdot)$ точка максимума определена однозначно)

$$\sigma_i(\eta_i) = \max_{u_i}[u_i^T\eta_i - \rho_i(u_i)].$$

В предположении строгой выпуклости $\rho_i(u_i)$ функция $\sigma_i(\eta_i)$ корректно определена и также строго выпукла. Кроме того, преобразование $\eta_i \leftrightarrow u_i$, заданное формулой (11), взаимно-однозначно.

Можно показать, что из нормальности следует вполне управляемость. Для нормальных систем область достижимости строго выпукла, а траектория выхода на заданную точку границы единственна. Для строго выпуклого множества $\mathcal{D}_T$

имеется однозначное соответствие между его внешними нормалями и граничными точками. Кроме того, в предположении нормальности условия принципа максимума являются необходимыми и достаточными условиями выхода траектории на границу области достижимости [6].

Имеет место следующее утверждение (см. [6]).

Предложение 5. *Задача* (7) *нормальна на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$, *если и только если для любого нетривиального решения* $\psi(t)$ *сопряжённой системы* (8) *из соотношения*

$$\psi^T(t)Bu'(t) \equiv \psi^T(t)Bu''(t) = \max_{u\in\Omega}[\psi^T(t)Bu], \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

следует, что $u'(t) \equiv u''(t)$ *почти всюду.*

Отсюда следует единственность траектории выхода на границу области достижимости.

Теорема 2. *В условиях нормальности граница области достижимости* $\partial\mathcal{D}_T$ *гладкая, если и только если система* (8) *сферически наблюдаема на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство.

1. Пусть $\partial\mathcal{D}_T$ негладкая. Покажем, что условие сферической наблюдаемости нарушается. В точке негладкости $\bar{x} \in \partial\mathcal{D}_T$ существуют две различные единичные внешние нормали ω', ω''. Рассмотрим две траектории $\psi'(t)$, $\psi''(t)$ системы (8) с граничными условиями на правом конце $\psi'(T) = \omega'$, $\psi''(T) = \omega''$. Эти траектории сферически неэквивалентны.

Введём в рассмотрение соответствующие измерения в системе (8) по формулам $\eta_i'(t) = B_i^T\psi'(t)$, $\eta_i''(t) = B_i^T\psi''(t)$ и определим управления в системе (7) по формуле (11):

$$u_i' = \frac{1}{\sqrt{\rho_i\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_i'}\right)}}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_i'}, \quad u_i'' = \frac{1}{\sqrt{\rho_i\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_i''}\right)}}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_i''}. \tag{12}$$

Пусть $x'(t)$, $x''(t)$ — соответствующие траектории с начальными условиями x_0. Очевидно, обе траектории удовлетворяют принципу максимума (9), (10) в смысле достижимости границы $\partial\mathcal{D}_T$. При этом ω', ω'' — внешние нормали в точках $x'(T)$, $x''(T)$ соответственно. Поскольку имеется однозначное соответствие между внешними нормалями и точками границы, отсюда следует, что $x'(T) = x''(T) = \bar{x}$. В силу условия нормальности совпадают и траектории, и соответствующие управления (12). Тогда в силу взаимной однозначности преобразования (12) $\eta_i'(t)$, $\eta_i''(t)$ сферически эквивалентны, что противоречит условию сферической наблюдаемости.

2. Пусть система (8) сферически ненаблюдаема, т. е. существуют сферически неэквивалентные решения $\psi'(t)$, $\psi''(t)$ со сферически эквивалентными измерениями $\eta_i'(t)$, $\eta_i''(t)$. Введём в рассмотрение управления $u_i'(t)$, $u_i''(t)$ по формулам (12) и соответствующие им траектории $x'(t)$, $x''(t)$ с нулевыми начальными условиями. Обе тройки $(x'(t), \psi'(t), u_i'(t))$, $(x''(t), \psi''(t), u_i''(t))$ удовлетворяют условиям

принципа максимума. С другой стороны, управления совпадают, а потому совпадают и траектории $x'(t)$, $x''(t)$. В силу принципа максимума $\psi'(T)$, $\psi''(T)$ — внешние нормали к области достижимости в точке $x'(T) = x''(T)$. Поэтому последняя точка — точка излома границы области достижимости. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если двойственная система* (8) *проективно ненаблюдаема, то область достижимости системы* (7) *всегда имеет излом при малых* T.

Доказательство. Действительно, тогда при малых T система сферически ненаблюдаема.

Следствие 2. *Для системы со скалярными управлениями* u_i, $i = 1, \ldots, L$, *область достижимости всегда имеет излом при малых* T.

Доказательство. Соответствующая двойственная система со скалярными измерениями проективно ненаблюдаема, т. е. сферически ненаблюдаема при малых T.

Рассмотрим подробнее геометрию границы области достижимости вблизи точки потери гладкости. В силу выпуклости, если ψ', ψ'' — две внешние нормали в точке $x \in \partial\mathcal{D}_T$, то любой вектор $\psi = (1-\mu)\psi' + \mu\psi''$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, также является внешней нормалью. Внешние нормали образуют выпуклый конус $K_T(x)$. Размерность $N_T(x)$ этого конуса будем называть размерностью поверхности излома в точке.

Определение 4. Степенью сферической ненаблюдаемости траектории $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, называется максимальное число линейно независимых сферически неэквивалентных траекторий со сферически эквивалентными измерениями.

Следствие 3. *Максимальная размерность* N_T *поверхности излома области достижимости системы* (7) *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$ *совпадает со степенью сферической ненаблюдаемости системы* (8).

2.2. Структура оптимального управления

Чтобы завершить проведённые рассуждения, выясним, к чему в рассматриваемом случае сводятся условия нормальности. Напомним, что рассматривается случай, когда ограничивающее множество управлений Ω является m-мерным цилиндром, каждая из граней которого — строго выпуклое множество. Результаты данного раздела полностью аналогичны известным результатам в случае, когда множество Ω является выпуклым многогранником (см. [6]).

Предложение 6. *Предположим, что система* (7) *удовлетворяет следующему условию:*

система вполне управляема по каждой из компонент u_i, $i = 1, \ldots, L$. $\quad (*)$

Тогда задача нормальна для любых $T > 0$.

Доказательство. Покажем, что из условия $(*)$ следует, что любые два управления $u'(t)$, $u''(t)$ на $0 \leqslant t \leqslant T$, переводящие x_0 в одну и ту же граничную точку $x_1 \in \partial\mathcal{D}_T$, совпадают почти всюду.

Предположим противное: пусть управление, переводящее систему в заданную точку x_1 на границе, не является единственным, и пусть ω — внешняя нормаль к области достижимости в точке x_1. Согласно принципу максимума существует такое решение сопряжённых уравнений $\psi^T(t) = \psi^T(T)e^{At}$, что управления u', u'', удовлетворяющие почти всюду на $0 \leqslant t \leqslant T$ соотношению

$$\psi^T(t)Bu'(t) = \psi^T(t)Bu''(t) = \max_{u\in\Omega}[\psi^T(t)Bu],$$

различны на некотором непустом подынтервале $\tau_1 < t < \tau_2$ отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим линейную функцию $F_t(u) = \psi^T(t)Bu$. Она либо постоянна, либо достигает максимума на границе Ω. Это же верно и для любой грани S_i $(i = 1, \ldots, L)$. Следовательно, $F_t(u)$ достигает при каждом t максимума либо в точке u, принадлежащей границе ∂S_i, либо на целой грани S_i. Покажем, что в силу предположения $(*)$ последнее возможно лишь для конечного числа значений t. Допустим, что на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует бесконечное число значений t, для каждого из которых $F_t(u)$ достигает максимума на какой-то целой грани S_i. Так как граней конечное число, можно выбрать открытый интервал $s_1 < t < s_2$ таких значений t, для каждого из которых $F_t(u)$ достигает своего максимума на некоторой фиксированной грани множества S_l. Значит, для любого $s_1 < t < s_2$ функция $F_t(u)$ постоянна на грани S_l.

Рассматриваемая грань натянута на некоторые линейно независимые векторы $w_1, \ldots, w_{m_l}$. Условие постоянства F_t означает, что при всех $s_1 < t < s_2$ и для всех $i = 1, \ldots, m_l$ выполнено равенство $F_t(w_i) = 0$. Отсюда $\omega^T e^{-A(t-T)}Bw_i = 0$, $i = 1, \ldots, m_l$. Дифференцируя левую часть по t, получим

$$-\omega^T e^{-A(t-T)}ABw_i = 0, \ldots, \quad \omega^T e^{-A(t-T)}A^{n-1}Bw_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m_l.$$

Последнее означает, что все векторы $Bw_i, ABw_i, \ldots, A^{n-1}Bw_i$, $i = 1, \ldots, m_l$, ортогональны вектору $\omega^T e^{-A(t-T)}$, т. е. они линейно зависимы. Поскольку векторы $w_1, \ldots, w_{m_l}$ по предположению порождают пространство столбцов B_l, отсюда следует, что $\operatorname{rank}[B_l, AB_l, \ldots, A^{n-1}B_l] < n$. Мы приходим к выводу, что система неуправляема по u_l, что противоречит условию $(*)$.

Следствие 4. *В условиях утверждения* 6 *управление* $u(t)$*, переводящее систему в заданную точку границы области достижимости, является кусочно-постоянной функцией, определено однозначно и может иметь лишь конечное число переключений.*

Доказательство. Переопределим экстремальное управление $u'(t)$ на множестве меры нуль так, чтобы

$$\psi^T(t)Bu'(t) = \max_{u\in\Omega}[\psi^T(t)Bu]$$

всюду на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда значения $u'(t)$ будут почти всюду лежать на границе одной из граней ∂S_i $(i = 1, \ldots, L)$. Совокупность моментов времени t, в которых $F_t(u)$ достигает максимума в точке, принадлежащей одной из границ ∂S_i, есть открытое множество. Дополнение этого множества, включающее в себя множество точек переключения, есть замкнутое множество. Если $u'(t)$ имеет бесконечное число разрывов, то выражение $\psi^T(t_\nu)Bu$ достигает максимума на целой грани множества Ω в каждый из бесконечного числа моментов времени t_ν. Отсюда следует, что $\psi^T(t_\nu)Bw = 0$, где w — каждый из единичных линейно независимых векторов, определяющих рассматриваемую грань. Так как $\psi^T(t)Bw$ является действительной аналитической функцией с бесконечным числом нулей, то $\psi^T(t)Bw \equiv 0$ для всех t из интервала $0 \leqslant t \leqslant T$. Далее аналогично доказательству утверждения 6 приходим к противоречию с условием $(*)$.

2.3. Пример

Рассмотрим задачу об оптимальной по быстродействию стабилизации оси вращения космического тела с осью симметрии (см. [3]). Пусть ω — проекция угловой скорости вращения на ось симметрии x_3; x_1, x_2 — проекции угловой скорости на перпендикулярные ей оси. Если разместить ракетные двигатели так, чтобы их векторы тяги проходили через ось симметрии, были перпендикулярны друг другу и перпендикулярны оси симметрии, задача после нормализации может быть сведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega x_2 + u_1, & |u_1| &\leqslant 1, \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1 + u_2, & |u_2| &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Требуется привести систему из точки с координатами (x_1, x_2) в точку $(0, 0)$ за минимальное время T. Минимальные изохроны $S(t^*)$ (геометрическое место точек, которые могут быть переведены в начало координат за одно и то же минимальное время t^*) совпадают с границей областью достижимости $\mathcal{D}_{t_*}$ из нуля за время t_*. Эти изохроны представлены на рис. 1.

Рисунок 1 позволяет проследить за эволюцией изохрон при увеличении времени движения. Из него видно, что области $\mathcal{D}_{t^*}$ замкнуты и выпуклы, причём их границы имеют изломы, расположенные на линиях переключения. Таким образом, в открытой области фазовой плоскости $(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2 < 4$ каждое из множеств $\partial\mathcal{D}_{t^*}$, $t^* < \frac{\pi}{2\omega}$, имеет четыре нерегулярные граничные точки, которые являются точками пересечения минимальных изохрон $\mathcal{D}_{t^*}$ с кривыми переключения. В области $(\omega x_1)^2 + (\omega x_2)^2 \geqslant 4$ множества достижимости $\mathcal{D}_{t^*}$, $t^* \geqslant \frac{\pi}{2\omega}$, замкнуты, выпуклы и их границы регулярны (не имеют изломов). Сопряжённая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \omega\psi_2, & \eta_1 &= \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\omega\psi_1, & \eta_2 &= \psi_2. \end{aligned}$$

Заметим, что сферические наблюдения несут информацию лишь о знаке η_1, η_2, или, иными словами, о том, в каком квадранте находится система. Сопряжённая система сферически наблюдаема при $t^* \geqslant \frac{\pi}{2\omega}$ (после того как будет полностью

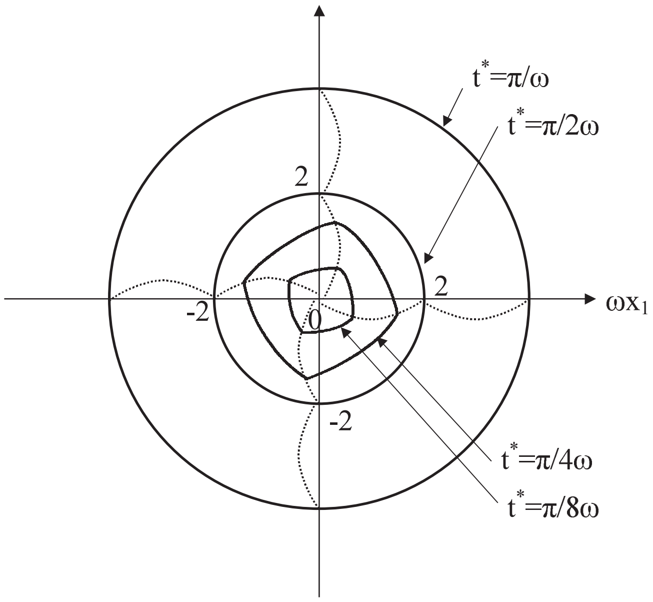

Рис. 1. Эволюция изохрон при увеличении времени

пройден один квадрант) и сферически ненаблюдаема в противном случае. Кроме того, эта система всегда проективно ненаблюдаема (впрочем, последнее верно для любой системы со скалярным z_i).

Литература

[1] Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М. Оптимизация динамики управляемых систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1978.

[3] Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.

[4] Болотин Ю. В. Обобщённый метод наименьших квадратов в задаче оценивания по угловым измерениям // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 2.

[5] Болотин Ю. В., Моргунова С. Н. О наблюдаемости механических систем по угловым измерениям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 3.

[6] Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.

[7] Овсеевич А. И. Особенности границ области достижимости и задачи наблюдаемости // Тезисы 5-й Всероссийской школы «Математические методы навигации». — М.: МГУ, 1994.

[8] Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974.

[9] Aidala V. J., Nardone S. C. Biased estimation properties of the pseudolinear tracking filter // IEEE Trans. Aerospace Electron. Systems. — 1982. — Vol. 18, no. 4. — P. 432—441.

[10] Bolotin Yu. V. A TLS approach to angle-only trajectory estimation // IEEE Workshop on Real Time Computing. — Prague, 1994.

[11] Nardone S. C., Aidala V. J. Observability criteria for bearings-only target motion analysis // IEEE Trans. Aerospace Electron. Systems. — 1981. — Vol. 17, no. 2. — P. 162—166.

[12] Payne A. N. Observability problem for bearing-only tracking // Internat. J. Control. — 1989. — Vol. 49, no. 3. — P. 761—768.