Некоторые задачи геометрической теории игр

Л. Ю. БЛАЖЕННОВА-МИКУЛИЧ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: blagennova@mech.math.msu.su

УДК 531.396

Ключевые слова: управление динамическими системами, теория игр, геометрическая игра, седловая точка.

Аннотация

Некоторые задачи управления динамическими системами, в частности задача стабилизации, сводятся к геометрическим играм. В данной статье приводится более общая формулировка выведенного ранее критерия существования седловой точки в геометрической игре и описываются алгоритмы нахождения седловой точки для случаев, когда множество стратегий одного из игроков есть 1) шар, 2) отрезок, 3) многогранник, а множество стратегий другого игрока — произвольное выпуклое множество.

Abstract

L. Ju. Blazhennova-Mikulich, On some problems in geometric games theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 8, pp. 131—137.

Several problems of dynamic systems control can be reduced to geometric games. The problem of stabilization is an example. In this paper the criteria of a saddle point in a geometric game is proved under more general conditions than earlier. Algorithms for finding of a saddle point are given in cases where the strategy set of one of the players is (1) a ball in $\mathbb{R}^n$, (2) a closed interval, (3) a polyhedral, and the strategy set of the other player is an arbitrary convex set.

Рассмотрим задачу стабилизации линейной динамической системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^s$, $u(\cdot) \in U$ — вектор управлений, $v(\cdot) \in V$ — вектор возмущений, U, V, X_0 — замкнутые выпуклые множества. Точность стабилизации задаётся квадратичным функционалом

$$J(t,u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t), \quad n \leqslant s. \tag{2}$$

Пусть y — решение линейной системы

$$\dot{y} = A(t)y + C(t)v, \quad y(t_0) = x(t_0). \tag{3}$$

Тогда вектор $z = y - x$ удовлетворяет системе

$$\dot{z} = A(t)z - B(t)u, \quad z(t_0) = 0. \tag{4}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 8, с. 131—137.

Таким образом, система (1) распадается на две независимые подсистемы (3) и (4). Построим множества достижимости для каждой из них, соответственно Ω_v и Ω_u. Функционал качества J имеет геометрический смысл квадрата расстояния между точками множеств Ω_v и Ω_u: $J = \rho^2(y, z) = \|y - z\|^2$, а динамическая игра (1), (2) переходит в геометрическую игру $G[\Omega_v, \Omega_u, \rho(y, z)]$.

Введём обозначения

$$\rho_* = \max_{y\in\Omega_v} \min_{z\in\Omega_u} \rho(y, z), \quad \rho^* = \min_{z\in\Omega_u} \max_{y\in\Omega_v} \rho(y, z).$$

Определение. Геометрическая игра $G[\Omega_v, \Omega_u, \rho(y, z)]$ имеет седловую точку (y_0, z_0), если выполняются равенства

$$\rho(y_0, z_0) = \rho_* = \rho^* = R.$$

Величина R называется *ценой игры.*

Теорема 1 (критерий существования седловой точки). *Пусть Ω_v и Ω_u — выпуклые замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Геометрическая игра $G[\Omega_v, \Omega_u, \rho(y; z)]$ имеет седловую точку с ценой игры R тогда и только тогда, когда существуют две сферы $S^{y_0}_{n-1}$ и $S^{z_0}_{n-1}$ радиуса R с центрами y_0 и z_0 соответственно, такие что:*

а) $z_0 \in S^{y_0}_{n-1}$, $y_0 \in S^{z_0}_{n-1}$;

б) *Ω_v содержит точку y_0 и принадлежит замкнутому шару, ограниченному сферой $S^{z_0}_{n-1}$;*

в) *Ω_u содержит точку z_0 и лежит вне открытого шара, ограниченного сферой $S^{y_0}_{n-1}$ (рис. 1).*

Заметим, что эта теорема является обобщением на случай неограниченных множеств теоремы, доказанной в [1].

Доказательство.

1. Из существования функции $\max\limits_{y\in\Omega_v} \rho(y; z)$ следует, что множество Ω_v ограниченно. Пусть седловая точка $(y_0; z_0)$ существует, т. е. выполняется условие

$$\rho_* = \max_{y\in\Omega_v} \min_{z\in\Omega_u} \rho(y; z) = \min_{z\in\Omega_u} \max_{y\in\Omega_v} \rho(y; z) = \rho^* = R.$$

Так как Ω_v и Ω_u — замкнутые множества, то $y_0 \in \partial\Omega_v$, $z_0 \in \partial\Omega_u$. Рассмотрим сферу $S^{y_0}_{n-1}$ радиуса R с центром в точке y_0. Для любой точки z из Ω_u выполняется неравенство

$$\rho(y_0; z) \geqslant \min_{z\in\Omega_u} \rho(y_0; z) = \rho(y_0; z_0) = R,$$

поэтому Ω_u лежит вне сферы $S^{y_0}_{n-1}$, причём z_0 — единственная общая точка Ω_u и $S^{y_0}_{n-1}$. Рассмотрим сферу $S^{z_0}_{n-1}$ радиуса R с центром в точке z_0. Для любой точки y из Ω_v выполняется неравенство

$$\rho(y; z_0) \leqslant \max_{y\in\Omega_v} \rho(y; z_0) = \rho(y_0; z_0) = R.$$

Следовательно, Ω_v лежит внутри сферы $S^{z_0}_{n-1}$.

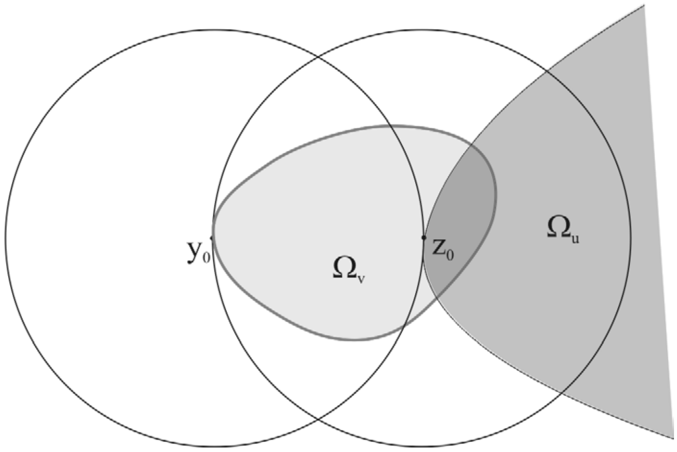

Рис. 1. Геометрический критерий существования седловой точки. Ω_v лежит внутри сферы радиуса R с центром $z_0 \in \partial\Omega_u$; Ω_u лежит вне сферы радиуса R с центром $y_0 \in \partial\Omega_v$; $(y_0; z_0)$ — седловая точка игры. Цена игры равна R

2. Обратно, пусть существуют две сферы, указанные в условии теоремы, с центрами соответственно в точках y_0 и z_0, $y_0 \in \partial\Omega_v$, $z_0 \in \partial\Omega_u$, и радиусом R. Покажем, что $(y_0; z_0)$ является седловой точкой, а R — ценой игры. Действительно,

$$\max_{y\in\Omega_v} \min_{z\in\Omega_u} \rho(y;z) \geqslant \min_{z\in\Omega_u} \rho(y_0;z) = \rho(y_0;z_0) = R,$$
$$\min_{z\in\Omega_u} \max_{y\in\Omega_v} \rho(y;z) \leqslant \max_{y\in\Omega_v} \rho(y;z_0) = \rho(y_0;z_0) = R.$$

Получаем

$$R \leqslant \max_{y\in\Omega_v} \min_{z\in\Omega_u} \rho(y;z) \leqslant \min_{z\in\Omega_u} \max_{y\in\Omega_v} \rho(y;z) \leqslant R.$$

Отсюда

$$\max_{y\in\Omega_v} \min_{z\in\Omega_u} \rho(y;z) = \min_{z\in\Omega_u} \max_{y\in\Omega_v} \rho(y;z) = R,$$

что и требовалось доказать. □

Рассмотрим теперь несколько примеров применения теоремы 1.

Пример 1. Множество стратегий первого противника Ω_v есть замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, Ω_u — выпуклое замкнутое множество.

Теорема 2. *Пусть $G\{\Omega_v; \Omega_u; \rho(y;z)\}$ — геометрическая игра в $\mathbb{R}^n$, в которой множество Ω_v — замкнутый шар радиуса r, Ω_u — выпуклое множество. Тогда, если центр шара Ω_v лежит вне Ω_u или на его границе, то игра имеет седловую точку. В противном случае седловой точки не существует.*

Проведём доказательство конструктивно, указав метод построения сфер из теоремы 1.

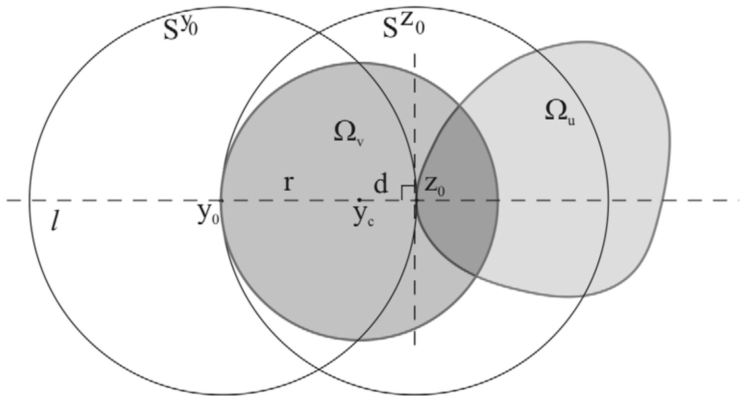

Рис. 2. Множество стратегий первого игрока — шар Ω_v радиуса r;
d — расстояние от центра шара z_c до множества Ω_u; цена игры равна $r + d$

Пусть y_c — центр шара Ω_v. Рассмотрим функцию $f(z) = \rho(y_c; z)$, $z \in \Omega_u$. Эта функция имеет минимум в некоторой точке z_0 на границе $\partial\Omega_u$, причём, вследствие выпуклости Ω_u, точка минимума единственна. Пусть

$$d = \min_{z \in \Omega_u} \rho(y_c; z) = \rho(y_c; z_0).$$

Величина d есть расстояние от точки y_c до множества Ω_u.

Пусть y_c не принадлежит $\partial\Omega_u$ и l — прямая, проходящая через точки y_c и z_0, y_0 — точка пересечения прямой l с границей шара Ω_v, такая что y_c лежит между y_0 и z_0 (рис. 2). Гиперплоскость Γ_{n-1}, ортогональная прямой l и проходящая через точку z_0, служит опорной для множества Ω_u. Обозначим $R = \rho(y_0; z_0)$. Построим сферы $S^{y_0}_{n-1}$ и $S^{z_0}_{n-1}$ радиуса R с центрами в точках y_0 и z_0 соответственно. Гиперплоскость Γ_{n-1} касается сферы $S^{y_0}_{n-1}$ в точке z_0, и значит,

$$\Omega_u \cap S^{y_0}_{n-1} \equiv \Gamma_{n-1} \cap S^{y_0}_{n-1} \equiv z_0.$$

Шар Ω_v внутренне касается сферы $S^{z_0}_{n-1}$ в точке y_0. Следовательно, по теореме 1 игра $G\{\Omega_v; \Omega_u; \rho(y; z)\}$ имеет седловую точку $(y_0; z_0)$ с ценой $R = r + d$.

Пусть $y_c \in \partial\Omega_u$. Тогда $z_0 \equiv y_c$ и $d = 0$. Пусть Γ_{n-1} — опорная гиперплоскость множества Ω_u в точке z_0, l — прямая, ортогональная Γ_{n-1} и проходящая через z_0, y_0 — точка пересечения прямой l с границей шара Ω_v, принадлежащая тому полупространству относительно Γ_{n-1}, которое не содержит Ω_u. Тогда $\{y_0, z_0\}$ — седловая точка игры, сфера $S^{z_0}_{n-1}$ совпадает с поверхностью шара Ω_v и цена игры равна r.

Непосредственно из теоремы 1 также следует, что если множество Ω_v — шар и игра имеет седловую точку, то центр шара должен лежать вне Ω_u или на его границе. Действительно, шар Ω_v будет лежать внутри сферы $S^{z_0}_{n-1}$, только если его центр принадлежит отрезку $[y_0; z_0]$ (см. рис. 2).

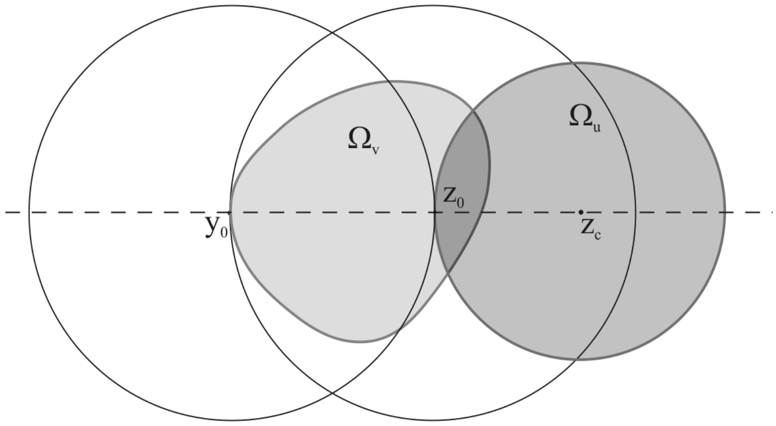

Рис. 3. Множество стратегий второго игрока — шар Ω_u радиуса r; цена игры равна $\rho(z_c; y_0) - r$

Заметим, что частный случай этой задачи, когда Ω_v и Ω_u представляют собой круги на плоскости, был решён в [2].

Пример 2. Множество стратегий второго противника Ω_u есть шар в $\mathbb{R}^n$, Ω_v — выпуклое замкнутое множество (рис. 3).

Согласно теореме 1, если седловая точка $(y_0; z_0)$ существует, то центр z_c шара Ω_u лежит на прямой y_0z_0. Таким образом, для того чтобы найти седловую точку данной игры, достаточно найти значение y_0, при котором достигает максимума функция $\rho(y; z_c)$. Пересечение прямой y_0z_c и сферы $\partial\Omega_u$ даст точку z_0. Построим шар $B_n^{z_0}$ радиуса $R = \rho(y_0; z_0)$ с центром в точке z_0. Седловая точка игры существует тогда и только тогда, когда $\Omega_v \subset B_n^{z_0}$.

Заметим, что при нахождении седловой точки мы опирались на факт, что функция $\rho(y; z_c)$ достигает максимума в единственной точке y_0. Докажем, что в случае существования седловой точки, это действительно так. Действительно, если седловая точка существует, то множество Ω_v полностью лежит внутри шара $B_n^{z_0}$, который, в свою очередь, внутренне касается сферы $S_{n-1}^{z_c}$ с центром в z_c и радиусом $\rho(y_0; z_c)$, т. е. Ω_v и $S_{n-1}^{z_c}$ имеют только одну общую точку.

Пример 3. Ω_v — отрезок AB, Ω_u — выпуклое замкнутое множество (рис. 4).

Рассмотрим функцию $f(y)$ расстояния до множества Ω_u:

$$f(y) = \rho(y, \Omega_u) = \min_{z \in \Omega_u} \rho(y, z). \tag{5}$$

Функция $f(y)$ выпукла и не является константой, а значит, имеет максимум на концах отрезка. Отсюда следует алгоритм нахождения седловой точки. Найдём расстояние концов отрезка до множества Ω_u. Пусть $R = f(A) > f(B)$, C — проекция точки A на множество Ω_u. Седловая точка существует тогда и только тогда, когда $\rho(B; C) \leqslant \rho(A; C)$ (пара $\{A; C\}$). Заметим, что если $f(A) = f(B)$ и

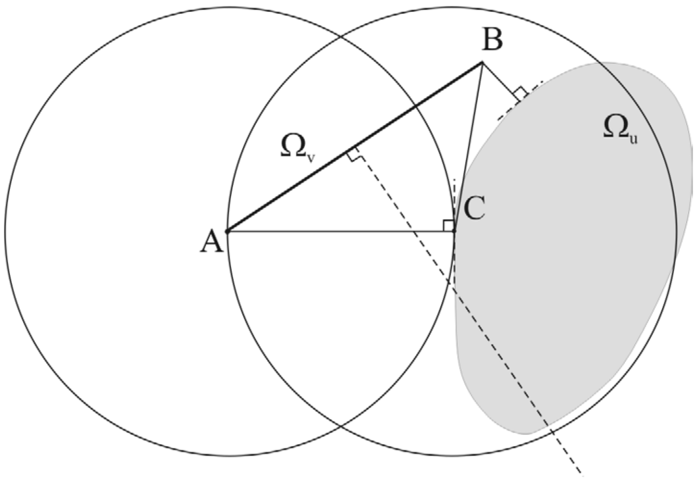

Рис. 4. Множество стратегий первого игрока — отрезок AB,
C — проекция точки A на множество Ω_u. Седловая точка существует, если $AC \geqslant BC$

проекции точек A и B на множество Ω_u не совпадают, то седловой точки, как нетрудно показать, не существует.

Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть $G\{\Omega_v; \Omega_u; \rho(y;z)\}$ — геометрическая игра в $\mathbb{R}^n$, в которой множество Ω_v — отрезок AB, Ω_u — выпуклое множество. Пусть C и D — проекции концов отрезка на множество Ω_u. Седловая точка игры существует тогда и только тогда, когда точки C и D лежат в одном и том же полупространстве относительно гиперплоскости Γ_{n-1}, проходящей через середину отрезка AB ортогонально ему.*

Эта задача допускает естественное обобщение на случай, когда Ω_v есть выпуклый многогранник.

Пример 4. Ω_v — выпуклый многогранник, Ω_u — выпуклое замкнутое множество.

Алгоритм нахождения седловой точки состоит в следующем. Находим расстояние от вершин многогранника A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, до множества Ω_u. Выбираем вершину, для которой это расстояние максимально. Пусть это будет A_1. Если для некоторого i выполнено $f(A_i) = f(A_1)$, где f — функция, определённая в (5), и проекции вершин A_1 и A_i на множество Ω_u не совпадают, то седловой точки не существует. Пусть C_1 — проекция вершины A_1 на множество Ω_u. Седловая точка существует и совпадает с парой $\{A_1; C_1\}$ тогда и только тогда, когда $\rho(A_i; C_1) \leqslant \rho(A_1; C_1)$ для всех $i = 2, \ldots, m$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $G\{\Omega_v; \Omega_u; \rho(y;z)\}$ — геометрическая игра в $\mathbb{R}^n$, в которой множество Ω_v — выпуклый многогранник $A_1A_2\ldots A_m$, Ω_u — выпуклое замкнутое множество. Седловая точка игры существует тогда и только тогда, когда проекции вершин многогранника на Ω_u лежат в множестве $\bigcap\limits_{i>j} L_{ij}$, где L_{ij} — одно из двух полупространств относительно гиперплоскости, проходящей через середину отрезка A_iA_j ортогонально ему.*

Пример 5. Ω_v — выпуклое замкнутое множество, Ω_u — отрезок.

Спроектируем множество Ω_v на гиперплоскость Π, ортогональную отрезку Ω_u. Пусть O — ортогональная проекция отрезка Ω_u на гиперплоскость Π. Найдём точку $y_0' \in \mathrm{Pr}_\Pi(\Omega_v)$, в которой достигает максимума функция $\rho(y';O)$, $y' \in \mathrm{Pr}_\Pi(\Omega_v)$. Пусть y_0 — прообраз точки y_0'. Если y_0 не единственна, то игра не имеет седловой точки. Пусть y_0 единственна и z_0 — проекция y_0 на отрезок Ω_u, если проекция принадлежит Ω_u, и ближайший конец отрезка в противном случае. Построим шар $B_n^{z_0}$ радиуса $R = \rho(y_0; z_0)$ с центром в точке z_0. Седловая точка игры существует и совпадает с $\{y_0; z_0\}$ тогда и только тогда, когда $\Omega_v \subset B_n^{z_0}$.

Литература

[1] Александров В. В., Блаженнова-Микулич Л. Ю., Гутиерес-Ариас И. М., Лемак С. С. Мягкое тестирование точности стабилизации и седловые точки в геометрических играх // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 1. — С. 43—50.

[2] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Сёмина Е. А. Теория игр. — М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. — С. 66—68.