

Оптимизация закона пропорционального наведения при наличии запаздывания

Е. С. МАНУЙЛОВИЧ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: eliza_m@inbox.ru*

О. Ю. ЧЕРКАСОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ocherk@moids.math.msu.su*

УДК 518.9

Ключевые слова: пропорциональное наведение, относительное движение, оптимальное управление, запаздывание.

Аннотация

Рассматривается управляемое относительное движение космического аппарата в окрестности орбитальной станции. В качестве алгоритма сближения на активном космическом корабле используется метод пропорционального наведения, который реализуется с некоторым запаздыванием. Коэффициент закона наведения рассматривается в качестве управляющей переменной, кусочно-непрерывной функции времени. Исследуется задача выбора указанного коэффициента, обеспечивающего минимизацию времени сближения. Установлено, что оптимальное решение содержит как граничные, так и «промежуточные» значения управления. Приведены результаты компьютерного моделирования.

Abstract

E. S. Manuilovich, O. Yu Cherkasov, Optimization of the proportional navigation law with time delay, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 8, pp. 139–147.

The controlled relative motion of spacecraft nearby an orbital station is considered. The rendezvous method used at the active spacecraft is an algorithm of proportional navigation which is realized with some constant time delay. The coefficient of the law of guidance is considered to be the control variable, a step time function. The problem of choice of the mentioned coefficient which provides a minimum of the rendezvous time is analyzed. It turns out that the optimal solution includes both boundary and intermediate control values. The results of computer simulation are given.

1. Введение

Метод пропорционального наведения, при котором командное ускорение направлено ортогонально линии визирования (ЛВ) преследователь-цель [3], является одним из наиболее распространённых алгоритмов сближения движущихся

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 8, с. 139–147.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

объектов различного назначения, в том числе космических аппаратов. Для задачи управления линейной системы с квадратичным критерием метод является оптимальным [5]. В [2, 8, 9, 11, 12] исследовалось влияние параметров закона пропорционального наведения и его различных модификаций на характеристики (точностные, временные и т. д.) процесса сближения. Указанные исследования проводились в предположении, что запаздывание в системе наведения отсутствует. В [2] показано, что при отсутствии запаздывания для минимизации времени сближения коэффициент закона наведения следует выбирать максимальным. Вместе с тем запаздывание в реальных системах наведения является неизбежным, и пренебрежение им может приводить к ошибочным результатам. Анализ задач наведения-уклонения проводился, например, в [4, 6, 7, 10, 11], где использовались кинематические уравнения, линеаризованные в окрестности ЛВ. В [11] рассмотрена задача оптимального уклонения от преследователя, осуществляющего пропорциональное наведение с запаздыванием. Показано, что в этом случае стратегия уклоняющегося существенно изменяется по сравнению со стратегией при отсутствии запаздывания.

В настоящей работе исследуется заключительный этап плоского сближения космического аппарата с пассивной орбитальной станцией, движущейся по круговой орбите Земли. Сближение осуществляется с помощью метода пропорционального наведения, который реализуется с некоторым малым постоянным запаздыванием. Целью данной работы является оптимизация метода наведения при наличии запаздывания. Коэффициент закона наведения рассматривается в качестве управляющей переменной, кусочно-непрерывной функции времени. Исследуется задача выбора указанного коэффициента, обеспечивающего минимизацию времени достижения заданного конечного расстояния между объектами.

2. Постановка задачи

Относительное движение описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в полярной системе координат, центр которой находится в станции и является одновременно центром масс системы. Оба объекта считаются точечными массами, расстояние между которыми пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до центра Земли. Активный аппарат имеет полную информацию о параметрах относительного движения.

Уравнения относительного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 &= a_\rho, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} &= a_\varphi.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ρ — расстояние между спутником и станцией, φ — угол между линией визирования и некоторым постоянным направлением в выбранной полярной системе координат, a_ρ и a_φ — компоненты управляющего ускорения, приложенного

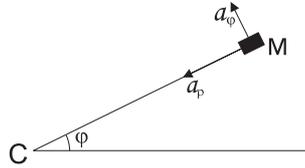


Рис. 1

к активному кораблю, направленные соответственно вдоль ЛВ и ортогонально ей (рис. 1).

Примем, что командное ускорение вдоль ЛВ равняется нулю, а ускорение, ортогональное ЛВ, формируется в соответствии с законом пропорционального наведения

$$a_{\varphi} = k\dot{\varphi}(t - \tau), \quad (2)$$

где τ — постоянное запаздывание, k — управление, кусочно-непрерывная функция времени, удовлетворяющая ограничению

$$-\bar{k} \leq k(t) \leq \bar{k}. \quad (3)$$

Целью управления является минимизация функционала

$$J = T \rightarrow \min, \quad (4)$$

определённого на траекториях системы (1), (2) с соответствующими краевыми условиями и ограничениями на управление (3).

Для учёта запаздывания ускорение a_{φ} запишем в виде

$$a_{\varphi} = ku(t), \quad (5)$$

где $u(t)$ описывается уравнением

$$\tau \dot{u}(t) = \dot{\varphi}(t) - u(t). \quad (6)$$

Аналогичным образом учёт запаздывания проводился, например, в [4].

Подставляя уравнения (5) и (6) в систему (1) и переписывая её в форме Коши, получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v, \\ \dot{v} &= \rho\omega^2, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{-2v\omega + ku}{\rho}, \\ \dot{u} &= \theta(\omega - u), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\theta = \tau^{-1}$. Краевые условия для системы (7) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad & \rho(0) = \rho_0, \quad v(0) = v_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad u(0) = u_0, \\ t = T: \quad & \rho(T) = \rho_T. \end{aligned} \quad (8)$$

Задача (3), (4), (7), (8) является задачей Майера оптимального управления, для анализа которой воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина [1, 2].

3. Анализ оптимальной задачи

Выпишем для задачи (3), (4), (7), (8) функцию Понтрягина [1]

$$H = v\psi_\rho + \rho\omega^2\psi_v + \omega\psi_\varphi + \frac{ku - 2v\omega}{\rho}\psi_\omega + \theta(\omega - u)\psi_u \quad (9)$$

и уравнения для сопряжённых переменных

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\rho &= -\omega^2\psi_v + \frac{ku - 2v\omega}{\rho^2}\psi_\omega, \\ \dot{\psi}_v &= -\psi_\rho + \frac{2\omega}{\rho}\psi_\omega, \\ \dot{\psi}_\varphi &= 0, \\ \dot{\psi}_\omega &= -2\rho\omega\psi_v - \psi_\varphi + \frac{2v}{\rho}\psi_\omega - \theta\psi_u, \\ \dot{\psi}_u &= -\frac{k}{\rho}\psi_\omega + \theta\psi_u. \end{aligned} \quad (10)$$

Из условий трансверсальности получаем значения сопряжённых переменных в конечный момент времени:

$$\psi_v(T) = \psi_\varphi(T) = \psi_\omega(T) = \psi_u(T) = 0, \quad H(T) = 1. \quad (11)$$

Из (10), (11) и условия стационарности функции H на оптимальной траектории следует, что $H(t) = 1$ на $[0; T]$, $\psi_\varphi \equiv 0$ на $[0; T]$.

Из условия максимума функции (9) вытекает, что экстремальное управление удовлетворяет следующему условию:

$$k = \begin{cases} \bar{k}, & H_1 > 0, \\ -\bar{k}, & H_1 < 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $H_1 = \frac{u}{\rho}\psi_\omega$ — функция переключения.

Выясним, может ли в рассматриваемой задаче существовать особое управление. Предположим, что на некотором отрезке времени $[t_1; t_2] \subseteq [0; T]$ функция переключения H_1 тождественно обращается в нуль. Из условия

$$H_1 = \frac{u}{\rho}\psi_\omega \equiv 0$$

следует равенство $\psi_\omega \equiv 0$, иначе $u \equiv 0$ и система (7) неуправляема. Поскольку $\dot{H}_1 \equiv 0$ на $[t_1; t_2]$, то, дифференцируя H_1 по времени, в силу систем (7) и (10) получаем

$$\dot{\psi}_\omega = -2\rho\omega\psi_v - \theta\psi_u \equiv 0. \quad (13)$$

Заметим, что $\psi_v \neq 0$, в противном случае из системы (10) следует тождественное равенство нулю всех сопряжённых переменных, что противоречит принципу максимума. Из (13) находим, что

$$\frac{\psi_u}{\psi_v} = -\frac{2\rho\omega}{\theta}. \quad (14)$$

Кроме того, $\ddot{H}_1 \equiv 0$ на $[t_1; t_2]$. Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{H}_1 = -\frac{\psi_u\theta^2\omega}{\rho} + \frac{\psi_u\theta uv}{\rho^2} - 2\theta\omega^2\psi_v + 2\theta u\omega\psi_v - \\ - \frac{2u^2\psi_v}{\rho}k + \frac{4uv\omega\psi_v}{\rho} + 2u\omega\psi_\rho \equiv 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из условия $H = 1$ на $[t_1; t_2]$ находим, что

$$\psi_\rho + \rho\omega\psi_v(2u - \omega) = 1. \quad (16)$$

Из (15), используя (14), находим особое управление:

$$k_s = \frac{\omega\rho}{u} \left(\frac{v}{\rho} + \frac{\psi_\rho}{\psi_v} + \theta \right). \quad (17)$$

Необходимое условие Келли оптимальности особого управления приводит к неравенству

$$\rho\psi_v < 0.$$

Теперь соотношение (12) переписывается следующим образом:

$$k = \begin{cases} \bar{k}, & H_1 > 0, \\ k_s, & H_1 \equiv 0, \\ -\bar{k}, & H_1 < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Следовательно, задача оптимального управления (3), (4), (7), (8) формально сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8), (10), (11) с правилом выбора управления (18). Общеизвестно, что численное решение задач оптимального управления с особыми участками представляет значительные трудности. Эти трудности могут быть преодолены, если, например, известна структура оптимальной траектории, или комбинация особых и неособых дуг. Для выяснения структуры оптимального управления рассмотрим вспомогательную задачу для редуцированной динамической системы (7).

4. Вспомогательная задача

Заметим, что в системе (7) управление $k(t)$ входит только в одно уравнение, поэтому мы можем перейти к вспомогательной задаче для редуцированной

системы, освободив начальные условия для переменной $\omega(t)$ и вычеркнув уравнение для $\dot{\omega}$:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= v, \\ \dot{v} &= \rho\omega^2, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{u} &= \theta(\omega - u).\end{aligned}\tag{19}$$

В этой системе будем рассматривать в качестве управления $\omega(t)$, причём ограничения на управление в задаче отсутствуют. Функционал и граничные условия на остальные переменные остаются прежними:

$$\begin{aligned}t = 0: \quad & \rho(0) = \rho_0, \quad v(0) = v_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad u(0) = u_0, \\ t = T: \quad & \rho(T) = \rho_T.\end{aligned}\tag{20}$$

Выпишем функцию Понтрягина для задачи (4), (19), (20):

$$\begin{aligned}H &= v\psi_\rho + \rho\omega^2\psi_v + \omega\psi_\varphi + \theta(\omega - u)\psi_u = \\ &= \rho\psi_v\omega^2 + (\psi_\rho + \theta\psi_u)\omega + v\psi_\rho - \theta u\psi_u.\end{aligned}\tag{21}$$

Сопряжённая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_\rho &= -\omega^2\psi_v, \\ \dot{\psi}_v &= -\psi_\rho, \\ \dot{\psi}_\varphi &= 0, \\ \dot{\psi}_u &= \theta\psi_u.\end{aligned}\tag{22}$$

Из условий трансверсальности находим значения сопряжённых переменных при $t = T$:

$$\psi_v(T) = \psi_\varphi(T) = \psi_u(T) = 0, \quad H(T) = 1.\tag{23}$$

Из третьего и четвёртого уравнений системы (22), используя значения сопряжённых переменных в конечный момент времени (23), находим, что $\psi_\varphi \equiv 0$, $\psi_u = c_1 e^{\theta t} \equiv 0$ на $[0; T]$.

Для нахождения оптимального управления заметим, что функция H (см. (21)) квадратична по управлению $\omega(t)$ и её максимум достигается при

$$\omega = \frac{-\psi_\rho - \theta\psi_u}{2\rho\psi_v} \equiv 0$$

при условии $\rho\psi_v < 0$.

Следовательно, оптимальным движением в задаче (4), (19), (20) является равномерное прямолинейное движение вдоль линии визирования.

Решение вспомогательной задачи соответствует особой дуге оптимальной траектории задачи (3), (4), (7), (8) и получено в предположении, что начальное условие $\omega(0)$ свободно, а ограничения (3) отсутствуют. Следовательно, если оптимальная траектория задачи (3), (4), (7), (8) содержит особую дугу и k_s удовлетворяет условию (3), то эта дуга примыкает к концу траектории.

Подставляя решение вспомогательной задачи $\omega(t) \equiv 0$ в соотношение (17), находим соответствующее особое управление $k_s \equiv 0$.

Мы выяснили структуру оптимального управления: коэффициент $k(t)$ в методе пропорционального наведения должен выбираться максимальным по модулю из класса допустимых $k = \bar{k}$ до уменьшения угловой скорости ω до нуля, затем следует переключение на особый режим $k = 0$ до достижения заданного конечного расстояния ρ_T до цели. Таким образом, синтез оптимального управления имеет вид

$$k = \begin{cases} -\bar{k}, & \omega \neq 0, \\ \bar{k}, & \omega \neq 0, \\ k_s = 0, & \omega = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Из механического смысла пропорционального наведения следует, что включение в траекторию участка движения с $k = -\bar{k}$ неоптимально, что подтверждается и численным экспериментом.

5. Компьютерное моделирование

Численное моделирование проводится в среде Matlab.

Рассмотрим систему (7) на различных режимах управления

$$k = \begin{cases} \bar{k}, & t < t_s, \\ 0, & t > t_s, \end{cases} \quad (25)$$

где момент переключения t_s пробегает значения от $t_s = 0$ до $t_s = T$. Моделирование осуществляется при постоянном запаздывании $\tau = 0,1$, крайних условиях

$$\begin{aligned} t = 0: & \quad \rho_0 = 1, \quad v_0 = -0,5, \quad \varphi_0 = 1, \quad \omega_0 = 1, \quad u_0 = 1, \\ t = T: & \quad \rho_T = 0,4, \end{aligned} \quad (26)$$

и ограничении на управление $\bar{k} = 5$. При выбранных граничных значениях переменных проведём численное интегрирование системы (7). График зависимости времени сближения до достижения конечного расстояния $\rho_T = 0,4$ от момента переключения t_s приведён на рис. 2.

Крайняя правая точка графика соответствует режиму управления, при котором коэффициент метода пропорционального наведения выбирается постоянным максимальным $k = \bar{k}$ на всём времени сближения. Видно, что такой режим не является оптимальным, так как существует режим с переключением, при котором требуемое конечное расстояние достигается быстрее. При выбранных граничных условиях и ограничениях на управление минимум времени сближения достигается при управлении с переключением с $k = \bar{k}$ на $k = 0$ в момент $t_s = 0,325$.

Приведём график $\omega(t)$ при $k = \bar{k}$ на $[0; T]$ (рис. 3).

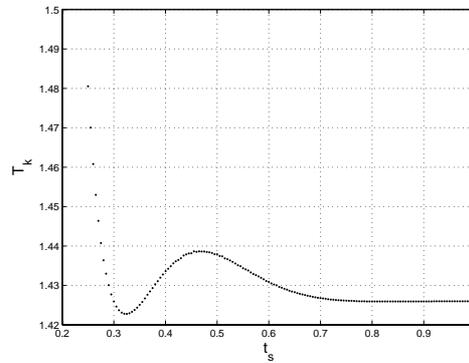


Рис. 2

Видно, что при $t = 0,325$ угловая скорость ω обращается в нуль, что и соответствует моменту переключения на $k = 0$ при оптимальном управлении.

Для системы (1) с $a_\varphi = k\dot{\varphi}(t - \tau)$ также проводилось численное моделирование с помощью функции Matlab `dde23`, позволяющей учесть запаздывание. Установлена качественная и количественная близость траекторий при малых значениях τ .

6. Заключение

Исследована задача оптимизации закона пропорциональной навигации при наличии постоянного запаздывания. Установлено, что наличие запаздывания существенно меняет характер оптимального изменения коэффициента закона

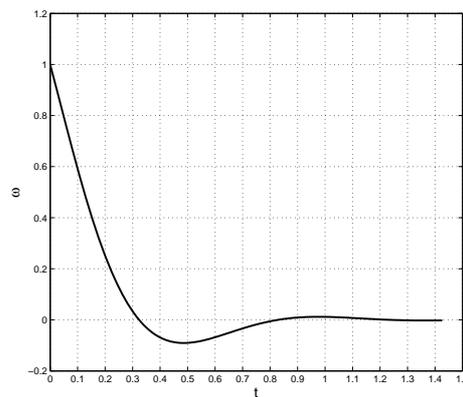


Рис. 3

наведения. Для минимизации времени сближения космического модуля с пассивной орбитальной станцией коэффициент закона наведения следует выбирать переменным: максимальным по модулю до момента выхода угловой скорости ЛВ на нуль (регулярное управление) и равным нулю до окончания процесса (особое управление).

Авторы выражают благодарность профессору В. В. Александрову за плодотворные обсуждения постановки задачи и результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00379).

Литература

- [1] Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М. Оптимизация динамики управляемых систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
- [2] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
- [3] Кан В. Л., Кельзон А. С. Теория пропорциональной навигации. — Л.: Судостроение, 1965.
- [4] Котрелл Р. Оптимальное наведение при перехвате для тактических снарядов малой дальности // Ракетная техника и космонавтика. — 1971. — Т. 9, № 7.
- [5] Локк А. С. Управление снарядами. — М.: Физматгиз, 1960.
- [6] Шинар Дж., Ротштейн И., Безнер Э. Исследования оптимального пространственного ухода от преследователя, описываемого линеаризованными уравнениями кинематики // Ракетная техника и космонавтика. — 1979. — № 12. — С. 143—152.
- [7] Ben-Asher J., Cliff E. M., Kelley H. J. Optimal evasion with a path-angle constraint and against two pursuers // J. Guidance Control Dynam. — 1988. — Vol. 11. — P. 300—304.
- [8] Guelman M. The closed-form solution of true proportional navigation // IEEE Trans. Aerospace Electron. Systems. — 1976. — Vol. 12, no. 4. — P. 472—482.
- [9] Guelman M. Guidance for asteroid rendezvous // J. Guidance Control Dynam. — 1991. — Vol. 14. — P. 1080—1083.
- [10] Slater G. L., Wells W. R. Optimal evasive tactics against a proportional navigation missile with time delay // J. Spacecraft Rockets. — 1973. — No. 10. — P. 309—313.
- [11] Yang C. D., Yeh F. B. Optimal proportional navigation // J. Guidance Control Dynam. — 1988. — Vol. 11. — P. 375—377.
- [12] Yuan P. J., Hsu S. C. Rendezvous guidance with proportional navigation // J. Guidance Control Dynam. — 1994. — Vol. 17. — P. 409—411.

