Изгибание поверхностей. III*

И. ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА
Софийский университет
им. святого Климента Охридского
e-mail: karatopraklieva@fmi.uni-sofia.bg

П. Е. МАРКОВ

И. Х. САБИТОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: isabitov@mail.ru

УДК 513

Ключевые слова: многомерные поверхности, изгибания, бесконечно малые изгибания, неизгибаемость, жёсткость поверхностей.

Аннотация

Даётся обзор работ об однозначной определённости, изгибаемости/неизгибаемости и жёсткости/нежёсткости многомерных поверхностей, в основном в евклидовых пространствах, с сопровождающей теорией бесконечно малых изгибаний высших порядков. В качестве отправной базы для методов исследований рассматриваются три формы основной теоремы теории поверхностей (в локальных координатах, инвариантная и в терминах внешних форм).

Abstract

I. Ivanova-Karatopraklieva, P. E. Markov, I. Kh. Sabitov, Bending of surfaces. III, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 3—56.

A survey of works on discrete and continuous rigidity/nonrigidity and infinitesimal rigidity/nonrigidity of multidimensional surfaces, mainly in Euclidean spaces, is given. As a starting point for the methods of investigation, one considers three forms of the main theorem of the theory of surfaces (in local coordinates, in the invariant form, and in terms of exterior differential forms).

Содержание

*Работа выполнена при поддержке Фонда научных исследований Софийского университета им. святого Климента Охридского, контракты № 319/99, 353/00, 486/02. Участие третьего автора в написании статьи поддержано также грантами РФФИ № 02-01-00101 и 05-01-00204.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 1, с. 3—56.

Первые две части данной работы опубликованы в [18, 19]. В соответствии с намеченным в [18] планом, данная часть посвящена изгибаниям и бесконечно малым изгибаниям многомерных поверхностей. Обзор содержит результаты, относящиеся как к гиперповерхностям, так и к поверхностям произвольной конечной коразмерности.

По методам доказательств результаты теории изгибаний и бесконечно малых изгибаний многомерных поверхностей условно можно разделить на два типа. Результаты первого типа базируются на исследовании уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи и использовании основной теоремы теории поверхностей. Эта методика применима только к поверхностям в пространствах постоянной кривизны. Результаты второго типа базируются на исследовании различных вариантов уравнений Шлефли, непосредственно выражающих коэффициенты данной метрической формы через первые производные координат точек поверхности. Здесь допускаются римановы и псевдоримановы пространства произвольной кривизны. Совокупность результатов, которые можно отнести к первому типу, значительно обширнее результатов второго типа, и они занимают бóльшую часть обзора. Во всей работе, за редким исключением, мы ограничиваемся поверхностями евклидова пространства, предполагая следующую часть посвятить теории изгибаний поверхностей в римановых пространствах.

§ 9. Различные формы основной теоремы теории поверхностей

Термином «*многообразие*» мы всюду обозначаем гладкое связное хаусдорфово ориентируемое многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счётности. Без ограничения общности будем предполагать, что все многообразия гладкие класса C^∞. Под «*евклидовым пространством*» будем понимать аффинное пространство, на векторной части которого задана положительно определённая билинейная форма, называемая *скалярным произведением*. Введение аффинной системы координат в евклидовом пространстве задаёт на нём C^∞-структуру, что позволяет рассматривать его как многообразие. Касательное пространство к евклидову пространству в каждой точке канонически отождествляется с векторной частью этого пространства, а скалярное произведение — с римановой метрикой.

Уравнения Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи, как правило, используются в следующих трёх формах записи:

1) классическая локально-координатная (Эйзенхарт [62], Схоутен—Стройк [58], Ю. А. Аминов [1]);
2) инвариантная (Шарба [158, 159], Кобаяси—Номидзу [26]);
3) в дифференциальных формах (Яненко [71—73], Гриффитс—Брайнт—Берже—Янг [78, 84]).

Для каждой из этих форм имеется свой вариант основной теоремы.

9.1. Классическая формулировка основной теоремы

Пусть X — n-мерное многообразие, E — m-мерное евклидово пространство, $2 \leqslant n \leqslant m$. Рассмотрим C^r-погружение $z\colon X \to E$, $r \geqslant 1$. В каждой точке $x \in X$ значение $z(x)$ мы отождествляем с радиус-вектором соответствующей точки в E относительно некоторой фиксированной ортонормированной системы координат в E. Поверхностью в пространстве E будем называть образ $F = z(X)$, рассматриваемый в паре с погружением z. Обозначая через $x^1, \ldots, x^n$ локальные координаты точки $x \in X$, в окрестности каждой точки на X погружение z (а значит, и уравнение поверхности F) будем записывать в виде $z = z(x^1, \ldots, x^n)$, где $z(x^1, \ldots, x^n)$ — вектор-функция класса C^r. Подпространство T_xF пространства E, порождённое векторами $z_{,i}(x) = \frac{\partial z(x)}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *касательной плоскостью* к поверхности F в точке $x \in X$ (или в точке $z(x) \in F$). Ортогональное дополнение $T_x^\perp F$ к касательной плоскости T_xF в E называется *нормальной плоскостью* к поверхности F в точке x (или в точке $z(x)$). За исключением отдельных случаев, касательная и нормальная плоскости рассматриваются как векторные пространства без учёта аффинной структуры. Касательная плоскость представляет собой образ касательного пространства $T_x(X)$ к многообразию X в точке x при касательном к z отображении $T_x z\colon T_x(X) \to E$. Число $p = m - n = \dim T_x^{\perp} F$ называется *коразмерностью* поверхности F. В каждой точке существует ортонормированный базис $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^{p}$ в плоскости $T_x^{\perp} F$, такой что соответствующие векторные поля ν_σ являются полями класса C^{r-1}.

Метрику на X, индуцированную погружением z и скалярным произведением в E, будем обозначать $I(z)$ (иногда просто I). В локальных координатах она записывается в виде

$$I(z) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

(см. [8, 26]), где

$$g_{ij} = z_{,i} \cdot z_{,j}\,, \tag{9.1}$$

точкой обозначено скалярное произведение в E (иногда мы будем обозначать его $\langle\,,\,\rangle$). Ковариантную производную по x^i всякого тензорного поля A на X относительно связности, определённой метрикой $I(z)$, будем обозначать через $A_{,i}$.

В случае C^r-погружения с $r \geqslant 2$ разложение ковариантных производных $z_{,ij}$ и $\nu_{\sigma,i}$ по базису $(z_{,i}\,; \nu_\sigma)$ в E приводит к *формулам Гаусса и Вейнгартена*:

$$z_{,ij} = \sum_{\sigma=1}^{p} b_{ij}^{\sigma} \nu_\sigma, \quad \nu_{\sigma,i} = -\sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} b_{ki}^{\sigma} z_{,l} + \sum_{\tau=1}^{p} \mu_{\sigma i}^{\tau} \nu_\tau, \tag{9.2}$$

где $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma = 1, \ldots, p$, g^{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице (g_{ij}), коэффициенты $b_{ij}^{\sigma} = z_{,ij} \cdot \nu_\sigma$ образуют дважды ковариантное симметрическое тензорное поле по индексам i, j, коэффициенты $\mu_{\sigma i}^{\tau} = \nu_\tau \cdot \nu_{\sigma,i}$ образуют один раз ковариантное тензорное поле по индексу i. Билинейная дифференциальная форма

$$\mathrm{II}^{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{\sigma} dx^i \otimes dx^j$$

называется *второй основной формой поверхности F относительно нормали ν_σ*, линейная дифференциальная форма

$$\varkappa_\sigma^\tau = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\sigma i}^{\tau} dx^i$$

называется *формой кручения* нормали ν_σ относительно нормали ν_τ. Формы $\varkappa_\sigma^\tau$ удовлетворяют условию $\varkappa_\sigma^\tau = -\varkappa_\tau^\sigma$.

В случае C^3-погружения условия интегрируемости формул Гаусса и Вейнгартена (9.2) приводят к *уравнениям Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи* [62]:

$$\sum_{\sigma=1}^{p}(b_{ik}^{\sigma}b_{jl}^{\sigma}-b_{il}^{\sigma}b_{jk}^{\sigma})=R_{ijkl},$$

$$b_{ij,k}^{\sigma}-b_{ik,j}^{\sigma}=\sum_{\tau=1}^{p}(b_{ik}^{\tau}\mu_{\tau j}^{\sigma}-b_{ij}^{\tau}\mu_{\tau k}^{\sigma}), \tag{9.3}$$

$$\mu_{\sigma i,j}^{\tau}-\mu_{\sigma j,i}^{\tau}=\sum_{k,l=1}^{n}g^{kl}(b_{kj}^{\tau}b_{il}^{\sigma}-b_{ki}^{\tau}b_{jl}^{\sigma})+\sum_{\rho=1}^{p}(\mu_{\rho i}^{\tau}\mu_{\sigma j}^{\rho}-\mu_{\rho j}^{\tau}\mu_{\sigma i}^{\rho}),$$

где R_{ijkl} — тензор кривизны метрики $I(z)$, вычисляемый по формулам

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}\right)+$$
$$+\sum_{h,s=1}^{n}g^{hs}(\Gamma_{jks}\Gamma_{ilh}-\Gamma_{jls}\Gamma_{ikh}),\quad \Gamma_{ikh}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h}\right), \tag{9.4}$$

$i,j,k,l=1,\ldots,n$, $\tau,\sigma=1,\ldots,p$.

Для гиперповерхности ($p=1$) формы кручения исчезают, формулы Гаусса и Вейнгартена принимают вид

$$z_{,ij}=b_{ij}\nu,\quad \nu_{,i}=-\sum_{k,l=1}^{n}g^{kl}b_{ki}z_{,l}\,, \tag{9.5}$$

где ν — поле единичных нормалей к поверхности, b_{ij} — коэффициенты второй основной формы II поверхности относительно нормали ν. Последнее равенство в (9.3) (уравнения Риччи) превращается в тождество, а два первых принимают вид

$$b_{ik}b_{jl}-b_{il}b_{jk}=R_{ijkl},\quad b_{ij,k}-b_{ik,j}=0. \tag{9.6}$$

Приведём классическую формулировку основной теоремы (теоремы Бонне) (см. [62, с. 231; 1, с. 99]).

Теорема 9.1. *Пусть на n-мерном многообразии X заданы положительно определённая билинейная дифференциальная форма*

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}dx^i\otimes dx^j$$

класса C^{r-1}, $r\geqslant 3$, p билинейных дифференциальных форм

$$B^{\sigma}=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^{\sigma}dx^i\otimes dx^j$$

класса C^{r-2} и $\frac{p(p-1)}{2}$ линейных дифференциальных форм

$$k_{\sigma}^{\tau}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{\sigma i}^{\tau}dx^i$$

класса C^{r-2}, где $k_\sigma^\tau = -k_\tau^\sigma$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$. Допустим, что коэффициенты этих форм удовлетворяют уравнениям (9.3), (9.4). *Тогда каждая точка x на X обладает такой окрестностью U, что существует C^r-вложение $z\colon U \to E$, удовлетворяющее следующим условиям*:

1) *метрика $I(z)$ на U, индуцированная вложением z, совпадает с ds^2*;
2) *в каждой точке из U в нормальной плоскости поверхности $z(U)$ в E существует ортонормированный базис $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$, относительно которого вторые основные формы II^σ и формы кручения $\varkappa_\sigma^\tau$ поверхности $z(U)$ совпадают с формами B^σ и k_σ^τ соответственно.*

Такое вложение z единственно с точностью до преобразования вида

$$P \cdot z + \omega, \tag{9.7}$$

где P — произвольная ортогональная $(m{\times}m)$-матрица, ω — произвольный вектор из E, точкой обозначено произведение матриц.

Эта теорема носит локальный характер, т. е. гарантирует погружаемость лишь каждой достаточно малой окрестности на X. В части единственности отсюда следует глобальный вариант. В части существования глобальному варианту основной теоремы в классической формулировке посвящены работы [24,146,147], в которых локальность заключения устраняется требованием односвязности многообразия X. В случае, когда X не является односвязным, оно заменяется на его односвязное накрытие. В [24] ослаблены также требования гладкости: класс C^r заменяется на класс W_q^r, $q > n$, функций, имеющих обобщённые производные по С. Л. Соболеву [55] до r-го порядка включительно, суммируемые со степенью q.

Римановым C^r-многообразием называют пару (X, ds^2), состоящую из n-мерного многообразия X и заданной на нём римановой метрики ds^2 класса C^r. Погружение $z\colon X \to E$, удовлетворяющее условию $I(z) = ds^2$, называется *изометрическим погружением* риманова многообразия (X, ds^2) в евклидово пространство E. Два погружения $z, \hat{z}\colon X \to E$ (а также соответствующие поверхности) будем называть *изометричными*, если $I(z) = I(\hat{z})$, и *конгруэнтными* или *тривиально изометричными*, если они различаются на движение в пространстве E, т. е. связаны равенством $\hat{z} = P \cdot z + \omega$, где $P = \mathrm{const}$ — ортогональная $(m \times m)$-матрица, $\omega = \mathrm{const}$ — вектор в E. Ясно, что конгруэнтные погружения изометричны. Обратное верно не всегда. Основная задача теории изгибаний — отыскание условий, при которых изометричные погружения конгруэнтны, или установление возможности существования изометричных, но не конгруэнтных погружений. Одним из наиболее общих предложений на пути решения данной задачи является основная теорема в части её единственности, которая с этой точки зрения может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 9.2. *Изометрические C^r-погружения $z, \hat{z}\colon X \to E$, $r \geqslant 3$, n-мерного риманова C^{r-1}-многообразия (X, ds^2) в m-мерное евклидово пространство E, $2 \leqslant n < m$, конгруэнтны тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$*

существуют ортонормированные базисы $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ *и* $(\hat\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ *в нормальных плоскостях* $T_x^\perp F$ *и* $T_x^\perp \hat F$, *относительно которых совпадают соответствующие вторые основные формы* II^σ *и* $\hat{\mathrm{II}}^\sigma$ *и соответствующие формы кручения* $\varkappa_\sigma^\tau$ *и* $\hat\varkappa_\sigma^\tau$, $\tau, \sigma = 1, \dots, p$.

Другие общие критерии конгруэнтности приводятся в разделе 9.4.

9.2. Инвариантная форма основной теоремы

Подробное изложение материала этого пункта содержится в [26, 95, 152, 153, 158, 159]. Рассмотрим C^r-погружение $z\colon X \to E$, $r \geqslant 2$, n-мерного многообразия X в m-мерное евклидово пространство E. Для произвольной точки $x \in X$ в нормальной плоскости $T_x^\perp F$ к поверхности $F = z(X)$ зафиксируем ортонормированный базис $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ и определим симметрическое билинейное отображение

$$\mathbf{II}\colon T_x(X) \times T_x(X) \to T_x^\perp F,$$

полагая

$$\mathbf{II}(u, v) = \sum_{\sigma=1}^p \mathrm{II}^\sigma(u, v)\nu_\sigma$$

для всяких векторов $u, v \in T_x(X)$. Отображение $\mathbf{II}$ не зависит от выбора базиса $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ и называется *векторнозначной второй основной формой* погружения z или поверхности F в точке x. В тензорной записи в локальных координатах на X векторнозначная вторая основная форма записывается в виде

$$\mathbf{II} = \sum_{\sigma=1}^p \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^\sigma dx^i \otimes dx^j \otimes \nu_\sigma$$

и является элементом пространства $T_x^*(X) \otimes T_x^*(X) \otimes T_x^\perp F$, где $T_x^*(X)$ — кокасательное пространство к многообразию X в точке x. Обозначая через $T^*(X)$ кокасательное расслоение многообразия X и через $T^\perp F$ — нормальное расслоение поверхности F, мы будем рассматривать форму $\mathbf{II}$ как C^{r-2}-гладкое сечение расслоения $T^*(X) \otimes T^*(X) \otimes T^\perp F$.

Часто в основу определения второй основной формы кладётся следующее её характеристическое свойство [26, 126]. Для произвольных векторных полей U и V на пространстве E через $\nabla'_U V$ будем обозначать ковариантную производную поля V в направлении поля U относительно связности на E, определяемой евклидовой метрикой. Для векторных полей u, v на X через $\nabla_u v$ обозначим ковариантную производную поля v в направлении поля u относительно связности, определяемой метрикой $I(z)$ на X. Пусть $T(X)$ — касательное расслоение многообразия X, $Tz\colon T(X) \to T(E)$ — касательное к погружению z отображение (часто его называют производным отображением или дифференциалом и обозначают z_*). Тогда справедливо равенство

$$\nabla'_{Tz(u)} Tz(v) = \nabla_u v + \mathbf{II}(u, v). \tag{9.8}$$

Определим ковариантное дифференцирование $\nabla^\perp$ в нормальном расслоении поверхности F, принимая для всякого поля нормалей ν поверхности F в E и всякого векторного поля u на X за $\nabla^\perp_u \nu$ в каждой точке $x \in X$ составляющую поля $\nabla'_{Tz(u)}\nu$, лежащую в нормальной плоскости $T^\perp_x F$. Тогда

$$\nabla'_{Tz(u)}\nu = \nabla^\perp_u \nu + A(u,\nu), \tag{9.9}$$

где $A\colon T(X) \times T^\perp(F) \to T(X)$ — билинейное отображение, связанное со второй основной формой $\mathbf{II}$ равенством $I(A(u,\nu),v) = -\langle \mathbf{II}(u,v),\nu\rangle$, $I(A,v)$ — скалярное произведение в метрике $I(z)$, $\langle\,,\,\rangle$ — скалярное произведение в E. Равенство (9.8) называется *формулой Гаусса*, а равенство (9.9) — *формулой Вейнгартена*.

При $r \geqslant 3$ для векторных полей u, v на многообразии X определим операторы

$$R(u,v)\colon T(X) \to T(X), \quad R^\perp(u,v)\colon T^\perp(F) \to T^\perp(F)$$

равенствами

$$R(u,v)w = \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u,v]}w,$$
$$R^\perp(u,v)\nu = \nabla^\perp_u(\nabla^\perp_v \nu) - \nabla^\perp_v(\nabla^\perp_u \nu) - \nabla^\perp_{[u,v]}\nu,$$

где $[u,v]$ — скобка Пуассона, действующая на всякую функцию f класса C^2 по правилу $[u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f))$. Оператор $R(u,v)$ называется оператором кривизны риманова многообразия (X,I), а когда u и v ортонормированные, выражение $I(R(u,v)v,u)$ называется секционной кривизной этого многообразия в двумерном направлении (u,v). Определим ещё отображение

$$\nabla_u A\colon T(X) \times T^\perp(F) \to T(X)$$

равенством

$$(\nabla_u A)(v,\nu) = \nabla_u(A(v,\nu)) - A(\nabla_u v,\nu) - A(v,\nabla^\perp_u \nu).$$

Так как метрика на E евклидова, то для всяких векторных полей U, V и W на пространстве E имеет место равенство

$$\nabla'_U(\nabla'_V W) - \nabla'_V(\nabla'_U W) - \nabla'_{[U,V]}W = 0.$$

Полагая здесь $U = Tz(u)$, $V = Tz(v)$, $W = Tz(w)$, отделяя касательную и нормальную к F составляющие, получим два уравнения. Если в качестве W взять поле нормалей ν, получим ещё два уравнения. Среди этих четырёх уравнений независимыми оказываются только три. С использованием формул Гаусса (9.8) и Вейнгартена (9.9) они приводятся к виду

$$\begin{gathered} I(R(u,v)w,s) = \langle \mathbf{II}(u,s),\mathbf{II}(v,w)\rangle - \langle \mathbf{II}(u,w),\mathbf{II}(v,s)\rangle, \\ \nabla_u A(v,\nu) = \nabla_v A(u,\nu), \\ \langle R^\perp(u,v)\nu,\nu'\rangle = \langle A(u,\nu'),A(v,\nu)\rangle - \langle A(u,\nu),A(v,\nu')\rangle, \end{gathered} \tag{9.10}$$

где u, v, w, s — произвольные векторные поля на X, ν, ν' — произвольные поля нормалей к поверхности F. Система уравнений (9.10) представляет собой систему уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи в инвариантной форме.

Пусть теперь $H(X)$ — локально тривиальное m-мерное векторное расслоение с базой X (расслоения и подрасслоения мы всюду обозначаем символами их тотальных пространств). Допустим, что в каждом слое $H_x(X)$ скалярное произведение $\langle\, ,\, \rangle_x \colon H_x(X) \times H_x(X) \to \mathbb{R}$ задано так, что функция $\langle \xi, \eta \rangle$ является функцией класса C^r на X для всяких C^r-гладких сечений $\xi, \eta \colon X \to H(X)$. Допустим ещё, что в расслоении $H(X)$ определена связность ∇', удовлетворяющая условию $u(\langle \xi, \eta \rangle) = \langle \nabla'_u \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla'_u \eta \rangle$ для всякого векторного поля u на X и всяких сечений ξ, η класса C^1 расслоения $H(X)$. Пару $(\langle\, ,\, \rangle, \nabla')$ назовём *метрической связностью* в $H(X)$. Если $G(X)$ — подрасслоение расслоения $H(X)$, то на $G(X)$ определяется *индуцированная метрическая связность* $(\langle\, ,\, \rangle, \nabla)$, где скалярное произведение понимается в $H(X)$, а ∇ — проекция ∇', определяемая равенством $\langle \nabla_u \xi, \eta \rangle = \langle \nabla'_u \xi, \eta \rangle$ для всякого векторного поля u на X и всяких сечений ξ, η класса C^1 расслоения $G(X)$. Если $f \colon T(X) \to G(X)$ — локальный диффеоморфизм [9] касательного расслоения многообразия X на подрасслоение $G(X)$, то скалярное произведение $\langle\, ,\, \rangle$ и метрическая связность $(\langle\, ,\, \rangle, \nabla')$ индуцируют риманову метрику на X и метрическую связность $(\langle\, ,\, \rangle, \nabla)$ на $T(X)$. Связность ∇ на $T(X)$ будет связностью Леви-Чивита индуцированной римановой метрики тогда и только тогда, когда она имеет нулевое кручение.

Пусть (X, ds^2) — риманово многообразие, $H(X)$ — векторное расслоение с метрической связностью $(\langle\, ,\, \rangle, \nabla')$. Эту связность будем называть *согласованной* с метрикой ds^2, если существует локальный диффеоморфизм расслоений $f \colon T(X) \to G(X) \subset H(X)$, для которого метрика на X, индуцированная скалярным произведением $\langle\, ,\, \rangle$, совпадает с ds^2, индуцированная метрическая связность на $T(X)$ совпадает со связностью Леви-Чивита метрики ds^2 и для всяких векторных полей u, v класса C^1 на X справедливо равенство $\nabla'_u v - \nabla_u v = \nabla'_v u - \nabla_v u$. В случае расслоения с метрической связностью, согласованной с метрикой ds^2, можно формально определить на X вторую основную форму равенством $\mathbf{II}(u, v) = \nabla'_u v - \nabla_u v$; последнее условие означает её симметрию.

Для евклидова пространства E скалярное произведение в E очевидным образом порождает плоскую метрическую связность на касательном расслоении $T(E)$. Для C^2-погружения $z \colon X \to E$ метрическая связность на $T(E)$ индуцирует метрические связности на расслоении $T(E)|_{z(X)}$, а также на касательном и нормальном расслоениях поверхности $F = z(X)$. Этим явлением определяется подход к рассмотрению уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи. Основная теорема в части существования может быть представлена в виде следующих двух предложений [126, 158, 159].

Теорема 9.3. *Пусть (X, ds^2) — n-мерное риманово многообразие. Следующие условия* а) *и* б) *эквивалентны*:

а) *существуют p-мерное локально тривиальное векторное расслоение $N(X)$ с метрической связностью $(\langle\, ,\, \rangle, \nabla^\perp)$ и симметрическое билинейное отображение $\alpha \colon T(X) \times T(X) \to N(X)$, удовлетворяющие условиям*

$$
\begin{gathered}
ds^2(R(u,v)w,s) = \langle \alpha(u,s), \alpha(v,w)\rangle - \langle \alpha(u,w), \alpha(v,s)\rangle,\\
\nabla_u A(v,\xi) = \nabla_v A(u,\xi),\\
\langle R^{\perp}(u,v)\xi, \eta\rangle = \langle A(u,\eta), A(v,\xi)\rangle - \langle A(u,\xi), A(v,\eta)\rangle,
\end{gathered}
\tag{9.11}
$$

где ∇ — связность Леви-Чивита метрики ds^2, $A\colon T(X)\times N(X) \to T(X)$ — билинейное отображение, определённое равенством

$$
I(A(u,\xi), v) = -\langle \alpha(u,v), \xi\rangle,
$$

R и $R^{\perp}$ определены формулами

$$
\begin{gathered}
R(u,v)w = \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u,v]} w,\\
R^{\perp}(u,v)\xi = \nabla^{\perp}_u(\nabla^{\perp}_v \xi) - \nabla^{\perp}_v(\nabla^{\perp}_u \xi) - \nabla^{\perp}_{[u,v]}\xi,
\end{gathered}
$$

u, v, w, s — произвольные векторные поля из $T(X)$, ξ, η — произвольные векторные поля из $N(X)$;

б) *существует $(n+p)$-мерное локально тривиальное векторное расслоение с плоской метрической связностью, согласованной с метрикой ds^2.*

Теорема 9.4. *Пусть (X, ds^2) — n-мерное односвязное риманово многообразие, E — m-мерное евклидово пространство. Если существует m-мерное локально тривиальное векторное расслоение $H(X)$ с плоской метрической связностью, согласованной с метрикой ds^2, то существует и погружение $z\colon X \to E$, для которого $I(z) = ds^2$ и расслоение $H(X)$ изоморфно расслоению $T(E)|_{z(X)}$.*

Для наиболее распространённого случая, когда в качестве $H(X)$ зафиксировано расслоение, каждый слой которого совпадает с векторной частью пространства E, две последние теоремы приведены в [152, гл. 7, § 18], а для случая $m = n+1$ — в [26, гл. 7, § 7].

Два m-мерных локально тривиальных векторных расслоения $H(X)$ и $H'(X)$ с метрическими связностями $(\langle\,,\,\rangle, \nabla')$ и $(\langle\,,\,\rangle', \nabla'')$ соответственно назовём *эквивалентными*, если существует такое отображение расслоений

$$
\Psi\colon H(X) \to H'(X),
$$

что

$$
\langle \Psi(\xi), \Psi(\eta)\rangle' = \langle \xi, \eta\rangle, \quad \Psi(\nabla'_u \xi) = \nabla''_u \Psi(\xi)
$$

для всяких векторных полей ξ, η из $H(X)$ и всякого векторного поля u на X. В части единственности основная теорема может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 9.5. *Если для C^3-погружений $z, z'\colon X \to E$ метрики $I(z)$ и $I(z')$ совпадают и расслоения $T(E)|_{z(X)}$ и $T(E)|_{z'(X)}$ с индуцированными метрическими связностями эквивалентны, то погружения z и z' конгруэнтны.*

В случае односвязных многообразий существует взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности расслоений с плоскими метрическими связностями, согласованными с данной метрикой, и классами конгруэнтных изометрических погружений.

9.3. Основная теорема в терминах внешних форм

Пусть U — окрестность на гладком n-мерном многообразии X. *Локальным C^r-корепером* с областью определения U на X называется упорядоченный набор $(\tau^i)_{i=1}^n$ линейных дифференциальных форм класса C^r на X, линейно независимых в каждой точке $x \in U$. При $r \geqslant 1$ по заданному локальному кореперу следующими равенствами однозначно определяются *формы связности* Φ_j^i:

$$d\tau^i = \sum_{j=1}^n \tau^j \wedge \Phi_j^i, \quad \Phi_j^i = -\Phi_i^j, \tag{9.12}$$

где d — знак внешнего дифференциала, $i, j = 1, \ldots, n$. Совокупность 1-форм $\Phi = (\Phi_j^i)_{i,j=1}^n$ называется *связностью Леви-Чивита* корепера $(\tau^i)_{i=1}^n$. Коэффициенты Γ_{jk}^i в разложении

$$\Phi_j^i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i \tau^k$$

называются *символами Кристоффеля* связности Φ. По символам Кристоффеля точно так же, как в классическом тензорном анализе, строится аппарат ковариантного дифференцирования.

Рассмотрим C^r-погружение $z\colon X \to E$, $r \geqslant 1$, многообразия X в m-мерное евклидово пространство E. В некоторой окрестности каждой точки на поверхности $F = z(X)$ можно указать локальный ортонормированный C^{r-1}-репер $(e_1, \ldots, e_n, \nu_1, \ldots, \nu_p)$ в E, такой что поля e_i касательны к F. Этот репер определяет локальный корепер $(\tau^i)_{i=1}^n$ на X равенством

$$dz = \sum_{i=1}^n \tau^i e_i. \tag{9.13}$$

При этом для метрики $I(z)$ справедливо разложение

$$I(z) = \sum_{i=1}^n \tau^i \otimes \tau^i. \tag{9.14}$$

При $r \geqslant 2$ разложения дифференциалов de_i, $d\nu_\sigma$ по реперу $(e_1, \ldots, e_n, \nu_1, \ldots, \nu_p)$ приводят к формулам Гаусса и Вейнгартена

$$de_i = \sum_{k=1}^n \Phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^p \omega_i^\sigma \nu_\sigma, \quad d\nu_\sigma = -\sum_{i=1}^n \omega_i^\sigma e_i + \sum_{\rho=1}^p \varkappa_\sigma^\rho \nu_\rho, \tag{9.15}$$

где ω_i^σ, $\varkappa_\sigma^\rho$ — 1-формы класса C^{r-2}, называемые формами *погружения* и *кручения* соответственно, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma, \rho = 1, \ldots, p$. Внешнее дифференцирование равенства (9.13) даёт

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^\sigma \wedge \tau^i = 0. \tag{9.16}$$

Если разложение форм погружения по формам τ^i имеет вид

$$\omega_i^\sigma = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^\sigma \tau^j,$$

то по лемме Картана [59, гл. 2, § 7] из (9.16) следует симметрия $b_{ij}^\sigma = b_{ji}^\sigma$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma = 1, \ldots, p$. Вторая основная форма поверхности F относительно нормали ν_σ может быть записана в виде

$$\mathrm{II}^\sigma = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^\sigma \otimes \tau^i.$$

Для форм кручения из формул Вейнгартена получаем равенства

$$\varkappa_\sigma^\rho = -\varkappa_\rho^\sigma, \quad \rho, \sigma = 1, \ldots, p. \tag{9.17}$$

При $r \geqslant 3$ внешнее дифференцирование формул Гаусса и Вейнгартена приводит к *уравнениям Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи*:

$$\begin{gathered}
\sum_{\sigma=1}^{p} \omega_i^\sigma \wedge \omega_j^\sigma = d\Phi_j^i + \sum_{k=1}^{n} \Phi_k^i \wedge \Phi_j^k, \\
d\omega_i^\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Phi_i^k \wedge \omega_k^\sigma + \sum_{\tau=1}^{p} \omega_i^\tau \wedge \varkappa_\tau^\sigma, \\
d\varkappa_\sigma^\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^\tau \wedge \omega_i^\sigma + \sum_{\rho=1}^{p} \varkappa_\sigma^\rho \wedge \varkappa_\rho^\tau, \\
i, j = 1, \ldots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \ldots, p.
\end{gathered} \tag{9.18}$$

Эти уравнения справедливы и для погружений класса C^2 (см. [36]), если под d понимать знак обобщённого внешнего дифференцирования в смысле де Рама [13].

Основная теорема теории поверхностей может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 9.6. *Пусть на односвязном гладком n-мерном многообразии X заданы локальный C^{r-1}-корепер $(\tau^i)_{i=1}^n$, $r \geqslant 3$, а также линейные C^{r-2}-формы Φ_j^i, ω_i^σ, $\varkappa_\sigma^\rho$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\rho, \sigma = 1, \ldots, p$, удовлетворяющие условиям* (9.12), (9.16), (9.17), (9.18). *Тогда существует C^r-погружение $z\colon X \to E$, для которого индуцированная метрика имеет вид* (9.14), *формы Φ_j^i являются формами связности, формы ω_i^σ являются формами погружения, формы $\varkappa_\sigma^\rho$ — формами кручения. Это погружение определяется однозначно с точностью до преобразования вида* (9.7).

В представленной формулировке, в случае многообразия произвольного топологического строения, теорема гарантирует существование погружения z в каждой односвязной окрестности из области определения локального корепера $(\tau^i)_{i=1}^n$. Отсюда вытекает глобальная единственность этого погружения. Область определения корепера $(\tau^i)_{i=1}^n$ может быть проигнорирована следующим образом. Допустим, что на X задана риманова метрика ds^2. Методом Лагранжа в некоторой окрестности каждой точки на X она может быть приведена к виду $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau^i \otimes \tau^i$, где $(\tau^i)_{i=1}^n$ — локальный корепер той же гладкости, что и метрика. Связность Φ этого корепера называется *связностью метрики* ds^2. Эквивалентная формулировка теоремы 9.6 имеет следующий вид.

Теорема 9.7. *Пусть на n-мерном односвязном гладком многообразии X задана риманова метрика ds^2 класса C^{r-1}, $r \geqslant 3$, со связностью $\Phi = (\Phi^i_j)^n_{i,j=1}$. Для всякого решения $\{\omega^\sigma_i, \varkappa^\rho_\sigma\}$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma, \rho = 1, \ldots, p$, класса C^{r-2} системы* (9.18) *существует C^r-погружение $z\colon X \to E$ $(\dim E = n+p)$, индуцирующее метрику ds^2, для которого формы ω^σ_i являются формами погружения, а формы $\varkappa^\rho_\sigma$ — формами кручения. Погружение z определяется однозначно с точностью до преобразования вида* (9.7).

Доказательство этой теоремы в локальной формулировке для случая двумерного многообразия и трёхмерного евклидова пространства приведено в [59, гл. 3, § 5]. Оно без особого труда может быть распространено на случай произвольных размерностей. В глобальной формулировке для односвязного X теорема доказана Ю. Е. Боровским [4—7] при минимальных требованиях гладкости с использованием техники обобщённого внешнего дифференцирования. Им показано, что если решение системы уравнений (9.18) принадлежит классу L_p, где $p \geqslant n$ при $n > 2$ и $p > n$ при $n = 2$, то погружение z принадлежит классу W^1_2.

9.4. Некоторые общие критерии конгруэнтности и однозначной определённости

Основная теорема теории поверхностей в каждом из трёх представленных в предыдущих разделах вариантов в определённом смысле может рассматриваться как критерий конгруэнтности поверхностей. Грубо говоря, этот критерий заключается в том, что для конгруэнтности поверхностей необходимо и достаточно совпадение их первых и вторых основных форм. Однако это утверждение, являющееся достаточно точным для гиперповерхностей, в случае коразмерности $p > 1$ требует уточнения. Дело в том, что по основной теореме каждому решению уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи (при соблюдении условий гладкости) соответствует единственная с точностью до положения в пространстве поверхность. Но при этом возможны случаи, когда различным решениям соответствуют конгруэнтные поверхности. Например, изменением базиса нормальной плоскости можно изменять вторые основные формы, не изменяя самой поверхности, а значит, определять данную поверхность различными решениями уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи. Такой ситуации не возникает при использовании основной теоремы в инвариантной форме (теорема 9.5), однако проверка условий этой теоремы весьма затруднительна, а потому затруднительно и использование её в качестве критерия конгруэнтности. Возникает задача описания класса решений уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи (9.2) и (9.18), задающих конгруэнтные поверхности.

В этом направлении следует отметить работу К. Номидзу [141], в которой, в частности, доказано, что для конгруэнтности двух погружений необходимо и достаточно существование изоморфизма нормальных расслоений соответствующих поверхностей, сохраняющего первые и вторые основные формы, и параллельность вторых основных форм.

В качестве другого критерия конгруэнтности может быть использована следующая теорема [39].

Теорема 9.8. *Для конгруэнтности C^2-погружений $z\colon X \to E$ и $\hat{z}\colon X \to E$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

а) $I(z) = I(\hat{z})$;

б) *в некоторой окрестности каждой точки на X формы погружения ω_i^σ, $\hat{\omega}_i^\sigma$ и кручения $\varkappa_\sigma^\rho$, $\hat{\varkappa}_\sigma^\rho$ погружений z и $\hat{z}$ соответственно связаны равенствами*

$$\hat{\omega}_i^\sigma = \sum_{\rho=1}^{p} \varphi_\sigma^\rho \omega_i^\rho, \quad \hat{\varkappa}_\sigma^\rho = \frac{1}{2}\sum_{\chi=1}^{p}(d\varphi_\sigma^\chi \varphi_\rho^\chi - d\varphi_\rho^\chi \varphi_\sigma^\chi) + \sum_{\chi,\varepsilon=1}^{p} \varphi_\sigma^\chi \varphi_\rho^\varepsilon \varkappa_\chi^\varepsilon,$$

$i = 1, \ldots, n$, $\sigma, \rho = 1, \ldots, p$, где φ_σ^ρ — функции класса C^1, такие что матрица

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \ldots & \varphi_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^p & \ldots & \varphi_p^p \end{pmatrix}$$

ортогональна.

В классических обозначениях аналогичная теорема формулируется следующим образом.

Теорема 9.9. *Для конгруэнтности C^2-погружений $z\colon X \to E$ и $\hat{z}\colon X \to E$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

а) $I(z) = I(\hat{z})$;

б) *в некоторой окрестности каждой точки на X коэффициенты вторых основных форм b_{ij}^σ, $\hat{b}_{ij}^\sigma$ и коэффициенты форм кручения $\mu_{\sigma i}^\rho$, $\hat{\mu}_{\sigma i}^\rho$ погружений z и $\hat{z}$ соответственно связаны равенствами*

$$\hat{b}_{ij}^\sigma = \sum_{\rho=1}^{p} \varphi_\sigma^\rho b_{ij}^\rho, \quad \hat{\mu}_{\sigma i}^\rho = \frac{1}{2}\sum_{\chi=1}^{p}(\varphi_{\sigma,i}^\chi \varphi_\rho^\chi - \varphi_{\rho,i}^\chi \varphi_\sigma^\chi) + \sum_{\chi,\varepsilon=1}^{p} \varphi_\sigma^\chi \varphi_\rho^\varepsilon \mu_{\chi i}^\varepsilon,$$

где φ_σ^ρ определены как в теореме 9.8, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma, \rho = 1, \ldots, p$.

При $p = 1$ теоремы 9.8 и 9.9 совпадают с основной теоремой в части единственности.

Следствие 9.1. *Для конгруэнтности двух гиперповерхностей класса C^2 необходимо и достаточно совпадение их первых и, с точностью до знака, вторых основных форм.*

Погружение $z\colon X \to E$ (поверхность $F = z(X)$) называется *однозначно определённым* (*однозначно определённой*) своей метрикой в данном классе погружений (поверхностей), если всякое погружение $\hat{z}\colon X \to E$ из этого класса, для которого $I(\hat{z}) = I(z)$, конгруэнтно погружению z. В вопросах об однозначной определённости наиболее распространённым классом является класс C^r-погружений $X \to E$, который мы будем обозначать через $\mathcal{D}^r(X, E)$, $r = 1, \ldots, \infty, \omega$ (через $\mathcal{D}^\omega(X, E)$ обозначается множество аналитических погружений).

Понятие однозначной определённости включает в себя как частный случай понятие неизгибаемости. Множество $\mathcal{D}^r(X, E)$ является открытым множеством (а значит, подмногообразием [8, 27]) линейного пространства $C^r(X, E)$ всех C^r-отображений $X \to E$. *Изгибанием* погружения $z \in \mathcal{D}^r(X, E)$ (поверхности $F = z(X)$) в классе C^r будем называть непрерывное семейство отображений $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{D}^r(X, E)$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям:

1) $f(0) = z$;

2) метрика $I(f(t))$ не зависит от $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Изгибание погружения z будем называть *тривиальным*, если оно имеет вид $f(t) = P(t) \cdot z + \omega(t)$, где для каждого $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $P(t)$ — ортогональная $(m \times m)$-матрица, постоянная на X, $\omega(t)$ — постоянный на X вектор из E. Погружение z (поверхность F) называется *изгибаемым* (*изгибаемой*) в данном классе, если оно допускает нетривиальное изгибание в этом классе, и *неизгибаемым* (*неизгибаемой*), если каждое его (её) изгибание в этом классе тривиально.

В качестве критерия однозначной определённости погружений в классе C^r, $r \geqslant 1$, может быть использована следующая теорема [41], доказательство которой базируется на исследовании уравнений Шлефли (9.1) относительно z.

Теорема 9.10. *Пусть $z\colon X \to E$ — C^r-погружение, $r \geqslant 1$, n-мерного многообразия X в m-мерное евклидово пространство E, индуцирующее на X метрику $I(z) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $(g^{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица, обратная к матрице $(g_{ij})_{i,j=1}^n$. Погружение z однозначно определено в классе C^r тогда и только тогда, когда существуют функции v_σ^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, $\sigma = 1, \ldots, p = m - n$, класса C^{r-1}, для которых всякое решение $(u^\alpha)_{\alpha=1}^m$ системы уравнений*

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} + \sum_{\sigma=1}^{p} v_\sigma^\alpha v_\sigma^\beta = \delta^{\alpha\beta},$$

где $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$, имеет вид

$$u^\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} p_\beta^\alpha z^\beta + \omega^\alpha,$$

где $(p_\beta^\alpha)_{\alpha,\beta=1}^m$ — ортогональная матрица с постоянными на X элементами, z^α — компоненты погружения z относительно фиксированной прямоугольной декартовой системы координат в E, $\omega^\alpha = \mathrm{const}$.

Практически все утверждения этого раздела без особого труда модифицируются на случай, когда E является *плоским* пространством, т. е. аффинным пространством с невырожденным скалярным произведением, или пространством *постоянной кривизны* (гиперсферой плоского пространства).

§ 10. Изометрии и изгибания

10.1. Однозначная определённость и неизгибаемость гиперповерхностей

По-видимому, первый результат, относящийся к проблеме однозначной определённости многомерных поверхностей, принадлежит Р. Бицу [76,77], показавшему, что при $n \geqslant 3$, за исключением некоторых случаев типа вырождения, всякая n-мерная поверхность класса C^3 в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве однозначно определена своей метрикой в классе C^3. Исследование этого явления проводилось в работах В. Киллинга [129], Л. Бианки [79,80], Э. Картана [85], Т. Томаса [165], Л. П. Эйзенхарта [62], С. Дольбо-Лемуена [113] и др. Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 10.1. *Пусть* $z\colon X \to E - C^2$*-погружение* n*-мерного многообразия* X *в* $(n+1)$*-мерное плоское пространство* E *со второй основной формой* $\mathrm{II}(z) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} dx^i \otimes dx^j$. *Если* $\operatorname{rang} \mathrm{II}(z) \equiv \operatorname{rang}(b_{ij}) \geqslant 3$ *в каждой точке на* X, *то погружение* z *однозначно определено своей метрикой в классе* C^2.

Отметим, что теорема Бица утверждает *локальную* однозначную определённость, т. е. однозначную определённость сколь угодно малой окрестности каждой точки, в которой $\operatorname{rang} \mathrm{II}(z) \geqslant 3$. Важно также отметить, что в сравниваемых изометричных поверхностях класса C^2 условие на ранг $\operatorname{rang} \mathrm{II} \equiv \operatorname{rang}(b_{ij}) \geqslant 3$ достаточно предположить выполненным лишь для *одной* поверхности, тогда все изометричные с ней поверхности будут ей конгруэнтны и, в частности, у них будет тот же ранг второй квадратичной формы.

Простое доказательство этой теоремы приводится в [1,62,153]. Основывается оно на результате Т. Томаса о том, что при $\operatorname{rang} \mathrm{II}(z) \geqslant 3$ система уравнений Гаусса (9.3_1) допускает не более одного решения относительно (b_{ij}). Этот факт имеет важные следствия не только для проблемы однозначной определённости. Поскольку система (9.3_1) является алгебраической, то дифференциальная геометрия указанных поверхностей лишается дифференциальной сущности и может быть отнесена к одному из разделов алгебраической геометрии (по этому поводу см. [89]).

Условия на гладкость гиперповерхности в теореме Бица могут быть ослаблены. Так, в [6] она доказана для гиперповерхностей класса W_1^1 (см. с. 8) при условии, что формы локального корепера τ^i и формы погружения ω_i интегрируемы с квадратом (т. е. принадлежат классу L_2). Особенно интересным этот результат представляется на фоне работ Н. Кейпера [131, 132] (имеется перевод в [22]) и Д. Бликкера [82]. В этих работах с использованием результатов Дж. Нэша из [140] (перевод в [44]) доказывается, что при достаточно общих условиях топологического характера ни одна поверхность класса C^1 евклидова пространства не является однозначно определённой в классе C^1.

Из теоремы Бица следует, что неоднозначно определёнными (например, в классе C^2) в окрестности каждой точки гиперповерхностями евклидова пространства могут быть только поверхности, у которых ранг второй основной формы не превосходит 2. Поэтому условие $\operatorname{rang} \mathrm{II}(z) \leqslant 2$ можно рассматривать как необходимое условие изгибаемости. Опираясь на этот факт, У. Сбрана [148] и Э. Картан [85] исследовали строение и дали полную классификацию изгибаемых гиперповерхностей. Современное описание этой классификации дано в [101], где также рассмотрен случай гиперповерхностей в сферическом и гиперболическом пространствах. Из четырёх классов теоретически возможных неоднозначно определённых гиперповерхностей до недавнего времени под вопросом оставалось реальное существование поверхностей четвёртого типа (каждая из которых имеет только одну нетривиально изометричную ей поверхность).

В 1998 г. появились две работы с доказательством существования таких пар поверхностей. А именно, в [118] с использованием строения так называемых ортогонально-гиперболических полусимметрических римановых пространств показано, что локальная изометрическая реализация каждого такого пространства в $\mathbb{R}^4$ в общем положении состоит ровно из двух неконгруэнтных гиперповерхностей, а в [101] вопрос решён в общей размерности: дан метод построения требуемой пары поверхностей в $\mathbb{R}^n$ через пересечение двух гиперповерхностей некоторого специального вида из пространства на единицу большей размерности. В этой же работе на примерах продемонстрировано, что гладкая неоднозначно определённая поверхность в целом может состоять из областей различных классов (как, например, развёртывающаяся поверхность в E^3 в целом может быть объединением цилиндрических, конических и торсиальных областей), что подтверждает локальную природу классификации Сбрана—Картана. В [60, 134, 151] изучено строение гиперповерхностей, допускающих изгибания с сохранением средней кривизны. В частности, в [134] показано, что если погружение $z\colon X \to E$ аналитично, то такие поверхности исчерпываются следующими:

а) минимальная гиперповерхность;
б) открытая область цилиндра $M^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, где M^2 — локально изгибаемая с сохранением средней кривизны двумерная поверхность в трёхмерном евклидовом пространстве;
в) открытая область цилиндра $CN \times \mathbb{R}^{n-3}$, где N — локально изгибаемая с сохранением средней кривизны двумерная поверхность на трёхмерной сфере, CN — трёхмерный конус над N в четырёхмерном евклидовом пространстве.

Без условия аналитичности возможны комбинации этих трёх случаев.

Изгибания гиперповерхностей с условием $\operatorname{rang}\mathrm{II}(z) \leqslant 2$ рассматривались в [94], а случай полных гиперповерхностей в E^4 – в [138] (в связи с этой статьей см. [100], где отмечена некорректность одного её результата). Глобальное строение локально изгибаемой гиперповерхности с постоянной скалярной кривизной $k \neq 0$ изучалось в [119, 120]. Показано, что всякая полная такая поверхность изометрична произведению двумерной сферы радиуса $\frac{1}{k}$ на евклидову плоскость размерности $n-2$. В [137] приведены примеры изгибаемых гиперповерхностей в гиперболическом пространстве H^{n+1}.

В силу теоремы 10.1 многие предложения об однозначной определённости и неизгибаемости двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве в случае гиперповерхностей более высокой размерности становятся тривиальными. Вместе с тем имеются результаты с ослабленным требованием на ранг второй основной формы, а значит, не являющиеся простыми следствиями теоремы 10.1. Наиболее известный из них принадлежит Р. Сакстедеру. В его работах [144, 145] доказана следующая теорема.

Теорема 10.2. *Пусть $z\colon X \to E$ — C^2-погружение n-мерного многообразия X в $(n+1)$-мерное евклидово пространство E, удовлетворяющее условиям:*

1) *метрическое пространство $(X, I(z))$ полно;*
2) *существует точка на X, в которой $r = \operatorname{rang}\mathrm{II}(z) \geqslant 3$;*
3) *множество точек на X, в которых $\mathrm{II}(z) \neq 0$, связно;*
4) *не существует подмногообразия в X, гомеоморфно отображаемого погружением z на полную $(n-r+1)$-мерную плоскость в E.*

Тогда погружение z однозначно определено своей метрикой в классе C^2.

Эта теорема является следствием другой теоремы Сакстедера, усиливающей отмеченный на с. 18 результат Томаса.

Теорема 10.3. *Пусть $z\colon X \to E$ и $\hat{z}\colon X \to E$ — C^2-погружения n-мерного многообразия X в $(n+1)$-мерное евклидово пространство E, удовлетворяющие условиям:*

1) *метрическое пространство $(X, I(z))$ полно;*
2) $I(z) = I(\hat{z})$;
3) $r \equiv \max\limits_X \operatorname{rang}\mathrm{II}(z) \geqslant 3$;
4) *не существует подмногообразия в X, гомеоморфно отображаемого погружением z на полную $(n-r+1)$-мерную плоскость в E.*

Тогда $\mathrm{II}(\hat{z}) = \pm\mathrm{II}(z)$ на X.

В свою очередь, эта теорема является следствием следующего тонкого результата Сакстедера.

Теорема 10.4. *Пусть $z\colon X \to E$ и $\hat{z}\colon X \to E$ — C^2-погружения n-мерного многообразия X в $(n+1)$-мерное евклидово пространство E, Y — n-мерное подмногообразие в X, такое что всякая последовательность Коши в пространстве $(Y, I(z))$ имеет предел в X. Допустим, что выполнены условия:*

1) $I(z) = I(\hat{z})$;
2) $r \equiv \max\limits_{Y} \operatorname{rang} \mathrm{II}(z) < n$;
3) *не существует подмногообразия в* X, *гомеоморфно отображаемого погружением* z *на полную* $(n-r)$*-мерную плоскость в* E.

Тогда если $\mathrm{II}(\hat{z}) = \pm\mathrm{II}(z)$ *на границе многообразия* Y, *то* $\mathrm{II}(\hat{z}) = \pm\mathrm{II}(z)$ *на всем* Y.

Если в этой теореме в качестве Y взять подмногообразие, замыкание $\bar{Y}$ которого есть X, то получим аналог известной теоремы о том, что развёртывающаяся двумерная поверхность в трёхмерном евклидовом пространстве определяется своей граничной полосой.

Из результатов Сакстедера выводится, что всякая замкнутая выпуклая C^2-гладкая гиперповерхность евклидова пространства однозначно определена своей метрикой в классе C^2-гладких погружений. Аналогичный результат получен в [112] для C^∞-погружений в пространство постоянной положительной кривизны. Е. П. Сенькиным [52] доказана однозначная определённость *общих* (тех, у которых непрерывность — единственное требование гладкости) замкнутых выпуклых гиперповерхностей евклидова пространства в классе выпуклых поверхностей, а также локальная однозначная определённость в окрестностях точек строгой выпуклости. В [11] результаты Е. П. Сенькина распространены на случай эллиптического пространства.

Для погружений в пространство произвольной ненулевой постоянной кривизны в [135] доказана следующая теорема.

Теорема 10.5. *Пусть* $z\colon X \to V$ *и* $\hat{z}\colon X \to V$ — C^3*-погружения с ненулевой постоянной средней кривизной* n*-мерного,* $n \geqslant 3$, *многообразия* X *в* $(n+1)$*-мерное пространство* V *ненулевой постоянной кривизны. Тогда если* $I(z) = I(\hat{z})$, *то* $\hat{z}$ *и* z *конгруэнтны.*

В [103] показано, что если гиперповерхность $F \subset E$ не содержит открытого множества $Y \times \mathbb{R}^{n-3}$ с неограниченным Y, то однозначная определённость может нарушаться только вдоль линейчатых полос (компонент). Если же F нигде не является вполне линейчатой (т. е. не содержит областей, состоящих из полных прямых) и множество точек уплощения не разбивает её на компоненты связности, то F однозначно определена своей метрикой. В [106] доказана однозначная определённость в C^3 полной гиперповерхности Вейнгартена (средняя и скалярные кривизны связаны функциональным соотношением), расположенной в $(n+1)$-мерном, $n \geqslant 4$, евклидовом пространстве и не содержащей открытого подмножества вида $Y \times \mathbb{R}^{n-3}$ с неограниченным Y.

10.2. Однозначная определённость и неизгибаемость поверхностей с коразмерностью $p > 1$

Проблема однозначной определённости поверхностей коразмерности $p > 1$ долгое время решалась путём обобщения соответствующих результатов для гиперповерхностей. Первый из таких результатов — теорема Бица (теорема 10.1) — был обобщён К. Б. Аллендорфером [75] в 1939 г. Центральное место в теореме Аллендорфера занимает понятие типового числа погружения, являющееся обобщением понятия ранга второй основной формы на случай погружения с коразмерностью $p > 1$. Определение типового числа Аллендорфера подвергалось обработке многими авторами (см. [26,63—73,90,91,95,115,130]). Приведём определение типового числа, следуя [26, с. 317].

Пусть $z\colon X \to E$ — C^2-погружение n-мерного многообразия X в m-мерное евклидово пространство E, $F = z(X)$ — соответствующая поверхность. В произвольной точке $x \in X$ зафиксируем ортонормированный в метрике $I(z)$ базис $\xi = (\xi_i)_{i=1}^n$ касательного пространства $T_x(X)$. Тогда векторы $e_i = \xi_i(z)$ образуют ортонормированный базис $e = (e_i)_{i=1}^n$ касательной плоскости T_xF поверхности F. Зафиксируем ещё ортонормированный базис $\nu = (\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ в нормальной плоскости $T^\perp F$ и обозначим через ω_i^σ соответствующие формы погружения (с. 13), а через II^σ — вторую основную форму относительно нормали ν_σ. В том случае, когда среди форм $\mathrm{II}^1, \ldots, \mathrm{II}^p$ имеется ровно q линейно независимых, $q < p$, базис ν можно выбрать так, чтобы $\mathrm{II}^{q+1} = \ldots = \mathrm{II}^p = 0$. В дальнейшем базис ν предполагается выбранным именно таким образом. Относительно этого базиса имеем $\omega_i^{q+1} = \ldots = \omega_i^p = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Согласно [46], q-мерное подпространство N_x пространства $T_x^\perp F$, порождённое векторами $\nu_1, \ldots, \nu_q$, называется *главным нормальным пространством* погружения z (поверхности F).

Для каждого фиксированного $\sigma = 1, \ldots, q$ определим линейное отображение $\omega^\sigma\colon T_x(X) \to T_x(X)$, полагая $\omega^\sigma(u) = \sum\limits_{i=1}^n \langle \omega_i^\sigma, u\rangle \xi_i$ для всякого вектора $u = \sum\limits_{i=1}^n u^i \xi_i \in T_x(X)$, где $\langle\,,\,\rangle$ — спаривание. *Типовым числом* погружения z (поверхности F) *в точке* $x \in X$ называется максимальное из целых чисел t, таких что в $T_x(X)$ найдётся t векторов $u_1, \ldots, u_t$, для которых qt векторов $\omega^\sigma(u_\lambda)$, $\sigma = 1, \ldots, q$, $\lambda = 1, \ldots, t$, линейно независимы. Один из способов вычисления типового числа основан на следующем предложении, для формулировки которого нам понадобятся некоторые понятия из теории пространственных матриц [56]. Пусть $\tau = (\tau^i)_{i=1}^n$ — базис кокасательного пространства $T_x^*(X)$, дуальный к базису ξ, и пусть вторые основные формы имеют вид

$$\mathrm{II}^\sigma = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^\sigma \tau^i \otimes \tau^j.$$

Рассмотрим трёхмерную матрицу $B = (b_{ij}^\sigma)$ размера $n \times n \times q$. *Двумерным рангом матрицы* B по левому нижнему индексу называется ранг двумерной матрицы B' размера $n \times nq$, получаемой из B «вытягиванием в линию» сечений $i = \mathrm{const}$. Строки матрицы B' состоят из элементов b_{ij}^σ с одинаковыми парами (j, σ). *Подматрицей* размера $n \times t \times q$ $(t < q)$ матрицы B будем называть всякую трёхмерную матрицу, получаемую из B удалением $n - t$ сечений $j = \mathrm{const}$.

Теорема 10.6. *Типовое число погружения z в точке $x \in X$ есть максимальное из целых чисел t, таких что существует подматрица размера $n \times t \times q$*

трёхмерной матрицы $B = (b_{ij}^{\sigma})$, двумерный ранг которой по левому нижнему индексу равен qt.

Теорема Аллендорфера об однозначной определённости может быть сформулирована следующим образом [75, 130, 153].

Теорема 10.7. *Пусть многообразие X односвязно, и пусть C^2-погружение $z\colon X \to E$ имеет во всех точках $x \in X$ одну и ту же размерность $q \leqslant p$ главного нормального пространства и типовые числа $t(x) \geqslant 3$. Тогда поверхность F содержится в некотором $(n+q)$-мерном подпространстве E^{n+q} и однозначно определена своей метрикой в классе C^2-гладких погружений в пространство E^{n+q}.*

Односвязность многообразия X в этой теореме нужна только в части принадлежности пространству E^{n+q}. Действительно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.8. *Если в каждой точке $x \in X$ размерность главного нормального пространства C^2-погружения $z\colon X \to E$ совпадает с коразмерностью p и типовое число $t(x)$ не меньше 3, то поверхность $F = z(X)$ однозначно определена своей метрикой в классе C^2.*

В отличие от предыдущей теоремы, эта теорема носит локальный характер в том смысле, что однозначной определённостью обладает любая окрестность любой точки на поверхности F. В свою очередь, в части принадлежности пространству E^{n+q} может быть ослаблено ограничение на типовое число в теореме 10.7.

Теорема 10.9. *Если многообразие X односвязно и погружение $z\colon X \to E$ в каждой точке $x \in X$ имеет размерность главного нормального пространства $q \leqslant p$, а типовое число $t(x)$ не меньше 2, то поверхность F содержится в некотором E^{n+q}.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [75, 91], а также в [153, гл. 12, с. 362]. Доказательство теоремы 10.8 — в [75], а также в [72, 73]. Доказательство теоремы 10.8 приводится также в [26], однако лежащая в его основе лемма 2 на с. 319 нуждается в исправлениях. Отметим, что теоремы 10.7—10.9 в указанных работах доказаны для погружения класса C^3. На погружения класса C^2 они могут быть распространены средствами аппроксимации.

В ряду работ, посвящённых теореме Аллендорфера, особое положение занимают работы Н. Н. Яненко [63—73], которые, по-видимому, для многих современных специалистов остаются неизвестными. Из теоремы Аллендорфера следует, что неоднозначно определёнными поверхностями в E могут быть только поверхности с типовым числом $t \leqslant 2$. Поэтому условие $t \leqslant 2$ можно рассматривать как необходимое условие изгибаемости. Н. Н. Яненко получены новые необходимые условия изгибаемости, исследована структура изгибаемых поверхностей (включая вопросы соизгибаемости, или продолжения изгибаний в современной терминологии, см. с. 28) и дана их классификация. Выделенные им классы изгибаемых поверхностей инвариантны относительно проективных преобразований пространства E.

Теорема Аллендорфера является первым, но далеко не единственным результатом об однозначной определённости погружений с коразмерностью $p > 1$. Во многих случаях условие $t(z) \geqslant 3$ является слишком жёстким для однозначной определённости. Действительно, типовое число удовлетворяет неравенству $qt(z) \leqslant n$, где n — размерность поверхности, q — размерность главного нормального пространства. Это означает, например, что при $q \geqslant 2$ однозначная определённость по Аллендорферу может утверждаться только для поверхностей размерности $n \geqslant 6$. В то же время легко привести примеры однозначно определённых четырёхмерных поверхностей в шестимерном евклидовом пространстве. Так, риманово произведение двух двумерных сфер даёт однозначно определённую четырёхмерную поверхность в шестимерном евклидовом пространстве (см. теорему 10.13 ниже).

В направлении ослабления ограничений Аллендорфера на размерность и коразмерность в теоремах об однозначной определённости в [78] доказана следующая теорема.

Теорема 10.10. *Если C^∞-погружение $z\colon X \to E$ n-мерного многообразия X в $(n+p)$-мерное евклидово пространство E является общим и*

$$\begin{aligned} & p \leqslant n, \quad n \geqslant 8, \\ \textit{или} \quad & p \leqslant 3, \quad n = 4, \\ \textit{или} \quad & p \leqslant 4, \quad n = 5, 6, \\ \textit{или} \quad & p \leqslant 6, \quad n = 7, \end{aligned}$$

то погружение z однозначно определено в E.

Слово «общее» в этой теореме означает, что коэффициенты вторых основных форм не удовлетворяют определённым алгебраическим соотношениям.

В [110, 111] вводится отличная от типового числа характеристика, условия на которую обеспечивают локальную однозначную определённость погружения. Пусть $z\colon X \to E$ — C^2-погружение n-мерного многообразия X в m-мерное евклидово пространство E, $\mathbf{II}\colon T_x(X) \times T_x(X) \to T_x^\perp F$ — векторнозначная вторая основная форма в точке $x \in X$ (здесь используются обозначения раздела 9.2). Пусть U^s — s-мерное подпространство, $1 \leqslant s \leqslant p = m - n$, нормального пространства $T_x^\perp F$, $\pi\colon T_x^\perp F \to U^s$ — ортогональное проектирование. Положим $\mathbf{II}_{U^s} = \pi \circ \mathbf{II}$,

$$\nu_s(x) = \max_{U^s \subset T_x^\perp F} \dim N(\mathbf{II}_{U^s}),$$

где $N(\mathbf{II}_{U^s})$ — нуль-пространство (см., например, [48]) отображения $\mathbf{II}_{U^s}$. Число $\nu_s(x)$ называется *s-нулём* погружения z в точке $x \in X$. В [111] доказывается следующее утверждение.

Теорема 10.11. *Если $p = m - n \leqslant 5$, $n > 2p$, и для каждой точки $x \in X$ и каждого целого s, $1 \leqslant s \leqslant p$, s-нуль $\nu_s(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\nu_s(x) \leqslant n - (2s+1),$$

то погружение z однозначно определено в классе C^2-погружений.

Эта теорема при $p = 1$ совпадает с теоремой 10.1 Бица, а при $1 < p \leqslant 5$, $n > 2p$, улучшает результат Аллендорфера (теорема 10.7). В [149] она усилена по коразмерности, а в [110] получен её глобальный аналог.

Теорема 10.12. *Пусть X компактно, $n > 2p$, $p \leqslant 5$, и пусть $B \subset X$ — множество всех плоских точек погружения z. Допустим, что множество B не разбивает X. При $p > 1$ предположим, что для всякой точки $x \in X - B$ и всякого целого s, $1 \leqslant s \leqslant p-1$, s-нуль ν_s удовлетворяет условию*

$$\nu_s(x) \leqslant n - (2s+1).$$

Тогда C^2-погружение $z\colon X \to E$ однозначно определено своей метрикой в классе C^2.

К глобальным результатам можно также отнести теорему Дж. Д. Мура [136] (перевод в [43]) об однозначной определённости римановых произведений гиперповерхностей. Если $(X_1, ds_1^2), \ldots, (X_p, ds_p^2)$ — римановы многообразия размерностей $n_1, \ldots, n_p$ соответственно, то их *римановым произведением* называется риманово многообразие (X, ds^2) размерности $N_p = n_1 + \ldots + n_p$, где $X = X_1 \times \ldots \times X_p$ — произведение многообразий, $ds^2 = ds_1^2 + \ldots + ds_p^2$, суммирование проводится в расслоении билинейных форм над X. Для евклидовых пространств $E_1, \ldots, E_p$ размерностей $n_1 + 1, \ldots, n_p + 1$ через E обозначим $(N_p + p)$-мерное евклидово пространство — их произведение. Если $z_\sigma\colon X_\sigma \to E_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, p$, — изометрические погружения, то определено погружение $z\colon X \to E$, индуцирующее метрику ds^2, равенством $z(x) = z_1(x_1) + \ldots + z_p(x_p)$ для каждой точки $x = (x_1, \ldots, x_p) \in X$, где $x_\sigma \in X_\sigma$, суммирование проводится в E. Соответствующая поверхность $F = z(X) \subset E$ называется римановым произведением поверхностей $F_1 = z_1(X_1), \ldots, F_p = z_p(X_p)$. Теорема Дж. Д. Мура формулируется следующим образом.

Теорема 10.13. *Если каждая из поверхностей F_σ принадлежит классу C^3 и однозначно определена своей метрикой в пространстве E_σ, то и поверхность F однозначно определена своей метрикой в пространстве E.*

Ряд фундаментальных утверждений о глобальной однозначной определённости содержится в [161]. Их доказательства приводятся в [162]. В этих работах выделяется класс *эллиптических погружений*. Погружение $z\colon X \to E$ называется эллиптическим, если для каждого вектора нормали $\nu \in T_x^\perp F$ билинейная форма $\mathrm{II}(\nu) = \langle \mathbf{II}, \nu \rangle$ не является нулевой и имеет по крайней мере два собственных значения одного знака. Условие эллиптичности используется в сочетании с ещё одним условием типа невырожденности, называемым автором *условием* (C), которое заключается в том, что в каждой точке многообразия X

линейная оболочка, натянутая на первые и вторые частные производные погружения z по локальным координатам, совпадает с пространством E. Обозначая через $I(z)$ метрику на X, индуцированную погружением z, имеем отображение $I\colon \mathcal{D}^1(X,E) \to \mathcal{E}(X, S^2_+T^*(X))$ множества всех C^1-погружений $X \to E$ в множество всех непрерывных римановых метрик на E (а значит, и в пространство $\mathcal{E}(X, S^2T^*(X))$ сечений расслоения билинейных форм на X). Пусть I'_z — производная Фреше отображения $I\colon \mathcal{D}^1(X,E) \to \mathcal{E}(X, S^2T^*(X))$. Для E-значного векторного поля U на X имеем $I'_z(U) = 2\,dz\,dU$. Обозначим через $\rho(z)$ размерность пространства решений уравнения $I'_z(U) = 0$. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 10.14. *Если X компактно, то всякое эллиптическое C^3-погружение $z\colon X \to E$, удовлетворяющее условию (C), для которого $\rho(z) = \frac{m(m+1)}{2}$, обладает в множестве $\mathcal{D}^3(X,E)$ всех C^3-погружений $X \to E$ окрестностью (в C^3-топологии), всякие два изометричных погружения из которой конгруэнтны.*

Требование $\rho(z) = \frac{m(m+1)}{2}$ в этой теореме, по существу, означает, что погружение z должно обладать жёсткостью первого порядка (см. ниже). Основным следствием данной теоремы является то, что всякое эллиптическое C^3-погружение компактного многообразия в евклидово пространство, удовлетворяющее условию (C) и обладающее жёсткостью первого порядка, неизгибаемо в классе C^3-погружений. В [92] доказывается, что всякие два эллиптические изометричные C^3-погружения данного компактного многообразия в евклидово пространство, содержащие C^3-окрестности, состоящие из погружений, обладающих жёсткостью первого порядка, являются конгруэнтными.

В качестве приложения теоремы 10.14 Н. Танака [162] доказал неизгибаемость одного класса изометрических погружений компактного эрмитова пространства. В [128] теорема Н. Танаки применяется к доказательству неизгибаемости канонического изометрического погружения симметрического R-пространства в евклидово пространство. В [127] она используется для доказательства неизгибаемости классических групп Ли $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ в n^2-мерном пространстве $(n\times n)$-матриц над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и телом кватернионов $\mathbb{Q}$ соответственно. Доказывается неизгибаемость группы $\mathrm{SO}(n)$ при $n \geqslant 5$, группы $\mathrm{U}(n)$ при $n \geqslant 3$ и группы $\mathrm{Sp}(n)$ при $n \geqslant 1$.

Ряд работ посвящён вопросам однозначной определённости при некоторых дополнительных ограничениях на изменение геометрических характеристик поверхностей. В [163] доказывается локальная однозначная определённость трёхмерных поверхностей в шестимерном евклидовом пространстве в классе C^∞ при условии сохранения асимптотических гиперплоскостей касательных пространств. Для произвольной точки x многообразия X k-мерное, $0 < k < n$, подпространство L касательного пространства $T_x(X)$ называется *асимптотическим пространством* для погружения $z\colon X \to E$, если существует нормаль $\nu \in T_x^\perp F$, такая что $\mathrm{II}(\nu)|_L = 0$. k-мерное подмногообразие Y многообразия X называется *асимптотическим многообразием* для z в точке x, если касательное пространство $T_x(Y)$ является асимптотическим подпространством пространства $T_x(X)$ (см. [14,122—125,163]). Для погружения $z\colon X \to E$ и точки $x \in X$ через C_x обозначим образ множества всех $(n-1)$-мерных асимптотических подпространств при касательном к z отображении $T_x z\colon T_x(X) \to T_x F$. При $n = 3$ множество C_x представляет собой кубическую поверхность в касательной к F плоскости $T_x F$, рассматриваемой как аффинное подпространство пространства E. Пусть $\hat{z}\colon X \to E$ — погружение, изометричное z, $\hat{F}$ — соответствующая поверхность, $\hat{C}_p$ — образ множества $(n-1)$-мерных асимптотических подпространств для $\hat{z}$ при касательном к $\hat{z}$ отображении. Тогда определена изометрия $f\colon F \to \hat{F}$. Основной результат статьи [163] формулируется следующим образом.

Теорема 10.15. *Пусть $\dim X = 3$, $\dim E = 6$, и пусть $z, \hat{z}\colon X \to E$ — изометрические C^∞-погружения, $f\colon F \to \hat{F}$ — соответствующая изометрия. Предположим, что в каждой точке $x \in X$ множества C_x и $\hat{C}_x$ — неособенные кубические поверхности в $T_x F$ и $T_x \hat{F}$ соответственно и $T_{z(x)} f(C_x) = \hat{C}_x$. Тогда поверхности F и $\hat{F}$ конгруэнтны.*

В [143] доказывается, что если n-мерная поверхность F' с вектором средней кривизны $\mathbf{H}'$ в m-мерном евклидовом пространстве изометрична компактной поверхности F, лежащей в $(n+1)$-мерной плоскости и имеющей в этой плоскости неотрицательную среднюю кривизну H, то при условии $|\mathbf{H}'| \leqslant H$ поверхность F' конгруэнтна поверхности F. Близкий к этому результат был получен М. Дайцером и Д. Громолом [102] для минимальных поверхностей (т. е. для поверхностей с нулевым вектором средней кривизны). Ими доказано, что если (X, ds^2) — полное n-мерное, $n \geqslant 4$, риманово многообразие, не содержащее множителем $\mathbb{R}^{n-3}$, допускающее изометрическое погружение z в $(n+1)$-мерное евклидово пространство в виде минимальной поверхности, то всякое изометрическое погружение этого многообразия в виде минимальной поверхности в m-мерное евклидово пространство с произвольным $m > n$ конгруэнтно z.

В [74] доказано, что две изометричные гиперповерхности с одним и тем грассмановым образом могут быть совмещены параллельным переносом и зеркальным отображением. В [3, 83] этот результат усилен. Доказано, что если n-мерная поверхность F m-мерного евклидова пространства содержит точку, в которой её секционные кривизны положительны, то всякая изометричная ей поверхность с тем же самым грассмановым образом отличается от неё на трансляцию и, возможно, центральную симметрию. Изгибания n-мерных поверхностей с краем в m-мерном евклидовом пространстве при аналогичных условиях (с сохранением фиксированного сечения нормального пучка) изучались также в [142]. Для поверхностей с коразмерностью $p > 1$ представляются интересными аналоги изгибания «на главном основании» двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве (см., например, [20,29,57]). В этой связи отметим работы [49,166], где рассматривается проблема однозначной определённости при ограничениях на изменение координатной сети поверхности.

К работам, посвящённым проблемам однозначной определённости и неизгибаемости поверхностей коразмерности $p > 1$ с сохранением некоторых геометрических характеристик, следует отнести работу [156], где получены условия, при которых две изометричные в целом двумерные гладкие поверхности с краем четырёхмерного евклидова пространства конгруэнтны. Достаточные условия однозначной определённости двумерной поверхности в четырёхмерном евклидовом пространстве получены также в [23]. Однозначная определённость двумерных поверхностей в пятимерном евклидовом пространстве исследовалась в [88]. В [87] доказана однозначная определённость геликоида в классе гладких минимальных поверхностей n-мерного евклидова пространства.

Перечисленные результаты получены при условии достаточно высокой гладкости поверхностей (как правило, требуется принадлежность классу C^3). Без условий на гладкость Е. П. Сенькиным [51] доказано, что если F — $(n-1)$-мерная общая выпуклая поверхность, расположенная в n-мерной плоскости m-мерного евклидова пространства, Φ — изометричная ей поверхность, расположенная в k-мерной плоскости $(n \leqslant k \leqslant m)$, $r(x, y)$ — пространственное расстояние между точками x и y поверхности F, $\rho(x, y)$ — пространственное расстояние между соответствующими по изометрии точками поверхности Φ, то при $\rho(x, y) \geqslant r(x, y)$ поверхности F и Φ конгруэнтны.

Работы [14,99,100,104,107,108] посвящены проблеме продолжения изгибания данной поверхности в изгибание содержащей её поверхности более высокой размерности. По терминологии Н. Н. Яненко (см. [71—73]) эта проблема называется проблемой *соизгибания*. Понятие *продолжение изгибания* тесно связано с понятием погружения в виде *композиции*. Говорят, что изометрическое погружение $\hat{z}\colon X \to V^{n+q}$ является композицией, если существуют изометрические погружения $z\colon X \to V^{n+p}$ и $h\colon V^{n+p} \to V^{n+q}$, такие что $\hat{z} = h \circ z$ (здесь $n = \dim X$, $p \leqslant q$). Если, например, $V^{n+p} = E^{n+p}$, $V^{n+q} = E^{n+q}$ и h — изометрическое погружение E^{n+p} в E^{n+q} в виде некоторого цилиндра S, то изгибания этого цилиндра порождают такие изгибания поверхности $h \circ z(X) \subset S$ в $\mathbb{R}^{n+q}$, которые можно считать продолжающимися в породившие их изгибания цилиндра. В частности, в [107] показано, что если $z\colon X \to V^{n+1}$ — вложение n-мерного многообразия X в $(n+1)$-мерное полное односвязное пространство постоянной кривизны, $\tilde{z}\colon X \to V^{n+p}$ — погружение X в $(n+p)$-мерное полное односвязное пространство той же постоянной кривизны, причём типовое число $t(z)$ погружения z удовлетворяет условию $p \leqslant t(z) - 2$, то $\tilde{z}$ может быть представлено как композиция z с изометрическим погружением в V^{n+p} некоторой области из пространства V^{n+1}. В [108] этот результат распространяется на случай, когда V^{n+1} и V^{n+p} имеют различные постоянные кривизны. В [104] доказывается, что если X — компактное n-мерное риманово многообразие, $n \geqslant 5$, и $z, \tilde{z}\colon X \to E$ — изометрические погружения X в $(n+2)$-мерное евклидово пространство, то на X существует открытое всюду плотное множество, на любой связной компоненте которого либо z и $\tilde{z}$ конгруэнтны, либо они могут быть продолжены до неконгруэнтных изометрических отображений $Z, \tilde{Z}\colon Y \to E$, где либо Y — $(n+1)$-мерная плоскость и Z, $\tilde{Z}$ регулярны, либо Z, $\tilde{Z}$ — гиперповерхности, описанные У. Сбрана [148] и Э. Картаном [85].

Более тонкое различение изометрических погружений одного и того же многообразия в различные пространства можно получить на основе введённых в [99] понятий *изометрически продолженной пары* погружений и *истинной изометрической деформации* («genuine deformation»), обобщающих понятия композиции и продолжения изгибаний.

Два изометрических погружения $z\colon X \to V^{n+p}$ и $\hat{z}\colon X \to V^{n+q}$ являются изометрически продолженной парой, если каждое из них является композицией, $z = Z \circ h$, $\hat{z} = \hat{Z} \circ h$, где h — некоторое изометрическое вложение $h\colon X \to V^{n+r}$, а Z и $\hat{Z}$ — изометрические погружения многообразия V^{n+r} соответственно в V^{n+p} и V^{n+q}; в частном случае $V^{n+r} = V^{n+p}$, $p \leqslant q$, погружение $\hat{z}$ можно истолковать как композицию отображения z и некоторого изометрического погружения открытой окрестности области $z(X) \subset V^{n+p}$ в V^{n+q}. Таким образом, изометрически продолженная пара погружений состоит из погружений-композиций с общим начальным элементом композиции $h\colon X \to V^{n+r}$.

Изометрическое погружение $\hat{z}\colon X \to V^{n+q}$ называется истинной изометрической деформацией данного изометрического погружения $z\colon X \to V^{n+p}$, если нет ни одной открытой области $U \subset X$, в которой ограничения $z|_U$ и $\hat{z}|_U$ составляли бы продолженную пару изометрических погружений. В [99] доказывается, что если некоторое изометрическое погружение z n-мерного многообразия X в E^{n+p} допускает истинную изометрическую деформацию $\hat{z}\colon X \to E^{n+q}$ с условиями $p + q < n$ и $\min\{p, q\} \leqslant 5$, то n-мерные поверхности $z(X)$ и $\hat{z}(X)$ имеют общее d-линейчатое строение в следующем смысле: в каждой связной компоненте некоторого открытого множества $U \subset X$ существует интегрируемое d-мерное распределение $D^d \subset TX$, листам (интегральным поверхностям) которого на n-мерных поверхностях $z(U)$ и $\hat{z}(U)$ соответствуют d-мерные плоские области, причём для размерности d указывается оценка снизу и даётся некоторая дополнительная информация о соотношении между вторыми квадратичными формами поверхностей. В [100] изометрически истинно деформируемые и недеформируемые погружения рассмотрены более подробно в случаях с коразмерностью $p = 2$. Кроме того, отметим, что работы [99, 100] снабжены довольно обширной библиографией по рассматриваемому кругу вопросов, которая не вся вошла в наш обзор. В частности, у этих же авторов есть ещё работа [98], посвящённая погружениям-композициям с большой коразмерностью. В [150] рассматриваются некоторые алгебраические условия на коэффициенты второй формы поверхности, обеспечивающие её однозначную определённость.

В [96, 97] с точки зрения изгибаемости рассматриваются конформно плоские подмногообразия евклидова пространства. Устанавливается, что для размерности $n \geqslant 5$ и коразмерности $p = 2$ конформно плоские подмногообразия делятся на три класса, один из которых состоит из локально неизгибаемых поверхностей. Приводится явное задание поверхностей этого класса. В [167] показано, что всякое изометрическое погружение n-мерной сферы в $(n+2)$-мерное евклидово пространство изгибаемо в стандартное вложение этой сферы в $(n+1)$-мерное евклидово пространство.

§ 11. Общие вопросы теории бесконечно малых и аналитических изгибаний

11.1. Определения бесконечно малого и аналитического изгибаний

Первые определения бесконечно малого изгибания поверхности содержатся в работах геометров XIX века и касаются только двумерных поверхностей трёхмерного евклидова пространства (см. обзор [42]). В этих работах, как правило, не делалось различия между бесконечно малым изгибанием и изгибанием. Впервые это различие было отмечено в конце XIX века Г. Дарбу (см. [109]). Несмотря на огромное количество результатов по теории бесконечно малых изгибаний двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве, определение самого́ бесконечно малого изгибания до настоящего времени уточняется (см. [50, 93], а также [18]).

В случае многомерных поверхностей удобно использовать язык расслоений. Приведённое ниже определение, опирающееся на эту точку зрения, содержится в статье [37]. Основная идея его может быть выражена образной фразой Н. В. Ефимова: «Теория бесконечно малых изгибаний есть дифференциал теории изгибаний».

Всякое расслоение с базой X и тотальным пространством $P(X)$ мы обозначаем символом его тотального пространства $P(X)$. Через $P_x(X)$ обозначаем слой над точкой $x \in X$, через $\mathcal{E}^r(X, P(X))$ — множество всех C^r-сечений расслоения $P(X)$, $r \geqslant 0$. В случае, когда $P(X)$ — векторное расслоение, множество $\mathcal{E}^r(X, P(X))$ стандартным образом превращается в векторное пространство, а значит, в C^∞-многообразие, моделируемое банаховым пространством (по теории бесконечномерных многообразий см. [8, 27]).

Рассмотрим путь $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, $\varepsilon > 0$, $\gamma(0) = x$, класса C^r на n-мерном многообразии X, проходящий через точку $x \in X$. Обозначим через $C^r(x)$ множество всех функций, каждая из которых принадлежит классу C^r в некоторой окрестности точки x. Отображение $v\colon C^r(x) \to \mathbb{R}$, определённое формулой

$$v(f) = \left.\frac{d^r f(\gamma(t))}{dt^r}\right|_{t=0},$$

называется r-касательным вектором к пути γ в точке x. Линейная оболочка $T_x^{(r)}(X)$, натянутая на множество всех r-касательных векторов к всевозможным путям, проходящим через x, является векторным пространством размерности

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

и называется r-касательным пространством к X в точке x. Векторное расслоение с базой X, слоем которого над каждой точкой является $T_x^{(r)}(X)$, называется

r-касательным расслоением многообразия X. При $r = 1$ имеем касательное расслоение $T(X)$. Для произвольного C^r-расслоения $P(X)$ над X через $P^{(r)}(X)$ будем обозначать расслоение с базой X, слоем которого над каждой точкой $x \in X$ является тотальное пространство $T^{(r)}(P_x(X))$ r-касательного расслоения к слою $P_x(X)$. Расслоение $P^{(r)}(X)$ называется r-производным расслоением расслоения $P(X)$.

Рассмотрим векторное C^∞-расслоение $V(X)$ и сечение $\theta \in \mathcal{E}^r(X, V(X))$, $r \geqslant 0$. *Деформацией класса* C^s, $s \geqslant 0$, сечения θ будем называть всякое отображение $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{E}^r(X, V(X))$ класса C^s, такое что $f(0) = \theta$. При $s = 0$ деформация называется *непрерывной* (ср. с. 17). Будем говорить, что деформация принадлежит классу C^∞, если она принадлежит классу C^s для любого $s = 0, 1, \ldots$. Фиксированную деформацию сечения θ будем обозначать $\{\theta_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$, или, короче, $\{\theta_t\}$, а её значение при фиксированном $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ — через θ_t. Деформация называется *аналитической*, если она принадлежит классу C^∞ и в каждой точке $x \in X$ может быть представлена степенным рядом

$$\theta_t(x) = \theta(x) + 2\sum_{s=1}^{\infty} \delta^s\theta(x) t^s, \tag{11.1}$$

сходящимся на $(-\varepsilon, \varepsilon)$, для которого $\delta^s\theta \in \mathcal{E}^r(X, V^{(s)}(X))$.

Пусть теперь $P(X)$ — C^r-подрасслоение векторного C^r-расслоения $V(X)$, $\theta \in \mathcal{E}^r(X, P(X))$. Деформацией класса C^s, $0 \leqslant s \leqslant \infty$, сечения θ будем называть всякое отображение $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{E}^r(X, P(X))$, являющееся деформацией класса C^s сечения θ в $\mathcal{E}^r(X, V(X))$. Деформация $\{\theta_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ сечения θ в $\mathcal{E}^r(X, P(X))$ называется аналитической, если она является деформацией класса C^∞ и в каждой точке $x \in X$ может быть представлена сходящимся на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ рядом (11.1), в котором $\delta^s\theta \in \mathcal{E}^r(X, P^{(s)}(X))$. Каноническое вложение слоёв $P_x(X) \subset V_x(X)$ позволяет в каждой точке $x \in X$ значение $\delta^s\theta$ рассматривать как вектор из $V_x(X)$.

Использование в определении аналитической деформации s-производного расслоения обусловлено тем, что для фиксированной точки $x \in X$ аналитическая деформация $\{\theta_t\}$ задаёт аналитический путь $(-\varepsilon, \varepsilon) \to P_x(X) \subset V_x(X)$. При этом

$$\delta^s\theta(x) = \left.\frac{d^s\theta_t(x)}{2s!\,dt^s}\right|_{t=0}, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Для заданной деформации $\{\theta_t\}$ сечение $\delta^s\theta \in \mathcal{E}^r(X, P^{(s)}(X))$, определяемое последней формулой, называется s-й вариацией сечения θ, а оператор $\delta^s\colon \mathcal{E}^r(X, P(X)) \to \mathcal{E}^r(X, P^{(s)}(X))$ — оператором варьирования s-го порядка. Введём обозначения $\delta^0\theta = \theta$, $\delta^1\theta = \delta\theta$.

Класс деформаций, определяющих одни и те же вариации $\delta^1\theta, \ldots, \delta^l\theta$, называется *бесконечно малой деформацией* l-го порядка сечения θ (по поводу определения бесконечно малой деформации см. также [168, 169]).

Бесконечно малая деформация порядка l однозначно определяется какой-либо деформацией вида

$$\theta_t(x) = \theta(x) + 2\sum_{s=1}^{l} \delta^s\theta(x)t^s + o(l),$$

где $o(l) \in \mathcal{E}^r(X, V(X))$, $\frac{o(l)}{t^l} \to 0$ при $t \to 0$. Тем самым бесконечно малую деформацию l-го порядка можно рассматривать как l-струю аналитической деформации. Определение бесконечно малой деформации в терминах струй дано С. Б. Климентовым в [25]. В дальнейшем, говоря о бесконечно малой деформации l-го порядка, мы не будем исключать случай $l = \infty$, понимая под бесконечно малой деформацией бесконечного порядка аналитическую деформацию.

Отождествляя всякое отображение $h\colon X \to E$ с сечением $x \mapsto (x, h(x))$ тривиального расслоения $X \times E$, мы можем распространить предыдущие определения на отображения из $C^r(X, E)$, в частности на погружения. Деформация погружения $z\colon X \to E$ порождает деформацию всякого тензорного поля θ на X, выражаемого через z, а значит, всякая бесконечно малая деформация погружения z порождает некоторую бесконечно малую деформацию тензорного поля θ. В частности, деформация $\{z_t\}$ порождает деформацию $\{I(z_t)\}$ метрики $I(z)$. Бесконечно малая деформация l-го порядка (аналитическая деформация, если $l = \infty$) погружения z называется *бесконечно малым изгибанием l-го порядка* (*аналитическим изгибанием*), если при порождённой ею бесконечно малой деформации метрики $I(z)$ все её вариации до порядка l включительно равны нулю. Часто вместо бесконечно малого изгибания погружения говорят о бесконечно малом изгибании соответствующей поверхности. Вариация $\delta^s z\colon X \to E$ называется *изгибающим полем s-го порядка* поверхности F.

11.2. Бесконечно малые движения и тривиальные бесконечно малые изгибания

Так как $I(z) = dz^2$ (здесь справа — скалярный квадрат в E), то условия на вариации метрики при бесконечно малом изгибании поверхности дают следующую систему уравнений для изгибающих полей:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} d\delta^\alpha z \cdot d\delta^{s-\alpha} z = 0, \quad s = 1, \dots, l. \tag{11.2}$$

При $l < \infty$ каждое решение $\{\delta^s z\}_{s=1}^{l}$ этой системы задаёт бесконечно малое изгибание l-го порядка погружения z. При $l = \infty$ (в случае аналитического изгибания) требуется ещё сходимость ряда

$$z(x) + 2\sum_{s=1}^{\infty} \delta^s z(x)t^s$$

на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ в каждой точке $x \in X$.

Система (11.2) всегда допускает решения вида

$$\delta^s z = \sum_{\alpha=1}^{s} \Omega^\alpha \cdot \delta^{s-\alpha} z + \omega^s, \quad s = 1, \ldots, l, \tag{11.3}$$

где Ω^s — произвольные постоянные на X бивекторы из $\bigwedge^2 E$, ω^s — произвольные постоянные на X векторы из E, точкой обозначено внутреннее произведение бивектора на вектор [21]. Полями такого вида описываются бесконечно малые движения поверхности F в E как твёрдого тела.

Будем говорить, что бесконечно малое изгибание l-го порядка *содержит* бесконечно малое движение порядка $k-1>0$, если вариации $\delta^s z$ порядков $1,\ldots,k-1$ имеют вид (11.3); если же представление (11.3) верно для всех изгибающих полей $\{\delta^s z\}_{s=1}^l$, тогда соответствующее бесконечно малое изгибание l-го порядка называется *бесконечно малым движением l-го порядка*. Для бесконечно малого изгибания l-го порядка, содержащего бесконечно малое движение порядка $k-1$, добавлением движения соответствующую деформацию можно привести к виду

$$z_t = z + \sum_{s=k}^{l} \delta^s z t^s + o(l),$$

который в [17] назван *бесконечно малым изгибанием порядка* (k,l).

Согласно классическим определениям (см., например, [6]) бесконечно малое изгибание порядка l называется *нетривиальным*, если его поле $\delta^1 z$ не является бесконечно малым движением первого порядка. Другими словами, нетривиальное бесконечно малое изгибание порядка l не содержит движения никакого порядка. В классических работах нигде не встречается явного определения тривиальности бесконечно малого изгибания произвольного порядка $l>1$, однако по принципу отрицания напрашивается определение тривиального бесконечно малого изгибания произвольного порядка l как содержащего движение первого порядка. На самом деле такое определение оказывается противоречащим некоторым естественным связям между бесконечно малыми изгибаниями и аналитическими изгибаниями (см. об этом более подробно в [17, 84]). Здесь мы лишь отметим, что согласно [17] бесконечно малое изгибание порядка l называется нетривиальным бесконечно малым изгибанием порядка (k,l), где k — минимальное число, такое что рассматриваемое бесконечно малое изгибание не содержит движения порядка k. Далее для краткости формулировок под классической тривиальностью бесконечно малого изгибания порядка l будем понимать наличие в нём движения первого порядка.

Будем говорить, что погружение $z\colon X \to E$ (а также соответствующая поверхность $F = z(X)$) обладает *жёсткостью l-го порядка*, если всякое его бесконечно малое изгибание l-го порядка тривиально в смысле приведённого выше определения. В [32] доказывается следующая теорема.

Теорема 11.1. *Для того чтобы всякое бесконечно малое изгибание конечного порядка l C^1-погружения $z\colon X \to E$ было бесконечно малым движением порядка l, необходимо и достаточно, чтобы погружение z обладало жёсткостью первого порядка.*

Погружение z называется *аналитически неизгибаемым*, если всякое его аналитическое изгибание является аналитическим движением. Соотношение между аналитической неизгибаемостью и жёсткостью двумерных поверхностей трёхмерного евклидова пространства рассматривалось Н. В. Ефимовым в [15,17] (см. также [50]). Многомерный аналог основного результата Н. В. Ефимова получен в [32].

Теорема 11.2. *Если погружение $z\colon X \to E$ обладает жёсткостью первого или второго порядка, то оно аналитически неизгибаемо.*

Одним из естественных подходов к определению тривиального бесконечно малого изгибания является равенство нулю вариаций пространственных расстояний между точками поверхности. Этот подход использовался А. В. Погореловым [47] при определении жёсткости в римановом пространстве и согласуется с подходом Н. В. Ефимова из [17]. Чтобы отличить его от тривиальности в смысле данного выше определения, будем использовать термин «ρ-тривиальность». Бесконечно малое изгибание l-го порядка поверхности $F = z(X)$ будем называть *ρ-тривиальным*, если первая вариация пространственного расстояния в E между каждой парой точек поверхности равна нулю. Естественно, возникает вопрос о совпадении понятий тривиального и ρ-тривиального бесконечно малых изгибаний. Ответ даётся следующей теоремой [34], показывающей, что эти понятия различны.

Теорема 11.3. *Для того чтобы всякое ρ-тривиальное бесконечно малое изгибание первого порядка n-мерной поверхности класса C^1 в m-мерном пространстве E было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы эта поверхность не лежала ни в какой $(m-1)$-мерной плоскости*[1].

Отметим, что для бесконечно малых изгибаний высших порядков соотношение между равенством нулю вариаций высших порядков пространственных расстояний и наличием в бесконечно малых изгибаниях бесконечно малых движений выше первого порядка пока не исследовано.

Пусть $z\colon X \to E$ — C^2-погружение и $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^{p}$ — ортонормированный C^1-репер в нормальном расслоении $T^\perp F$ соответствующей поверхности, $p = m - n$. Обозначим через II^σ вторую основную форму поверхности F относительно нормали ν_σ, через $\varkappa_\sigma^\tau$ — форму кручения нормали ν_σ относительно нормали ν_τ (см. с. 6). Поскольку эти формы могут быть выражены через z, то каждое бесконечно малое изгибание погружения z порождает вариации этих форм. Аналогом критерия конгруэнтности (теорема 9.8) в теории бесконечно малых изгибаний является следующее утверждение.

[1]Тем самым высказанное в [50, § 1.4] утверждение о совпадении двух определений тривиальности оказывается справедливым лишь для поверхностей, не содержащих плоских областей.

Теорема 11.4. *Для того чтобы бесконечно малое изгибание l-го порядка поверхности F в E содержало бесконечно малое движение h-го порядка, $1 \leqslant h \leqslant l$, необходимо и достаточно, чтобы первые h вариаций вторых основных форм и форм кручения имели вид*

$$\delta^s \mathrm{II}^\sigma = \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\tau=1}^{p} \overset{\alpha}{\varphi}{}^\sigma_\tau \delta^{s-\alpha} \mathrm{II}^\tau,$$

$$\delta^s \varkappa^\tau_\sigma = \overset{s}{K}{}^\sigma_\tau + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\chi=1}^{p} \Big(\overset{\alpha}{K}{}^\chi_\tau \overset{s-\alpha}{\psi}{}^\sigma_\chi - \overset{\alpha}{\varphi}{}^\tau_\chi \delta^{s-\alpha} \varkappa^\chi_\sigma \Big),$$

где $\overset{s}{\varphi}{}^\tau_\sigma = -\overset{s}{\varphi}{}^\sigma_\tau$ — *произвольные функции класса C^1 на X,* $\overset{s}{\psi}{}^\sigma_\tau$ — *функции, определяемые равенствами*

$$\overset{s}{\psi}{}^\sigma_\tau = \overset{s}{\varphi}{}^\sigma_\tau + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\chi=1}^{p} \overset{\alpha}{\varphi}{}^\sigma_\chi \overset{s-\alpha}{\psi}{}^\chi_\tau, \quad \overset{1}{\psi}{}^\sigma_\tau = \overset{1}{\varphi}{}^\sigma_\tau,$$

$\overset{s}{K}{}^\tau_\sigma = -\overset{s}{K}{}^\sigma_\tau$ — *непрерывные линейные дифференциальные формы, определённые равенством*

$$\overset{s}{K}{}^\sigma_\tau = d\overset{s}{\varphi}{}^\sigma_\tau + \sum_{\chi=1}^{p} \Big(\overset{s}{\varphi}{}^\chi_\tau \varkappa^\sigma_\chi - \overset{s}{\varphi}{}^\chi_\sigma \varkappa^\tau_\chi \Big),$$

$s = 1, \dots, l$, $\tau, \sigma = 1, \dots, p$.

Доказательство этой теоремы имеется в [40]. В классических обозначениях она приводится в [35].

11.3. Поля вращений и основная система уравнений

В теории бесконечно малых изгибаний двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве существенная роль принадлежит системе векторов вращений. Постоянство первого из векторов этой системы гарантирует тривиальность соответствующего бесконечно малого изгибания [15]. В многомерном случае, в связи с отсутствием подходящего аналога векторного произведения двух векторов, вместо векторов вращений удобно использовать бивекторы. Это сделано в [30] для бесконечно малых изгибаний первого порядка двумерной поверхности в четырёхмерном пространстве, а в [35] — в общем случае. Система бивекторов вращений вводится следующей теоремой.

Теорема 11.5. *Для заданного бесконечно малого изгибания l-го порядка, $1 \leqslant l \leqslant \infty$, C^r-погружения $z\colon X \to E$, $r \geqslant 1$, и порождённой этим бесконечно малым изгибанием бесконечно малой деформации C^{r-1}-репера $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ нормального расслоения $T^\perp F$ поверхности $F = z(X)$ существует, и притом единственная, система полей бивекторов $(V^s)_{s=1}^l$, $V^s \in \mathcal{E}^{r-1}(X, \wedge^2 E)$, такая что*

$$d\delta^s z = \sum_{\alpha=1}^{s} V^\alpha d\delta^{s-\alpha} z, \quad \delta^s \nu_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{s} V^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma,$$

$\sigma = 1, \ldots, p = m - n$, $s = 1, \ldots, l$.

Элемент V^s системы полей бивекторов, определённой этой теоремой, называется полем вращений s-го порядка. В теории бесконечно малых изгибаний двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве часто используется тот факт, что производные поля вращений s-го порядка по локальным координатам на поверхности выражаются через поля вращений порядков меньше s и вариации коэффициентов второй основной формы порядков не больше s (см., например, [15]). Аналогичный результат для n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны получен в [35]. Он позволил получить аналог основной теоремы теории поверхностей в теории бесконечно малых изгибаний.

Для заданного C^r-погружения $z\colon X \to E$, $r \geqslant 2$, рассмотрим на X систему уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{p} (\delta^\alpha b^\sigma_{ik} \delta^{s-\alpha} b^\sigma_{jh} + \delta^\alpha b^\sigma_{jh} \delta^{s-\alpha}_{ik})_{[k,h]} = 0, \\
\Bigl(\delta^s b^\sigma_{ij,k} + \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\tau=1}^{p} (\delta^\alpha b^\tau_{ij} \delta^{s-\alpha} \mu^\sigma_{\tau k} + \delta^{s-\alpha} b^\tau_{ij} \delta^\alpha \mu^\sigma_{\tau k})\Bigr)_{[j,k]} = 0, \\
\Bigl(\delta^s \mu^\tau_{\sigma i,j} - \sum_{\alpha=1}^{s} \Bigl(\sum_{k,h=1}^{n} g^{kh} (\delta^\alpha b^\tau_{ki} \delta^{s-\alpha} b^\sigma_{jh} + \delta^{s-\alpha} b^\tau_{ki} \delta^\alpha b^\sigma_{jh}) + \\
+ \sum_{\rho=2}^{p} (\delta^\alpha \mu^\tau_{\rho i} \delta^{s-\alpha} \mu^\rho_{\sigma j} + \delta^{s-\alpha} \mu^\tau_{\rho i} \delta^\alpha \mu^\rho_{\sigma j})\Bigr)\Bigr)_{[i,j]} = 0,
\end{gathered} \tag{11.4}$$

где $\delta^s b^\sigma_{ij} = \delta^s b^\sigma_{ji}$, $\delta^s \mu^\tau_{\sigma i} = -\delta^s \mu^\sigma_{\tau i}$ — неизвестные функции, $\delta^0 b^\sigma_{ij} = b^\sigma_{ij}$, $\delta^0 \mu^\tau_{\sigma i} = \mu^\tau_{\sigma i}$, $s = 1, \ldots, l$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$, через $(*)_{[i,j]}$ обозначается альтернация выражения $*$ по индексам i, j и используются обозначения раздела 9.1. Эта система может быть получена формальным l-кратным варьированием уравнений Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи (9.3). Следуя Н. В. Ефимову [15], будем называть её *основной системой уравнений теории бесконечно малых изгибаний*, а следующую теорему — *основной теоремой* этой теории.

Теорема 11.6. *Если многообразие X односвязно, $r \geqslant 3$, $l < \infty$, то всякому решению $\{\delta^s b^\sigma_{ij}, \delta^s \mu^\tau_{\sigma i}\}_{s=1}^{l}$ класса C^{r-2} системы уравнений* (11.4) *соответствует бесконечно малое изгибание l-го порядка погружения z и порождённая им бесконечно малая деформация C^{r-1}-репера $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^{p}$ нормального расслоения поверхности F, при которых вариации коэффициентов вторых основных форм и форм кручения совпадают с соответствующими $\delta^s b^\sigma_{ij}$ и $\delta^s \mu^\tau_{\sigma i}$. При этом изгибающее поле первого порядка $\delta^1 z$ определяется решением однозначно с точностью до слагаемого вида $\Omega^1 z + \omega^1$, где Ω^1 — произвольный постоянный бивектор из*

$\bigwedge^2 E$, ω^1 — произвольный постоянный вектор из E, а каждое изгибающее поле s-го порядка, $s = 2, \ldots, l$, определяется решением и полями $\delta^1 z, \ldots, \delta^{s-1} z$ однозначно с точностью до слагаемого вида (11.3).

В терминах внешних форм основную систему теории бесконечно малых изгибаний можно записать в виде [37, 38]

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{p}(\delta^\alpha\omega_i^\sigma \wedge \delta^{s-\alpha}\omega_j^\sigma + \delta^{s-\alpha}\omega_i^\sigma \wedge \omega_j^\sigma) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\tau^i \wedge \delta^s\omega_i^\sigma = 0,\\
&d\delta^s\omega_i^\sigma = \sum_{k=1}^{n}\Phi_i^k \wedge \delta^s\omega_k^\sigma + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{p}(\delta^\alpha\omega_i^\tau \wedge \delta^{s-\alpha}\varkappa_\tau^\sigma + \delta^{s-\alpha}\omega_i^\tau \wedge \delta^\alpha\varkappa_\tau^\sigma),\\
&\delta^s\varkappa_\sigma^\tau + \delta^s\varkappa_\tau^\sigma = 0,\\
&d\delta^s\varkappa_\sigma^\tau = \sum_{\alpha=1}^{s}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}(\delta^\alpha\omega_i^\tau \wedge \delta^{s-\alpha}\omega_i^\sigma + \delta^{s-\alpha}\omega_i^\tau \wedge \delta^\alpha\omega_i^\sigma) +\\
&\qquad + \sum_{\rho=1}^{p}(\delta^\alpha\varkappa_\sigma^\rho \wedge \delta^{s-\alpha}\varkappa_\rho^\tau + \delta^{s-\alpha}\varkappa_\sigma^\rho \wedge \delta^\alpha\varkappa_\rho^\tau)\Bigg),
\end{aligned} \tag{11.5}$$

где $\delta^0\omega_i^\sigma = \omega_i^\sigma$, $\delta^0\varkappa_\sigma^\tau = \varkappa_\sigma^\tau$ — формы погружения и кручения, $\delta^s\omega_i^\sigma$, $\delta^s\varkappa_\sigma^\tau$ — неизвестные 1-формы, d — знак обобщённого внешнего дифференциала, $s = 1, \ldots, l$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$. Эта система может быть получена формальным варьированием уравнений (9.16)—(9.18). Основная теорема теории бесконечно малых изгибаний в терминах внешних форм доказана при более слабых ограничениях на гладкость погружения, чем теорема 11.6.

Теорема 11.7. *Если многообразие X односвязно, $r \geqslant 2$, $l < \infty$, то всякому решению $\{\delta^s\omega_i^\sigma, \delta^s\varkappa_\sigma^\tau\}_{s=1}^l$ класса C^{r-2} системы* (11.5) *соответствует бесконечно малое изгибание l-го порядка погружения z, при котором $\delta^s\omega_i^\sigma$, $\delta^s\varkappa_\sigma^\tau$ являются s-ми вариациями форм погружения и кручения. При этом изгибающее поле первого порядка имеет вид*

$$\delta^1 z(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{p}\delta^1\omega_i^\sigma[e_i, \nu_\sigma] + \frac{1}{2}\sum_{\tau,\sigma=1}^{p}\delta^1\varkappa_\tau^\sigma[\nu_\tau, \nu_\sigma]\Bigg)\,dz + \Omega^1 \cdot z + \omega^1,$$

где x_0 — произвольная точка на X и каждый из интегралов берётся по произвольному пути, соединяющему x_0 с точкой $x \in X$ (и не зависит от этого пути), $(e_i)_{i=1}^n$ — локальный ортонормированный C^{r-1}-репер из касательного расслоения TF поверхности $F = z(X)$, $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ — локальный ортонормированный C^{r-1}-репер из нормального расслоения этой поверхности, Ω^1 — произвольный постоянный бивектор из $\bigwedge^2 E$, ω^1 — произвольный постоянный вектор из E.

Каждое изгибающее поле $\delta^s z$ порядка $s > 1$ определяется решением и изгибающими полями $\delta^1 z, \ldots, \delta^{s-1} z$ однозначно с точностью до слагаемого вида (11.3).

Из этой теоремы и теоремы 11.4 выводится следующий аналог теоремы Н. В. Ефимова из [17].

Теорема 11.8. *Пусть бесконечно малое изгибание l-го порядка C^2-погружения $z\colon X \to E$ является бесконечно малым движением порядка h, $1 \leqslant h \leqslant l$, и пусть $\delta^s \omega_i^\sigma$, $\delta^s \varkappa_\sigma^\tau$ — соответствующие вариации форм погружения и кручения, $s = 1, \ldots, l$, $i = 1, \ldots, n$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$. Тогда найдутся бесконечно малое изгибание l-го порядка погружения z и порождённые им бесконечно малые деформации реперов $(e_i)_{i=1}^n$ в касательном расслоении TF и $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ в нормальном расслоении $T^\perp F$, при которых вариации форм погружения и кручения совпадут с $\delta^s \omega_i^\sigma$, $\delta^s \varkappa_\sigma^\tau$, а изгибающие поля первых h порядков будут нулевыми.*

В [38] доказано, что если размерность главного нормального пространства q погружения z постоянна на X, а типовое число этого погружения (см. с. 22) удовлетворяет условию $t(z) \geqslant 3$, то последнее равенство системы (11.5) является следствием третьего равенства. Если же $t(z) \geqslant 4$, то система уравнений (11.5) является следствием системы уравнений (11.5_1), (11.5_2) в том смысле, что для всякого решения $\{\delta^s \omega_i^\sigma\}_{s=1}^l$ системы (11.5_1), (11.5_2) найдётся единственное решение $\{\delta^s \omega_i^\sigma, \delta^s \varkappa_\sigma^\tau\}_{s=1}^l$ системы (11.5) с тем же первым элементом.

Большинство из приведённых в этом разделе результатов распространяется на пространства постоянной кривизны.

11.4. Проективная инвариантность жёсткости первого порядка

По известной теореме Дарбу—Зауэра [15] свойство жёсткости первого порядка двумерной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве проективно инвариантно. Аналогичный результат для многомерных поверхностей был получен Н. Н. Яненко [73]. Соответствующий результат формулируется следующим образом.

Теорема 11.9. *При произвольном проективном преобразовании m-мерного евклидова пространства всякая поверхность класса C^1, обладающая нежёсткостью первого порядка переходит в поверхность, также обладающую нежёсткостью первого порядка.*

В [33] установлена связь между полями нормалей, а также изгибающими полями и полями вращений первого порядка данной поверхности и её образа при проективном преобразовании. Зафиксируем в m-мерном евклидовом пространстве E, пополненном несобственной гиперплоскостью, начало координат и единичный вектор $\mathbf{e}$. Ставя в соответствие каждой точке с радиус-вектором z точку с радиус-вектором $\hat{z}$, определённым равенством

$$\hat{z} = \frac{z + e}{z \cdot e} - e, \tag{11.6}$$

получим преобразование пространства E. Наложением аффинных преобразований всякое проективное преобразование пространства E может быть приведено к виду (11.6). Для произвольного C^1-погружения $z\colon X \to E$ определим погружение $\hat{z}\colon X \to E$ формулой (11.6). Для произвольного поля нормалей ν поверхности $F = z(X)$, для произвольного изгибающего поля δz первого порядка этой поверхности и соответствующего ему поля вращений V положим

$$\hat{\nu} = \frac{\nu - e(\nu(z+e))}{z \cdot e}, \quad \delta\hat{z} = \frac{\delta z - e(\delta z(z+e))}{z \cdot e},$$
$$\hat{V} = V + [V \cdot (z+e) - \delta z, e],$$

где $[\ ,\ ]$ — внешнее произведение в $\bigwedge^2 E$. Поля $\hat{\nu}$, $\delta\hat{z}$ и $\hat{V}$ являются соответственно полем нормалей, изгибающим полем первого порядка и порождённым им полем вращений погружения $\hat{z}$. При этом поле $\delta\hat{z}$ тривиально тогда и только тогда, когда тривиально поле δz.

§ 12. Признаки жёсткости и нежёсткости

Как и в теории бесконечно малых изгибаний двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве, основным вопросом теории бесконечно малых изгибаний многомерных поверхностей является вопрос о жёсткости заданного порядка поверхности при определённых условиях на её геометрические характеристики. Так как многомерный случай относительно недавно стал привлекать внимание геометров, результатов здесь не так много, как в случае трёхмерного пространства.

12.1. Признаки жёсткости и нежёсткости гиперповерхностей

Поскольку из жёсткости первого порядка поверхности следует её жёсткость любого более высокого порядка, то основной интерес представляют признаки жёсткости и нежёсткости первого порядка.

Известно (см., например, [116, 117]), что гиперплоскость обладает нежёсткостью первого порядка. Отсюда выводится признак нежёсткости первого порядка для поверхностей, содержащихся в гиперплоскости.

Теорема 12.1. *Всякая поверхность класса C^1, лежащая в $(m-1)$-мерной плоскости m-мерного евклидова пространства E, обладает нежёсткостью первого порядка в пространстве E.*

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы 11.3.

В [81] рассматриваются бесконечно малые изгибания второго порядка гиперплоскости. При таких бесконечно малых изгибаниях описывается структура изгибающего поля первого порядка.

Из признаков жёсткости к простейшим можно отнести инфинитезимальный аналог теоремы Бица 10.1.

Будем говорить, что погружение $z\colon X \to E$ n-мерного многообразия X в m-мерное евклидово пространство E обладает *локальной* жёсткостью первого порядка, если для каждой окрестности U_x каждой точки $x \in X$ ограничение $z|_{U_x}$ обладает жёсткостью первого порядка (заметим, данное определение отличается от определения жёсткости «в малом» по Н. В. Ефимову [16]. Жёсткость «в малом» означает, что данная точка обладает жёсткой окрестностью). В [31] доказана следующая теорема.

Теорема 12.2. *Если в каждой точке n-мерной поверхности класса C^3 в $(n+1)$-мерном плоском пространстве существует хотя бы два двумерных направления, определяемых линиями кривизны, по которым секционная кривизна поверхности отлична от нуля, то эта поверхность обладает локальной жёсткостью первого порядка в этом пространстве.*

Требование, чтобы в каждой точке поверхности существовали два двумерных направления, определяемые линиями кривизны, по которым секционная кривизна поверхности отлична от нуля, эквивалентно фигурирующему в теореме Бица условию на ранг второй основной формы: $\operatorname{rang} \mathrm{II} \geqslant 3$.

В [105] содержится инфинитезимальный аналог теоремы 10.2 Р. Сакстедера.

Теорема 12.3. *Пусть $z\colon X \to E$ — C^3-погружение n-мерного, $n \geqslant 3$, компактного многообразия X в $(n+1)$-мерное евклидово пространство E. Если поверхность $z(X)$ не содержит плоских областей размерности n, то она обладает жёсткостью первого порядка в E.*

В [53] получены инфинитезимальные аналоги результатов об однозначной определённости из [52]. Доказано, что всякая общая выпуклая гиперповерхность m-мерного евклидова пространства, не содержащая плоских областей размерности $m-1$, обладает жёсткостью первого порядка в окрестности каждой точки, не лежащей в плоской области размерности $m-2$ и $m-3$. Если же гиперповерхность содержит $(m-1)$-мерные плоские области, то она обладает жёсткостью первого порядка в окрестности указанных точек вне $(m-1)$-мерных плоских областей. В [12] эти результаты распространяются на случай эллиптического пространства.

В [121] рассматриваются бесконечно малые изгибания первого порядка одного класса гиперповерхностей, взаимно-однозначно проектирующихся на область гиперплоскости евклидова пространства. При краевых условиях типа скольжения получены признаки жёсткости таких гиперповерхностей.

В [154] (см. также [157]) исследуются необходимые условия на изгибающее поле первого порядка гиперповерхности, при которых существует индуцирующая его глобальная изометрия этой гиперповерхности.

В [139] доказана жёсткость гиперповерхности в E^{n+2}, являющейся произведением окружности и компактной строго выпуклой гиперповерхности класса C^∞ из пространства E^{n+1}.

Большинство из перечисленных результатов распространяется на случай пространства произвольной постоянной кривизны. Имеются также результаты о жёсткости гиперповерхностей произвольного риманова пространства. Так, в [28] доказано, что если кривизны Риччи $(n+1)$-мерного риманова пространства отрицательны в каждой точке некоторой гиперповерхности этого пространства, то эта гиперповерхность обладает жёсткостью первого порядка в указанном римановом пространстве в том смысле, что всякое её изгибающее поле совпадает с некоторым полем Киллинга пространства. В этой же работе получен признак жёсткости гиперповерхности с краем в римановом пространстве при условии закрепления края и описаны все изгибающие поля вполне геодезической гиперповерхности с закреплённой границей.

В [160] показано, что если гиперповерхность риманова пространства имеет параллельную вторую основную форму и не минимальна, то из существования не нормального вектора аффинной бесконечно малой деформации первого порядка этой поверхности следует существование ненулевого изгибающего поля на этой поверхности.

12.2. Признаки жёсткости и нежёсткости поверхностей с коразмерностью $p > 1$

Перечисленные в предыдущем пункте результаты показывают, что в классе гиперповерхностей нежёсткость является исключительным явлением. С другой стороны, интуитивно ясно, что поверхности с достаточно высокой коразмерностью обладают нежёсткостью первого порядка. Строгое доказательство этого факта, использующее идеи Э. Картана [86] и Дж. Нэша [45], получено в [122], где доказано, что всякая n-мерная поверхность класса C^2 обладает нежёсткостью первого порядка в $\frac{n(n+3)}{2}$-мерном евклидовом пространстве.

В связи с этим наибольший интерес представляют признаки жёсткости и нежёсткости поверхностей, коразмерность которых заключена в пределах $1 < p < \frac{n(n+1)}{2}$.

В [164] показано, что при определённых условиях типа невырожденности в случае аналитического погружения коразмерность $p = \frac{n(n+1)}{2}$ может быть снижена до $p = \frac{n(n-1)}{2}$. Доказано, что если X — аналитическое n-мерное многообразие, E — $\frac{n(n+1)}{2}$-мерное евклидово пространство и $z\colon X \to E$ — аналитическое погружение, то для каждой точки $x \in X$, касательное пространство к X в которой содержит неасимптотическое $(n-1)$-мерное подпространство для z (см. с. 26), найдётся такая окрестность U на X, что поверхность $z(U)$ обладает нежёсткостью первого порядка (ср. теорема 12.2).

В [31] получен инфинитезимальный аналог теоремы Дж. Д. Мура 10.13 об однозначной определённости риманова произведения поверхностей. В обозначениях, приведённых на с. 25, соответствующий результат формулируется следующим образом.

Теорема 12.4. *Если каждая из поверхностей F_σ, $\sigma = 1, \ldots, p$, принадлежит классу C^3 и обладает жёсткостью первого порядка в содержащем её плоском* *пространстве E_σ, то и риманово произведение F этих поверхностей обладает жёсткостью первого порядка в пространстве E — произведении пространств $E_1, \ldots, E_p$.*

Анализ системы (11.5) для погружений с достаточно высоким типовым числом позволил в [40] получить следующий аналог теоремы К. Б. Аллендорфера (теорема 10.7).

Теорема 12.5. *Если типовое число C^2-погружения $z\colon X \to E$ удовлетворяет условию $t(z) \geqslant 3$ и размерность главного нормального пространства в каждой точке многообразия X совпадает с коразмерностью поверхности $z(X)$, то погружение z обладает локальной жёсткостью первого порядка.*

Этот результат без требования на размерность главного нормального пространства получен в [105]. Однако понятие типового числа, используемое в этой работе, несколько отличается от используемого в теореме 12.5. Определение типового числа, на которое опирается результат [105], приводится в [95].

В [61] рассмотрены бесконечно малые изгибания $(k+1)$-мерного конуса с k-мерной направляющей в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}. Доказано, что если направляющая обладает жёсткостью первого порядка в содержащем её пространстве $E^n \subset E^{n+1}$ и её типовое число t не меньше 2, то конус обладает жёсткостью первого порядка в E^{n+1}. Отсюда и из теоремы 12.5 следует, что если k-мерная направляющая $(k+1)$-мерного конуса класса C^2 лежит в пространстве $E^n \subset E^{n+1}$ и имеет типовое число t не меньше 3, то конус обладает жёсткостью первого порядка в пространстве E^{n+1}.

В [133] рассмотрены бесконечно малые изгибания поверхности, склеенной из поверхностей F^+ и F^- класса C^2 (вообще говоря, различных) размерностей n^+ и n^- соответственно по k-мерной поверхности γ класса C^2. Доказано, что если поверхности F^+ и F^- обладают жёсткостью первого порядка в m-мерном пространстве E и в каждой точке поверхности γ размерность её главного нормального пространства совпадает с коразмерностью, то склеенная поверхность $F^+ \cup F^- \cup \gamma$ обладает жёсткостью первого порядка в E.

В [155] рассмотрены бесконечно малые изгибания второго порядка двумерной поверхности с краем в пятимерном евклидовом пространстве. При довольно общих предположения доказано, что из тривиальности бесконечно малого изгибания на границе следует его тривиальность на всей поверхности.

В [114] рассмотрен вопрос о продолжениях бесконечно малых изгибаний. Как и в случае изгибаний (с. 28), вводится понятие изометрического погружения $g\colon X \to V_c^{n+2}$ в виде композиции $g = h \circ f$, где $f\colon X \to V_c^{n+1}$ — изометрическое вложение n-мерного риманова многообразия X в $(n+1)$-мерное пространство V_c^{n+1} постоянной кривизны c, а $h\colon U \subset V_c^{n+1} \to V_c^{n+2}$ — изометрическое погружение области $U \supset f(X)$. Говорят, что бесконечно малое изгибание Z композиции $g = h \circ f$ допускает продолжение вдоль h, если $Z = \bar{Z} \circ f$, где $\bar{Z}$ — бесконечно малое изгибание погружения h. Доказывается, что если образ векторнозначной второй квадратичной формы погружения g имеет постоянную размерность, типовое число $t(f)$ вложения f или не меньше 4, или не меньше 5 и секционная кривизна многообразия X всюду неотрицательна, то или

1) $h = i$, где i — отображение вполне геодезического включения $V_c^{n+1} \subset V_c^{n+2}$ и Z допускает продолжение $\bar{Z}$ вдоль i, или
2) Z допускает единственное продолжение вдоль h.

12.3. Бесконечно малые изгибания расслоённых поверхностей

В [35, 40] выделен довольно широкий класс многомерных поверхностей, названных расслоёнными поверхностями, содержащий римановы произведения, и установлены признаки жёсткости и нежёсткости, а также аналитической неизгибаемости поверхностей этого класса.

Приведём определение расслоённой поверхности. Пусть $X_1, \ldots, X_q$ — C^∞-многообразия размерностей $n_1, \ldots, n_q$ соответственно, $E_1, \ldots, E_q$ — евклидовы пространства размерностей $m_1, \ldots, m_q$ соответственно, $2 \leqslant n_\lambda \leqslant m_\lambda$, $\lambda = 1, \ldots, q$. Через Y_q будем обозначать произведение многообразий:

$$Y_q = X_1 \times \ldots \times X_q,$$

через S_q — произведение евклидовых пространств:

$$S_q = E_1 \times \ldots \times E_q,$$

$Y_1 = X_1$, $S_1 = E_1$. Произведение S_q представляет собой евклидово пространство размерности $M_q = m_1 + \ldots + m_q$. Для каждого $\lambda = 1, \ldots, q$ полагаем

$$Y_\lambda = X_1 \times \ldots \times X_\lambda, \quad S_\lambda = E_1 \times \ldots \times E_\lambda.$$

Если $x_1 \in X_1, \ldots, x_q \in X_q$, то обозначаем $y_\lambda = (x_1, \ldots, x_\lambda)$, так что $y_{\lambda+1} = (y_\lambda, x_{\lambda+1})$.

Рассмотрим C^r-отображение $z_q\colon Y_q \to S_q$, $r \geqslant 1$. Будем называть его *q-кратно расслоённым погружением*, если в каждой точке $y_q = (x_1, \ldots, x_q) \in Y_q$ имеет место разложение

$$z_q = \rho_1(x_1) + \rho_2(y_2) + \ldots + \rho_q(y_q), \tag{12.1}$$

где $\rho_1\colon X_1 \to E_1$ — C^r-погружение, и для всякого $\mu = 1, \ldots, q-1$ $\rho_{\mu+1}\colon Y_{\mu+1} \to E_{\mu+1}$ — такое C^r-отображение, что для каждой точки $y_\mu \in Y_\mu$ отображение $\rho_{y_\mu}\colon X_{\mu+1} \to E_{\mu+1}$, определённое равенством $\rho_{y_\mu}(x_{\mu+1}) = \rho_{\mu+1}(y_\mu, x_{\mu+1})$, является C^r-погружением. Поверхность $F_q = z_q(Y_q)$ будем называть *расслоённой поверхностью*. Для каждого $\lambda = 1, \ldots, q$ будем обозначать

$$z_\lambda = \rho_1(x_1) + \rho_2(y_2) + \ldots + \rho_\lambda(y_\lambda).$$

При этом $z_\lambda\colon Y_\lambda \to S_\lambda$ является λ-кратно расслоённым погружением. Каждую поверхность $F_\lambda = z_\lambda(Y_\lambda) \subset S_\lambda$ будем называть *базой* поверхности $F_{\lambda+1}$, а каждую из поверхностей $\Phi_{y_\lambda} = \rho_{y_\lambda}(X_{\lambda+1}) \subset E_{\lambda+1}$ — *слоем* этой поверхности над точкой $y_\lambda \in Y_\lambda$.

Простейшим примером q-кратно расслоённой поверхности является риманово произведение поверхностей. В этом случае каждое ρ_λ в (12.1) зависит только от точки $x_\lambda \in X_\lambda$.

Существуют q-кратно расслоённые поверхности, не представимые в виде римановых произведений. Так, риманово произведение q двумерных сфер в трёхмерных евклидовых пространствах представляет собой конфигурационное многообразие механической системы (см. [2,54]), состоящей из q независимых пространственных маятников. Если же рассмотреть механическую систему из q последовательно соединённых пространственных маятников, то придём к q-кратно расслоённой поверхности, не представимой в виде риманова произведения.

Необходимое условие жёсткости l-го порядка, $l = 1, 2, \ldots, \infty$ (при $l = \infty$ — аналитической неизгибаемости), даёт следующая теорема.

Теорема 12.6. *Для того чтобы q-кратно расслоённая поверхность F_q обладала жёсткостью порядка $l \geqslant 1$ в пространстве S_q, необходимо, чтобы база F_1 обладала жёсткостью порядка l в пространстве E_1.*

Точку на поверхности, в которой размерность главного нормального пространства не совпадает с коразмерностью, назовём *точкой уплощения*. Одно из достаточных условий жёсткости q-кратно расслоённой поверхности F_q класса C^2 может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 12.7. *Пусть база F_1 и каждый слой Φ_{y_μ} q-кратно расслоённой поверхности F_q класса C^2 не содержат точек уплощения, а типовые числа этих поверхностей удовлетворяют условиям $t(F_1) \geqslant 2$, $t(\Phi_{y_\mu}) \geqslant 2$. Пусть, далее, база F_1 обладает (k,l)-жёсткостью, $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant \infty$ (аналитически неизгибаема при $l = \infty$) в пространстве E_1, а каждый слой Φ_{y_μ} обладает (k,l)-жёсткостью в пространстве $E_{\mu+1}$. Тогда поверхность F_q обладает (k,l)-жёсткостью в пространстве S_q.*

Рассмотрим q-кратно расслоённую поверхность F_q, заданную C^3-погружением $z_q\colon Y_q \to S_q$ вида (12.1), в котором

$$\rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\lambda} \rho_{\mu\lambda},$$

где $\rho_{\mu\lambda}\colon X_\mu \to E_\lambda$ — C^3-отображение, $\lambda \geqslant \mu$, причём $\rho_{\lambda\lambda}\colon X_\lambda \to E_\lambda$ — C^3-погружение, и $m_\lambda = n_\lambda + 1$. Пусть $\Phi_\lambda = \rho_{\lambda\lambda}(X_\lambda)$. В произвольной точке $x_\lambda \in X_\lambda$ рассмотрим двумерное подпространство $\tilde{T}_{x_\lambda}(X_\lambda)$ в касательном пространстве $T_{x_\lambda}(X_\lambda)$. В каждой точке $y_q = (y_{\lambda-1}, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \ldots, x_q) \in Y_q$ ему соответствует двумерное подпространство T_λ в касательном пространстве $T_{y_q}(Y_q)$, лежащее в пространстве

$$T_{y_q}(\{y_{\lambda-1}\} \times X_\lambda \times \{(x_{\lambda+1}, \ldots, x_q)\}).$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

A. В каждой точке каждого из многообразий X_λ существует двумерное подпространство $\tilde{T}_\lambda$, по которому кривизна поверхности Φ_λ отлична от нуля.

Б. В каждой точке $y_q \in Y_q$ для каждого $\lambda = 1, \ldots, q$ на двумерном подпространстве T_λ, соответствующем $\tilde{T}_\lambda$, вторые основные формы $\mathrm{II}(\nu_\lambda)$ и $\mathrm{II}(\nu_{\lambda+1})$ поверхности F_q в S_q не пропорциональны.

В [35] доказана следующая теорема.

Теорема 12.8. *Если q-кратно расслоённая поверхность F_q удовлетворяет условиям* А *и* Б *и база Φ_1 обладает жёсткостью порядка $l \geqslant 1$ (аналитически неизгибаема при $l = \infty$) в пространстве E_1, то поверхность F_q обладает жёсткостью порядка l в пространстве S_q.*

12.4. Признаки жёсткости многомерных поверхностей с краем

В этом разделе мы рассмотрим бесконечно малые изгибания первого порядка одного класса многомерных поверхностей с краем при краевых условиях типа скольжения.

Пусть $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ — $3n$-мерное евклидово пространство, представленное в виде произведения n трёхмерных евклидовых пространств $E_1, \ldots, E_n$. В каждом пространстве E_i зафиксируем прямоугольную декартову систему координат $Ox^iy^iz^i$, $i = 1, \ldots, n$. В пространстве E будем иметь прямоугольную декартову систему координат $Ox^1y^1z^1 \ldots x^ny^nz^n$. Обозначим через Π_i трёхмерную плоскость в E, параллельную координатной плоскости $Ox^iy^iz^i$ и лежащую в $3(n+1-i)$-мерной координатной плоскости $Ox^iy^iz^i \ldots x^ny^nz^n$. При фиксированном $i < n$ имеется непрерывное семейство плоскостей Π_i; при $i = n$ такая плоскость единственна, она совпадает с координатной плоскостью $Ox^ny^nz^n$.

Рассмотрим в E $2n$-мерную поверхность F класса C^2, удовлетворяющую следующим условиям[1].

А$'$. Для каждого номера $i = 1, \ldots, n$ каждое из сечений Φ_i поверхности F плоскостью Π_i, за исключением, быть может, конечного числа таких сечений при $i < n$, является двумерной выпуклой поверхностью ненулевой кривизны, причём каждое из сечений $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ является ограниченным.

Б$'$. Поверхность F допускает взаимно-однозначное ортогональное проектирование на координатную плоскость $Ox^1y^1 \ldots x^ny^n$.

Из условия Б$'$ следует, что поверхность F является образом C^2-погружения $z\colon D \to E$ вида

$$z(u) = (u, f^1(u), \ldots, f^n(u)),$$

где D — область в плоскости $Ox^1y^1 \ldots x^ny^n$, E — проекция поверхности F на эту плоскость, $u = (x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$ — точка из D. Из условия А$'$ следует, что при $i \geqslant 2$ фигурирующая в этом погружении функция f^i не зависит от $x^1, y^1, \ldots, x^{i-1}, y^{i-1}$. В частности, всякое сечение Φ_i задаётся уравнением

$$z^i = f^i(x^i, y^i, x_0^{i+1}, y_0^{i+1}, \ldots, x_0^n, y_0^n), \quad x_0^k, y_0^k = \mathrm{const}, \quad k > i.$$

[1]Можно показать, что поверхности с этим условием являются расслоёнными поверхностями.

Предположим, что наряду с условиями А$'$ и Б$'$ выполняется условие

В$'$. Если сечение Φ_n является неограниченным, то при $|x^n|, |y^n| \to \infty$ функция $f^n(x^n, y^n)$ имеет вид

$$f^n(x^n, y^n) = \rho^2(x^n, y^n)(1 + \varepsilon(x^n, y^n)),$$

где $\rho^2(x^n, y^n)$ — положительно определённая квадратичная форма переменных x^n, y^n, $\varepsilon(x^n, y^n) \to 0$.

При этих условиях рассмотрим бесконечно малые изгибания поверхности F в пространстве E с ограниченными полями вращений и вариациями коэффициентов вторых основных форм. Бесконечно малое изгибание поверхности F будем называть бесконечно малым изгибанием скольжения по заданной h-мерной плоскости, $0 \leqslant h \leqslant 3n$, если вдоль края ∂F изгибающее поле параллельно этой плоскости (при $h = 0$ изгибающее поле постоянно вдоль края).

Следующая теорема распространяет на многомерный случай классическую теорему о жёсткости двумерной выпуклой поверхности, взаимно-однозначно проектирующейся на плоскость относительно бесконечно малых изгибаний скольжения по этой плоскости (см., например, [10]).

Теорема 12.9. *Если проекция D поверхности F, удовлетворяющей условиям* А$'$—В$'$, *на плоскость $Ox^1y^1 \dots x^ny^n$ ограничена, то поверхность F не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний скольжения по $2n$-мерной плоскости $Ox^1y^1 \dots x^ny^n$.*

Заметим, что в многомерном случае размерность плоскости скольжения играет роль дополнительного условия на изгибающее поле и создаёт для него определённую шкалу ограничений. Чем выше эта размерность, тем менее жёсткие ограничения на изгибающее поле. Для плоскостей скольжения размерности $2n + 1$ имеет место следующая теорема.

Теорема 12.10. *Если проекция D поверхности F, удовлетворяющей условиям* А$'$—В$'$, *на плоскость $Ox^1y^1 \dots x^ny^n$ не ограничена, то поверхность F не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний скольжения по $(2n+1)$-мерной плоскости $Ox^1y^1 \dots x^ny^nz^n$.*

Эта теорема является многомерным аналогом теоремы о жёсткости бесконечной двумерной выпуклой поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве [47]. Доказательства теорем 12.9 и 12.10 содержатся в [33].

Применением теоремы Дарбу—Зауэра (раздел 11.4) условие Б взаимно-однозначной проектируемости на плоскость можно заменить на условие звёздности относительно некоторой плоскости. Поверхность называется звёздной относительно некоторой $(h-1)$-мерной плоскости Π^{h-1}, если всякая открытая h-мерная полуплоскость с границей Π^{h-1} имеет с этой поверхностью не более одной общей точки и не касается поверхности. При $h = 1$ плоскость Π^{h-1} является точкой, и говорят о звёздности поверхности относительно этой точки.

Допустим, что вместо условия Б$'$ рассматриваемая $2n$-мерная поверхность F в $3n$-мерном пространстве E удовлетворяет следующему условию.

Б$''$. Поверхность F расположена в полупространстве $z^n \geqslant 0$, звёздна относительно $(n-1)$-мерной плоскости $\Pi_{n-1} = Oz^1 \ldots z^{n-1}$, причём плоскость $z^n = 0$ не содержит граничных точек поверхности F.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 12.11. *Поверхность F, удовлетворяющая условиям* А$'$ *и* Б$''$, *не допускает в E нетривиальных бесконечно малых изгибаний скольжения по $2(n-1)$-мерной плоскости $Ox^1y^1 \ldots x^{n-1}y^{n-1}$.*

Поскольку условие скольжения по заданной плоскости влечёт условие скольжения по всякой содержащей эту плоскость плоскости большей размерности, то из последней теоремы, в частности, следует, что при выполнении условий А$'$ и Б$''$ поверхность F не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний при условии закрепления её края.

Из условий А$'$ и Б$''$ следует, что среди всех сечений Φ_i, $i = 1, \ldots, n$, плоскостями Π_i замкнутой поверхностью может быть только Φ_n. В этой ситуации имеет место следующая теорема.

Теорема 12.12. *Если сечение Φ_n является замкнутой поверхностью, то поверхность F, удовлетворяющая условиям* А$'$ *и* Б$''$, *не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний скольжения по $(2n+1)$-мерной плоскости $Ox^1y^1 \ldots x^ny^nz^n$.*

В случае незамкнутого сечения Φ_n размерность плоскости скольжения в этой теореме может быть снижена. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 12.13. *Если сечение Φ_n допускает взаимно-однозначное проектирование на плоскость Ox^ny^n, то поверхность F, удовлетворяющая условиям* А$'$ *и* Б$''$ *не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний скольжения по $2n$-мерной плоскости $Ox^1y^1 \ldots x^ny^n$.*

В списке литературы мы старались указывать номера рефератов цитируемых работ хотя бы в одном из следующих реферативных журналов: «Реферативный журнал „Математика“» (РЖМат), «Zentralblatt MATH» (Zbl), «Mathematical Reviews» (MR).

Литература

[1] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. — Киев: Наукова думка, 2002. — 468 с.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с. (Zbl, 385, 70001; Zbl, 386, 70001.)

[3] Борисенко А. А. Об изометрических подмногообразиях произвольной коразмерности в евклидовом пространстве с совпадающими грассмановыми образами // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 4. — С. 29—34. (РЖМат, 1993, 5А500.)

[4] Боровский Ю. Е. Вполне интегрируемые системы Пфаффа // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1959. — № 3. — С. 28—40.

[5] Боровский Ю. Е. О вполне интегрируемых системах Пфаффа // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1960. — № 1. — С. 35—38. (Zbl, 106, 69.)

[6] Боровский Ю. Е. Теорема Бица для нерегулярных гиперповерхностей // Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 744—751. (РЖМат, 1964, 1А527.)

[7] Боровский Ю. Е. Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения // Сиб. мат. журн. — 1988. — Т. 24, № 2. — С. 10—16. (РЖМат, 1988, 8А649.)

[8] Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. — М., 1975. — 220 с. (Zbl, 306, 58001.)

[9] Васильев А. М. Теория дифференциально-геометрических структур. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. — 192 с. (Zbl, 656, 53001.)

[10] Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции. — М., 1988. — 510 с. (Zbl, 698, 47036.)

[11] Горзий Т. А. О локальной неизгибаемости выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства // Укр. геом. сб. — 1975. — № 18. — С. 49—50. (РЖМат, 1976, 4А778.)

[12] Горзий Т. А. Жёсткость выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства // Укр. геом. сб. — 1976. — № 18. — С. 66—68.

[13] Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М., 1956. — 250 с.

[14] Джакобович Г. Продолженные изометрические вложения // Исследования по метрической теории поверхностей. Сер. Математика. Новое в зарубежной науке. — М.: Наука, 1980. — С. 239—263.

[15] Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, № 2. — С. 47—158. (Zbl, 0030, 06901.)

[16] Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом». — М., 1949. — 128 с. — (Тр. МИАН СССР; Т. 30.) (Zbl, 0011, 4883.)

[17] Ефимов Н. В. Некоторые предложения о жёсткости и неизгибаемости // Успехи мат. наук. — 1952. — Т. 7, № 5. — С. 215—224. (Zbl, 0047, 15004.)

[18] Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х. Изгибание поверхностей. I // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. Вып. 23. — М.: ВИНИТИ, 1991. — С. 131—184. (РЖМат, 1991, 11А817.)

[19] Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х. Изгибание поверхностей. II // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и её прил. Тематические обзоры. Т. 8. — М.: ВИНИТИ, 1995. — С. 108—167. (РЖМат, 1997, 2А415.)

[20] Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Т. 2. — М.; Л.: ОГИЗ; ГИТТЛ, 1948. — 407 с. (Zbl, 0045, 24504.)

[21] Картан Э. Геометрия римановых пространств. — М., 1936. — 244 с.

[22] Кейпер Н. О C^1-изометричных вложениях // Математика. Сб. переводов. — 1957. — Т. 1, № 2. — С. 17—28. (РЖМат, 1960, 13207.)

[23] Ким В. С. Об однозначной определённости двумерных поверхностей в евклидовом пространстве // Вопросы дифференциальной геометрии в целом. — Л., 1983. — С. 67—74. (РЖМат, 1983, 12А941.)

[24] Климентов С. Б. Глобальная формулировка основной теоремы теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны // Укр. геом. сб. — 1979. — № 22. — С. 64—81. (РЖМат, 1979, 8А728.)

[25] Климентов С. Б. О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 3. — С. 393—403. (РЖМат, 1985, 1А876.)

[26] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М., 1981. — 416 с. (Zbl, 526, 53001.)

[27] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М., 1967. — 204 с. (Zbl, 146, 175.)

[28] Лизунова Л. Ю О бесконечно малых изгибаниях гиперповерхностей в римановом пространстве // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1970. — № 3. — С. 36—42. (РЖМат, 1970, 9А549.)

[29] Лузин Н. Н. Доказательство одной теоремы теории изгибания // Изв. АН СССР. ОТН. — 1939. — № 2. — С. 81—106; № 7. — С. 115—132; № 10. — С. 65—84. (Zbl, 0023, 26704.)

[30] Марков П. Е. Бесконечно малые изгибания двумерной поверхности в четырёхмерном плоском пространстве // Укр. геом. сб. — 1978. — № 21. — С. 55—72. (РЖМат, 1978, 10А595.)

[31] Марков П. Е. Бесконечно малые изгибания некоторых многомерных поверхностей // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 3. — С. 469—479. (РЖМат, 1980, 7А693.)

[32] Марков П. Е. Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей // Укр. геом. сб. — 1982. — № 25. — С. 87—94. (РЖМат, 1983, 1А743.)

[33] Марков П. Е. Бесконечно малые изгибания одного класса многомерных поверхностей с краем // Мат. сб. — 1983. — Т. 121, № 1. — С. 48—59. (РЖМат, 1983, 9А670.)

[34] Марков П. Е. Об одном классе бесконечно малых изгибаний поверхностей // Изв. СКНЦ ВШ. — 1985. — № 4. — С. 22—25. (РЖМат, 1986, 7А867.)

[35] Марков П. Е. Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Мат. сб. — 1987. — Т. 133, № 1. — С. 64—85. (РЖМат, 1987, 8А672.)

[36] Марков П. Е. О погружении метрик, близких к погружаемым // Укр. геом. сб. — 1992. — № 35. — С. 49—67. (Zbl, 0835, 53069.)

[37] Марков П. Е. Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений. 1 // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1997. — № 9. — С. 21—34. (РЖМат, 1998, 3А438.)

[38] Марков П. Е. Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений. 2 // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1997. — № 11. — С. 41—51. (MR, 99f:53063.)

[39] Марков П. Е. Критерий конгруэнтности многомерных поверхностей в терминах основных форм // Тезисы докл. на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. — Ростов-на-Дону, 1998. — С. 50—51.

[40] Марков П. Е. Типовое число и жёсткость многомерных поверхностей // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 67—88. (РЖМат, 2001.08, 13А558.)

[41] Марков П. Е., Шаповалова Л. Н. Об одной системе уравнений теории изометрических погружений // Изв. высш. учебн. завед. Северо-Кавказский регион. — 1995. — № 2. — С. 13—17. (Zbl, 0859, 53042.)

[42] Млодзъевскій Б. К. Изслъдования объ изгибаніи поверхностей. — М., 1886. — 134 с.

[43] Мур Дж. Д. Изометрические погружения римановых произведений // Исследования по метрической теории поверхностей. Сер. Математика. Новое в зарубежной науке. — М.: Наука, 1980. — С. 264—276. (Zbl, 483, 53001.)

[44] Нэш Дж. C^1-изометричные вложения // Математика. Сб. переводов. — 1957. — Т. 1, № 2. — С. 3—16. (РЖМат, 1960, 13208.)

[45] Нэш Дж. Проблема вложений для римановых многообразий // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. 26, № 4. — С. 173—216. (Zbl, 217, 475.)

[46] Перепёлкин Д. И. Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n // Мат. сб. — 1935. — Т. 42, № 1—3. — С. 100—120. (Zbl, 0012, 08702.)

[47] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М., 1969. — 760 с. (РЖМат, 1969, 9А495.)

[48] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. — М., 1986. — 400 с.

[49] Рыжков В. В. Изгибание поверхностей евклидова пространства E_N с сохранением сопряжённой системы // Тр. Моск. инженерно-строительного ин-та. — 1960. — № 8. — С. 86—112. (РЖМат, 1962, 4А404.)

[50] Сабитов И. Х. Локальная теория изгибаний поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 48. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 196—270. (MR, 91c:53004.)

[51] Сенькин Е. П. Об одном свойстве изометрических преобразований выпуклых поверхностей в пространстве высшего типа измерений // Укр. геом. сб. — 1966. — № 3. — С. 95. (РЖМат, 1967, 9А468.)

[52] Сенькин Е. П. Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей // Укр. геом. сб. — 1972. — № 12. — С. 131—152. (РЖМат, 1973, 2А623.)

[53] Сенькин Е. П. Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей» // Укр. геом. сб. — 1975. — № 17. — С. 132—134. (РЖМат, 1975, 7А929.)

[54] Синдж Дж. Л. Тензорные методы в динамике. — М., 1947. — 44 с.

[55] Соболев С. Д. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1960. — 255 с. (Zbl, 123, 90.)

[56] Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. — М., 1960. — 300 с.

[57] Сретенский Л. Н. Об изгибании поверхностей // Мат. сб. — 1929. — Т. 36, № 2. — С. 109—111.

[58] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М., 1948. — 348 с.

[59] Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.; Л., 1948. — 432 с.

[60] Ху Хэшен. Об изгибании гиперповерхности V_m в евклидовом E_{m+1} с сохранением средней кривизны // Шусюэ сюэбао. Acta Math. Sinica. — 1956. — Vol. 6, no. 1. — P. 127—137. (РЖМат, 1958, 87134.)

[61] Шкрыль Е. В. О жёсткости многомерного конуса // Изв. высш. учебн. завед. Северо-Кавказский регион. — 2000. — № 4. — С. 20—22. (Zbl, pre01902006.)

[62] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М., 1948. — 316 с.

[63] Яненко Н. Н. Геометрическая структура поверхностей малого типа // ДАН СССР. — 1949. — Т. 64, № 5. — С. 641—644. (MR, 1950, vol. 11, no. 5, p. 395.)

[64] Яненко Н. Н. О некоторых необходимых критериях изгибаемости поверхностей в многомерном евклидовом пространстве // ДАН СССР. — 1949. — Т. 65, № 4. — С. 449—452. (MR, 1950, vol. 11, no. 5, p. 396.)

[65] Яненко Н. Н. Структура изгибаемых поверхностей в многомерном евклидовом пространстве // ДАН СССР. — 1950. — Т. 72, № 5. — С. 857—859. (MR, 1951, vol. 12, no. 5, p. 357.)

[66] Яненко Н. Н. О некоторых проективно-инвариантных свойствах изгибаемых поверхностей многомерного евклидова пространства // ДАН СССР. — 1950. — Т. 72, № 6. — С. 1025—1028. (MR, 1951, vol. 12, no. 5, p. 357.)

[67] Яненко Н. Н. Бесконечно малые изгибания поверхностей многомерного евклидова пространства и проективно-инвариантные характеристики изгибаемых поверхностей // Успехи мат. наук. — 1952. — Т. 7, № 50. — С. 138—139.

[68] Яненко Н. Н. О связи между метрическими и проективными свойствами поверхностей // ДАН СССР. — 1952. — Т. 82, № 5. — С. 685—688. (MR, 1953, vol. 14, no. 1, p. 87.)

[69] Яненко Н. Н. О классе римановой метрики // ДАН СССР. — 1952. — Т. 83, № 4. — С. 533—536. (MR, 1953, vol. 14, no. 1, p. 87.)

[70] Яненко Н. Н. Метрики класса 2 // ДАН СССР. — 1952. — Т. 83, № 5. — С. 667—669. (MR, 1953, vol. 14, no. 1, p. 87.)

[71] Яненко Н. Н. Некоторые необходимые признаки изгибаемых поверхностей V_m в $(m+q)$-мерном евклидовом пространстве // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. — 1952. — Вып. 9. — С. 236—287. (MR, 1953, vol. 14, no. 8, p. 794.)

[72] Яненко Н. Н. Некоторые вопросы вложения римановых метрик в евклидовы пространства // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 8, № 1. — С. 21—100. (MR, 1953, vol. 14, no. 11, p. 1122.)

[73] Яненко Н. Н. К теории вложения поверхностей в многомерном евклидовом пространстве // Тр. ММО. — 1954. — Вып. 3. — С. 89—180. (РЖМат, 1955, 11.6079.)

[74] Abe K., Erbacher J. Isometric immersions with the same Gauss map // Math. Ann. — 1975. — Bd. 215. — S. 197—201. (РЖМат, 1975, 12А704.)

[75] Allendoerfer C. B. Rigidity for spaces class greater than one // Amer. Math. J. — 1939. — Vol. 61, no. 1. — P. 633—644. (MR, 1940, vol. 1, no. 1, p. 28; Zbl, 0021, 15803.)

[76] Beez R. Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung // Zeitschr. Math. Phys. — 1875. — Bd. 20. — S. 423—444.

[77] Beez R. Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung // Zeitschr. Math. Phys. — 1876. — Bd. 21. — S. 373—401.

[78] Berger E., Bryant R., Griffiths P. The Gauss equations and rigidity of isometric embeddings // Duke Math. J. — 1983. — Vol. 50, no. 3. — P. 803—892. (РЖМат, 1984, 5А766.)

[79] Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale. Vol. 1. — Pisa: Spoerri, 1902.

[80] Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale. Vol. 2. — Pisa: Spoerri, 1903.

[81] Bishop R. L. An infinitesimal cylindricity theorem // Tenzor. — 1982. — Vol. 38, no. 2. — P. 147—153. (РЖМат, 1984, 9А736.)

[82] Bleecker D. Isometric deformations of compact hypersurfaces // Geom. Dedicata. — 1997. — Vol. 64, no. 2. — P. 193—227. (РЖМат, 1997, 10А521.)

[83] Borissenko A. About isometric submanifolds of the arbitrary codimension with the same Grassmannian image // Congr. Geom., Thessaloniki, 1991. — Thessaloniki, 1992. — P. 114. (РЖМат, 1994, 10А375.)

[84] Bryant R., Griffiths P., Yang D. Characteristics and existence of isometric embeddings // Duke Math. J. — 1983. — Vol. 50, no. 4. — P. 893—994. (Zbl, 0536, 53022.)

[85] Cartan E. La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclideen réel a n dimensions // Bull. Soc. Math. France. — 1916. — Vol. 44. — P. 65—99.

[86] Cartan E. Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclideen // Ann. Soc. Math. Polon. — 1927. — Vol. 6. — P. 1—7.

[87] Chen C. C. A characterization of the catenoid // An. Acad. Brasil. Ci. — 1979. — Vol. 51. — P. 1—3. (Zbl, 408, 53004.)

[88] Chen F. Isometric surfaces in E^5 // Jiangxi Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban (J. Jiangxi Norm. Univ. Natur. Sci. Ed.). — 1997. — Vol. 21, no. 4. — P. 289—292. (РЖМат, 1998, 12А529.)

[89] Chern S.-S. On a theorem of algebra and its geometrical applications // J. Indian Math. Soc. — 1944. — Vol. 8. — P. 29—36. (MR, 1945, vol. 6, no. 8, p. 216.)

[90] Chern S.-S. La géometrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions // Enseign. Math. — 1951—1954. — Vol. 40. — P. 26—46.

[91] Chern S.-S., Osserman R. Remarks on the Riemannian metric of a minimal submanifold // Geom Symp. — Springer, 1980. — P. 49—90. — (Lect. Notes Math.; Vol. 894.) (MR, 83k:53010.)

[92] Cho C.-K., Han C.-K. Comptability equations for isometric embeddings of Riemannian manifolds // Rocky Mountain J. Math. — 1993. — Vol. 23, no. 4. — P. 1231—1252. (MR, 95c:53021.)

[93] Connely R., Servatius C. Higher-order rigidity — what is the proper definition? // Discrete Comput. Geom. — 1994. — Vol. 11, no. 2. — P. 193—200. (MR, 94m:52027.)

[94] Dajczer M. Rigidity of hypersurfaces // Proc. 15th Braz. Colloq. Math. Poços de Caldas, Braz. 1985. — 1987. — P. 269—272. (Zbl, 642, 53008.)

[95] Dajczer M., Antonucci M., Oliveira G., Lima-Filho P., Tojeiro R. Submanifolds and Isometric Immersions. — Housten: Publish or Perish, 1986 — 173 p. — (Math. Lect. Series; Vol. 13.) (Zbl, 705, 53003.)

[96] Dajczer M., Florit L. On conformally flat submanifolds // Comm. Anal. Geom. — 1996. — Vol. 4, no. 2. — P. 261—284. (Zbl, 865, 53006.)

[97] Dajczer M., Florit L. Euclidean conformally flat submanifolds in codimension two obtained as intersections // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127, no. 1. — P. 265—269. (РЖМат, 1999, 12А661.)

[98] Dajczer M., Florit L. Compositions of isometric immersions in higher codimensions // Manuscripta Math. — 2001. — Vol. 105. — P. 507—517; Erratum: ibid. — 2003. — Vol. 110. — P. 135. (MR, 2002m:53096.)

[99] Dajczer M., Florit L. Genuine deformations of submanifolds // Comm. Anal. Geom. — 2004. — Vol. 12, no. 5. — P. 1105—1129. (MR, 2005g:53094.)

[100] Dajczer M., Florit L. Genuine rigidity of Euclidean submanifolds in codimension two // Geom. Dedicata. — 2004. — Vol. 106. — P. 195—210.

[101] Dajczer M., Florit L., Tojeiro R. On deformable hypersurfaces in space forms // Ann. Mat. Pura Appl. — 1998. — Vol. 174. — P. 36—390. (MR, 2001b:53067.)

[102] Dajczer M., Gromol K. Gauss parametrizations and rigidity aspect of submanifolds // J. Differential Geom. — 1985. — Vol. 22, no. 1. — P. 1—12. (Zbl, 588, 53007.)

[103] Dajczer M., Gromol K. Rigidity for complete Euclidean hypersurfaces // J. Differential Geom. — 1990. — Vol. 31, no. 2. — P. 401—416. (РЖМат, 1990, 12A754.)

[104] Dajczer M., Gromol K. Isometric deformations of compact Euclidean submanifolds in codimension 2 // Duke Math. J. — 1995. — Vol. 79, no. 3. — P. 605—618. (РЖМат, 1996, 6A447.)

[105] Dajczer M., Rodriguez L. Infinitesimal rigidity of Euclidean submanifolds // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1990. — Vol. 40, no. 4. — P. 939—949. (РЖМат, 1991, 12A743.)

[106] Dajczer M., Tenenblat K. Rigidity for complete Weingarten hypersurfaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 312, no. 1. — P. 129—140. (РЖМат, 1989, 12A761.)

[107] Dajczer M., Tojeiro R. On compositions of isometric immersions // J. Differential Geom. — 1992. — Vol. 36, no. 1. — P. 1—18. (Zbl, 768, 53027.)

[108] Dajczer M., Tojeiro R. On submanifolds of two manifolds // Math. Z. — 1993. — Vol. 214, no. 3. — P. 405—413. (РЖМат, 1996, 10A471.)

[109] Darboux G. Leçons sur la théorie des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal. 4 partie. — Paris, 1946. — 554 p.

[110] Do Carmo M., Dajczer M. A rigidity theorem for higher codimension // Math. Ann. — 1986. — Bd. 109. — S. 577—583. (РЖМат, 1986, 12A1003.)

[111] Do Carmo M., Dajczer M. Conformal rigidity // Amer. J. Math. — 1987. — No. 109. — P. 963—985. (Zbl, 631, 53043.)

[112] Do Carmo M., Warner F. Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres // J. Differential Geom. — 1970. — Vol. 4. — P. 133—144. (Zbl, 0201, 23702.)

[113] Dolbeault-Lemoin S. Sur la déformabilité des variétés plongées dans l'espace de Riemann // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1956. — Vol. 3, no. 73. — P. 357—438. (РЖМат, 1959, 3, 3177.)

[114] Florit L. A. On extensions of infinitesimal deformations // J. London Math. Soc. — 1996. — Vol. 53, no. 3. — P. 615—624. (MR, 97e:53113.)

[115] Gardner R. B. New viewpoints in the geometry of submanifolds of R^N // Bull. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 26, no. 1. — P. 1—35. (Zbl, 0363, 53027.)

[116] Goldstein R., Ryan P. Rigidity and energy // Global Analysis Appl. — 1974. — Vol. 2. — P. 233—243.

[117] Goldstein R., Ryan P. Infinitesimal rigidity theorem for of submanifolds // J. Differential Geom. — 1975. — Vol. 10, no. 1, 2. — P. 46—60. (Zbl, 0302, 53029.)

[118] Hájková V. Deformations of hypersurfaces in R^4 // Differential Geom. and Appl. Satellite Conf. of ICM in Brno, 1998. — Brno: Masaryk University, 1999. — P. 191—194.

[119] Harle C. E. Rigidity of hypersurface of constant scalar curvature // Bull. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76, no. 4. — P. 710. (РЖМат, 1971, 2A641.)

[120] Harle C. E. Rigidity of hypersurface of constant scalar curvature // J. Differential Geom. — 1971. — Vol. 5, no. 12. — P. 85—111. (РЖМат, 1972, 1A1124.)

[121] Ivanova-Karatopraklieva I. Infinitesimal rigidity of hypersurfaces in Euclidean space // Доклади на Българската академия на науките. Comp. Red. Acad. Bulg. Sci. — 2000. — Vol. 53, no. 6. — P. 9—12. (MR, 2001g:53007.)

[122] Jacobowitz H. Implicit funcion theorems and isometric embeddings // Ann. Math. — 1972. — Vol. 95, no. 2. — P. 191—225. (РЖМат, 1972, 11A438.)

[123] Jacobowitz H. Deformations having a hypersurface fixed // Partial Diff. Equ., Berkeley 1971, Proc. Sympos. Pure Math. 23. — 1973. — P. 343—351. (Zbl, 26, 53003.)

[124] Jacobowitz H. Local analytic isometric deformations // Indiana Univ. Math. J. — 1982. — Vol. 31, no. 1. — P. 47—55. (РЖМат, 1982, 10A543.)

[125] Jacobowitz H. Local isometric embeddings // Ann. Math. Studies. — 1982. — No. 102. — P. 381—393. (РЖМат, 1982, 9A619.)

[126] Jacobowitz H. The Gauss—Codazzi equations // Tensor. — 1982. — Vol. 39. — P. 15—22.

[127] Kaneda E. Global rigidity of compact classical Lie groups // Hokkaido Math. J. — 1985. — No. 14. — P. 365—385. (Zbl, 589, p. 266.)

[128] Kaneda E., Tanaka N. Rigidity for isometric imbeddings // J. Math. Kyoto Univ. — 1978. — No. 18. — P. 1—70. (Zbl, 419, 53031.)

[129] Killing W. Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. — Leipzig: Teubner, 1885. — 264 p.

[130] Kowalski O. Some algebraic theorems on vector-valued forms and their geometric applications // Colloq. Math. — 1972. — Vol. 26. — P. 59—92. (РЖМат, 1973, 6A742.)

[131] Kuiper N. C^1-isometric imbeddings // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. — 1955. — Vol. A58, no. 4. — P. 545—556; Indag. Math. — 1955. — Vol. 17, no. 4. — P. 545—556. (РЖМат, 1957, 847.)

[132] Kuiper N. C^1-isometric imbeddings // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. — 1955. — Vol. A58, no. 5. — P. 683—689; Indag. Math. — 1955. — Vol. 17, no. 5. — P. 683—689. (РЖМат, 1957, 847.)

[133] Markov P., Trejos O. Deformaciones isométricas infinitesimales de superficies multidimensionales ensambladas // Rev. Mat. Teor. Apl. — 2001. — Vol. 8, no. 1. — P. 27—32.

[134] Masatoshi K. Isometric deformations of hypersufaces in Euclidean space preserving mean curvature // Tôhoku Math. J. — 1992. — Vol. 44, no. 3. — P. 433—442. (РЖМат, 1993, 5A501.)

[135] Matsuyama Y. Rigidity of hypersufaces with constant mean curvature // Tôhoku Math. J. — 1976. — Vol. 28. — P. 199—203. (MR, 1977, vol. 54, no. 2, #3634.)

[136] Moor J. D. Isometric immersions of Riemannian products // J. Differential Geom. — 1971. — Vol. 5, no. 1. — P. 159—168. (РЖМат, 1972, 1A1101; Zbl, 213, 238.)

[137] Mori H. Remarks on complete deformable hypersurfaces in H^{n+1} // Indiana Math. J. — 1993. — Vol. 42. — P. 361—366. (MR, 94g:53046.)

[138] Mori H. Remarks on complete deformable hypersurfaces in R^4 // J. Differential Geom. — 1994. — Vol. 4. — P. 1—6. (MR, 95e:53085.)

[139] Nannicini A. Rigidita infinitesima per le ipersurficie compacte fortemente convesse di R^{n+1} // Bol. Unione Mat. Ital. — 1980, — Vol. 2, suppl. — P. 181—194. (РЖМат, 1981, 6A728.)

[140] Nash J. F. C^1-isometric imbeddings // Ann. Math. — 1954. — Vol. 60, no. 3. — P. 383—396. (РЖМат, 1956, 2439.)

[141] Nomizu K. Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions // Tôhoky Math. J. — 1977. — Vol. 28, no. 1. — P. 613—617. (РЖМат, 1977, 9A846.)

[142] Oliker V. Some remarks on elliptic equations and infinitesimal deformations of submanifolds // Global Differential Geometry and Global Analysis, Proc. Colloq., Berlin 1979. — Springer, 1981. — P. 211—220. — (Lect. Notes Math.; Vol. 838.) (РЖМат, 1981, 11A763.)

[143] Ros A. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem // J. Differential Geom. — 1988. — Vol. 27, no. 2. — P. 215—220. (РЖМат, 1988, 9A809.)

[144] Sacksteder R. On hypersurface with no negative sectional curvatures // Amer. J. Math. — 1960. — Vol. 82. — P. 609—630. (Zbl, 1970, 1941H.)

[145] Sacksteder R. The rigidity of hypersurfaces // J. Math. Mech. — 1962. — Vol. 11, no. 27. — P. 929—939. (Zbl, 0108, 34702.)

[146] Sasaki S. A global formulation of the fundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space // Nagoya Math. J. — 1958. — Vol. 13. — P. 69—82. (MR, 1959, vol. 20, no. 5, #3565, p. 588.)

[147] Sasaki S. A proof of the fundamental theorem of hypersurfaces in a space-form // Tensor. — 1972. — No. 24. — P. 363—373.

[148] Sbrana U. Sulle varietá ad $n-1$ dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1909. — Vol. 27. — P. 1—45.

[149] Silva S. L. On isometric and conformal rigidity of submanifolds // An. Acad. Brasil. Ci. — 1999. — Vol. 71, no. 3. Pt. I. — P. 321—325. (Zbl, 957, 53020.)

[150] Silva S. On isometric and conformal rigidity of submanifolds // Pacific J. Math. — 2001.— Vol. 199. — P. 227—247. (MR, 2002f:53065.)

[151] Soyuçok Z. The problem of isometric deformations of a Euclidean hypersurface preserving mean curvature // Bull. Tech. Univ. Istambul. — 1996. — Vol. 49, no. 3—4. — P. 551—562. (Zbl, 934, 53013.)

[152] Spivak M. A Compehensive Introduction to Differential Geometry. Vol 4. — Berkleley, 1979. (Zbl, 306, 53002.)

[153] Spivak M. A Compehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. 5. — Boston: Perish, 1975. (Zbl, 306, 53003.)

[154] Švec A. On infinitesimal isometries of a hypersurface // Czechoslovak Math. J. — 1974. — No. 24. — P. 150—163. (РЖМат, 1975, 1A752.)

[155] Švec A. On the rigidity of certain surfaces in E^5 // Czechoslovak Math. J. — 1977. — No. 27. — P. 250—257. (РЖМат, 1977, 12A752.)

[156] Švec A. On the equivalence of isometric surfaces in E^4 // Beitr. Algebra Geom. — 1980. — Vol. 9. — P. 7—12. (РЖМат, 1980, 12A776.)

[157] Švec A. Global Differential Geometry of Surfaces. — Berlin, 1981. (Zbl, 481, 53048.)

[158] Szczarba R. H. On existence and rigidity of isometric immersions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — No. 75. — P. 583—787. (Zbl, 0177, 24601; MR, 1970, vol. 40, no. 3, #3471.)

[159] Szczarba R. H. On isometric immersions of Riemannian manifolds in Euclidean space // Bol. Soc. Brasil Mat. — 1970. — Vol. 1. — P. 31—45. (MR, 1974, vol. 47, no. 3, #4182.)

[160] Tachibana S. On isometric deformation vector of the hypersurfaces in Riemannian manifolds // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. — 1976. — Vol. 27, no. 1. — P. 1—9. (РЖМат, 1977, 1A706.)

[161] Tanaka N. Rigidity for elliptic isometric embeddings // Proc. Japan Acad. — 1972. — No. 48. — P. 370—372. (РЖМат, 1973, 7A725.)

[162] Tanaka N. Rigidity for elliptic isometric embeddings // Nagoya Math. J. — 1973. — Vol. 51. — P. 137—160. (MR, 1974, vol. 48, no. 4, #7173.)

[163] Tenenblat K. A rigidity theorem for there-dimensional submanifolds in Euclidean six-space // J. Differential Geom. — 1979. — Vol. 14, no. 2. — P. 187—203. (РЖМат, 1981, 4A669; Zbl, 0424, 57009.)

[164] Tenenblat K. On infinitesimal isometric deformations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 75, no. 2. — P. 269—275. (РЖМат, 1980, 1A777.)

[165] Thomas T. Y. Riemann spaces of class one and their characterization // Acta Math. — 1936. — Vol. 67. — P. 169—211.

[166] Vincensini P. Sur une méthode d'application isométrique des surfaces de E_3 dans E_4 // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A. — 1987. — No. 43. — P. 13—27. (РЖМат, 1989, 3A623.)

[167] Whitt L. Isometric homotopy and codimention-two isometric immersions of the n-sphere into Euclidean space // J. Differential Geom. — 1979. — Vol. 14, no. 2. — P. 295—302. (Zbl, 427, 53027.)

[168] Yano K. Sur la théorie des déformations infinitésimales // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. — 1949. — No. 6. — P. 1—75. (MR, 1950, vol. 11, no. 9, p. 688.)

[169] Yano K. Infinitesimal variations of submanifolds // Kodai Math. J. — 1978. — Vol. 1. — P. 30—44. (Zbl, 388, 53017.)