Каноническое разложение кусочно-аффинных функций, многогранники-следы и геометрические вариационные задачи

Н. С. ГУСЕВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: nikitahanser@rambler.ru

УДК 514.144.23+514.172.45+514.177.2

Ключевые слова: кусочно-аффинная функция, контракция, многогранник-след.

Аннотация

В статье строится каноническое разложение кусочно-аффинных отображений, на базе которого вводятся отношение их эквивалентность и понятие многогранника-следа как класса таких эквивалентных отображений. Также определены понятия объёма и деформации многогранников-следов, доказана непрерывность объёма и найдена формула первой вариации объёма при деформации, которая использована для получения аналога принципов Плато.

Abstract

N. S. Gusev, Canonical decompositions of piecewise affine mappings, polyhedra-traces, and geometrical variational problems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 57—94.

In this paper, canonical decompositions of arbitrary piecewise affine mappings are constructed. Then the equivalence of these mappings is introduced and the concept of polyhedron-trace is defined as an equivalence class. Finally, the concepts of the volume and the deformation of polyhedra-traces are introduced, the continuity of the volume is proved, and the formula of first variation is obtained. These concepts give an analog of the Plateau principles.

Предисловие

В данной работе изучается структура кусочно-аффинных отображений. Среди них выделяются два естественных класса: отображения, *не вырождающие отрезки*, и так называемые *контракции*, т. е. отображения, у которых прообраз каждой точки образа связен. В работе показано, что каждое кусочно-аффинное отображение представимо в виде композиции кусочно-аффинных контракции и отображения, не вырождающего отрезки. Если имеется два таких представления, то соответствующие не вырождающие отрезки отображения отличаются на кусочно-аффинный гомеоморфизм.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 1, с. 57—94.

Наличие указанного разложения кусочно-аффинных отображений позволяет построить естественное отношение эквивалентности на погружениях многогранных множеств. Полученные в результате классы эквивалентности являются многомерными аналогами сетей-следов, возникших, напомним, в теории экстремальных сетей (см., например, [4]) как естественное средство моделирования деформации сетей с изменением их топологической структуры (расщеплением вершин). Необходимость рассмотрения подобных деформаций давно и широко известна (см., например, обзор в [3]).

Деформации, в процессе которых меняется топологическая структура объекта, играют важную роль и в многомерных геометрических вариационных задачах, таких как проблема Плато и её аналоги. Напомним, что многомерная проблема Плато состоит в поиске так называемых глобально минимальных поверхностей, т. е. поверхностей, имеющих наименьший возможный объём среди всех поверхностей с данной границей или, скажем, в данном гомологическом (гомотопическом) классе. В 60—70-е годы XX века многомерная проблема Плато была решена (было доказано существование глобально минимальных поверхностей) для нескольких широких классов обобщённых поверхностей, таких как G-поверхности [13], целочисленные потоки [11], варифолды [9], стратифицированные многообразия и экстраординарные когомологии [7], мультиварифолды [2]. Определённые в данной работе многогранники-следы позволяют более наглядно и геометрично моделировать деформации многомерных поверхностей с изменением их топологического устройства (впрочем, только в классе кусочно-аффинных поверхностей). Также вводится понятие объёма многогранника-следа и исследуется его поведение при деформации.

Наконец, в случае размерности два многогранники-следы являются естественным обобщением погружённых многоугольников, введённых в рассмотрение в [5]. Интерес к погружённым многоугольникам связан, в частности, с известной попыткой [10] доказать гипотезу Гилберта—Поллака [12] об отношении Штейнера на плоскости (см. подробности в [4,5]). Весьма интересным является следующий вопрос: какие замкнутые ломаные ограничивают погружённые многоугольники? В [5] показано, что замкнутая ломаная, полученная соединение концов вложенной монотонной ломаной, всегда ограничивает некоторый погружённый многоугольник. Развитая в данной статье техника позволила получить ответ в более общем случае так называемых петельных ломаных (см. [1]).

Автор благодарит профессоров А. О. Иванова и А. А. Тужилина за многолетнюю поддержку, многочисленные обсуждения и всякую иную помощь в работе над этой темой. Работа проведена при частичной поддержке гранта Президента РФ МД-263.2003.01 и гранта НШ-1988.2003.1.

Введение

Кратко введём понятия для основных утверждений. Все построения проводятся нами в некотором бесконечномерном вещественном аффинном пространстве $\mathbb{U}$, на котором задана некоторая топология $\mathbb{T}$, такая что на каждом конечномерном аффинном подпространстве A она порождает топологию обычного пространства $\mathbb{R}^{\dim A}$. Все выпуклые полиэдры предполагаются относительно открытыми, т. е. P есть выпуклый полиэдр, если и только если найдётся непустое конечное множество S точек в $\mathbb{U}$, внутренность выпуклой оболочки которого в аффинной оболочке S совпадает с P. Симплексы также относительно открыты. Напомним, что *выпукло-полиэдральный комплекс* $\mathbf{A}$ — это конечное множество выпуклых полиэдров, замыкания каждой пары из которых пересекаются по замыканию некоторой их подграни или не пересекаются вовсе. Выпукло-полиэдральный комплекс $\mathbf{A}$ называется *полным*, если его *тело* (т. е. объединение всех его элементов) ${}^{\cup}\mathbf{A}$ компактно, что эквивалентно принадлежности комплексу всякой грани всякого элемента комплекса. Выпукло-полиэдральный комплекс *симплициален*, если каждый его элемент — симплекс. *Многогранником* называется тело всякого выпукло-полиэдрального комплекса (заметим, что этот комплекс можно считать симплициальным). Далее будем считать, что все многогранники связны, что все функции (отображения) непрерывны, что, если не оговорено противное, их области действия (определения) (dom) — многогранники в $\mathbb{U}$ и значения также принимаются из $\mathbb{U}$. Всякий раз при рассмотрении композиции отображений $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$ предполагается, что они последовательно согласованы в следующем смысле: $\mathrm{im}\,\mathfrak{g} = \mathrm{dom}\,\mathfrak{f}$, где $\mathrm{im}\,\mathfrak{g}$ обозначает образ (совокупность значений) отображения $\mathfrak{g}$.

Определим основные типы отображений. Отображение называется *вырождающим отрезки*, если найдётся неточечный отрезок из области его определения, переходящий при этом отображением в одноточечное множество. В противном случае отображение называется *не вырождающим отрезки*. Отображение $\mathfrak{f}$ называется *контракцией*, если $\mathfrak{f}$-прообраз каждой точки его образа связен. Отображение $\mathfrak{f}$ называется *аффинным* относительно выпукло-полиэдрального комплекса $\mathbf{A}$, если $\mathrm{dom}\,\mathfrak{f} = {}^{\cup}\mathbf{A}$ и ограничение $\mathfrak{f}|_A$ отображения $\mathfrak{f}$ на каждый элемент A комплекса $\mathbf{A}$ аффинно. Отображение $\mathfrak{f}$ *кусочно-аффинно*, если найдётся полный выпукло-полиэдральный комплекс $\mathbf{A}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ аффинно. Кусочную аффинность отображений будем обозначать префиксом PA-. Отображение $\mathfrak{f}$ называется *симплициальным* относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{A}$, если оно аффинно относительно $\mathbf{A}$ и совокупность $\mathfrak{f}$-образов всех симплексов комплекса $\mathbf{A}$ также симплициальный комплекс. Отображение $\mathfrak{f}$ *стягивает ребро* E относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{A}$, если $\mathfrak{f}$ симплициально относительно $\mathbf{A}$, E — ребро в $\mathbf{A}$ (т. е. $\dim E = 1$ и $E \in \mathbf{A}$) и при этом $\mathfrak{f}$ отображает в одну и ту же точку обе вершинные точки ребра E и для произвольной другой пары вершинных точек комплекса $\mathbf{A}$ отображает их в различные точки. Скажем, что не вырождающее отрезки PA-отображение $\mathfrak{g}$ является *редуктом* PA-отображения $\mathfrak{f}$, если найдётся PA-контракция $\mathfrak{h}$, такая что $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$. Совокупность всех редуктов PA-отображения $\mathfrak{f}$ обозначим через $\mathrm{reduct}(\mathfrak{f})$.

Приведём основные результаты работы.

1. Несколько особняком стоит теорема о свойстве линка в точечных комплексах. Однако она имеет наглядный геометрический смысл и связана со стягивающими рёбра отображениями.

Точечный комплекс A есть конечная совокупность непустых множеств, удовлетворяющая условию, что всякое непустое подмножество всякого элемента из A также принадлежит множеству A. Элементы a и b точечного комплекса A называются *линково связанными*, если они не пересекаются и их объединение также элемент комплекса A. Элемент a комплекса A называется *линковым*, если совокупность линково связанных с ним элементов комплекса A совпадает с пересечением совокупностей линково связанных с одноэлементным подмножеством элемента a элементов комплекса A для всех одноэлементных подмножеств элемента a. Теорема же утверждает, что если у комплекса все его элементы мощности два линковы, то все его элементы таковы.

2. Доказана теорема о кусочной аффинности переходного гомеоморфизма от одной не вырождающей отрезки кусочно-аффинной функции к другой, утверждающая, что если два кусочно-аффинных отображения $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, не вырождающих отрезки, связаны гомеоморфизмом $\mathfrak{h}$, т. е.

$$\mathfrak{f} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{g},$$

то гомеоморфизм $\mathfrak{h}$ кусочно-аффинен.

3. Доказана теорема о кусочно-аффинном гомеоморфном соответствии разных редуктов произвольной кусочно-аффинной функции, утверждающая, что для двух редуктов $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ кусочно-аффинного отображения найдётся кусочно-аффинный гомеоморфизм $\mathfrak{p}$, переводящий один редукт в другой, т. е.

$$\mathfrak{g}' \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{g}''.$$

4. Доказано, что всякое кусочно-аффинное отображение, симплициальное относительно некоторого симплициального комплекса, разлагается в композицию последовательно применяемых отображений, стягивающих рёбра относительно образа исходного комплекса под действием всех предыдущих отображений, и, в конце, кусочно-аффинного отображения, не вырождающего отрезки и симплициального относительно образа исходного комплекса под действием всех предыдущих отображений.

5. Доказано также, что всякое кусочно-аффинное отображение обладает редуктом.

6. Как итог этих свойств PA-отображений введено понятие многогранников-следов, их деформаций, понятие объёма многогранника-следа. Доказана непрерывность объёма при специальных (достаточно общих) деформациях и вычислена формула первой вариации объёма. В качестве примера использования развитой техники мы рассматриваем локальное строение экстремальных многогранников-следов. А именно, получено необходимое условие экстремальности, являющееся аналогом принципов Плато.

1. Предварительные обозначения и определения

Обозначения общего характера

Во всем изложении предполагаются известными стандартные понятия топологии, теории аффинных пространств над $\mathbb{R}$ и некоторые сведения о выпуклых множествах и, в особенности, многогранниках (см., например, [6]).

Будем нумеровать (сплошным образом) те фрагменты текста, на которые будем явно ссылаться. Нумерованный фрагмент начинается после его названия и завершается знаком $\square$ или с началом следующего нумерованного фрагмента.

Введём некоторые обозначения, часто используемые далее, но не имеющие общепринятого характера.

Для произвольного множества A обозначим

$$^{\cup}A := \bigcup_{a\colon\, a\in A} a$$

объединение всех элементов множества A, его «тело»; если $A \neq \varnothing$, то обозначим

$$^{\cap}A := \bigcap_{a\colon\, a\in A} a$$

пересечение всех элементов множества A.

Скажем, что множество A *является измельчением* множества B и обозначим этот факт $A \lll B$, если верно, что

1) $^{\cup}A = {}^{\cup}B$;

2) $\forall b\ (b \in B \longrightarrow \exists C\ (C \subset A,\ {}^{\cup}C = b))$.

Для бинарного отношения (т. е. множества упорядоченных пар, в частности функции) $\mathfrak{f}$ через

$$\operatorname{im}\mathfrak{f} = \{a\colon \exists b\ (\langle b, a\rangle \in \mathfrak{f})\}$$

обозначается его образ, через

$$\operatorname{dom}\mathfrak{f} = \{a\colon \exists b\ (\langle a, b\rangle \in \mathfrak{f})\}$$

обозначается область действия (или определения).

Для чёткости формулировок поставим в соответствие бинарному отношению $\mathfrak{f}$ функциональные бинарные отношения $\mathfrak{f}^{\circ}$, $\mathfrak{f}^{\circ\circ}$, $\mathfrak{f}^{\circ\circ\circ}$, где

$$\mathfrak{f}^{\circ} := \{\langle A, B\rangle\colon A \subset \operatorname{dom}\mathfrak{f},\ B = \{b\colon \exists a\ (a \in A,\ \langle a, b\rangle \in \mathfrak{f})\}\} \text{ —}$$

естественное отображение, определённое на множестве всех подмножеств в $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$,

$$\mathfrak{f}^{\circ\circ} = (\mathfrak{f}^{\circ})^{\circ},$$
$$\mathfrak{f}^{\circ\circ\circ} = (\mathfrak{f}^{\circ\circ})^{\circ} = ((\mathfrak{f}^{\circ})^{\circ})^{\circ}.$$

Следующие множества также не имеют общепринятой традиции обозначения:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — все натуральные (неотрицательные целые) числа;

$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — положительные целые числа.

Общий взгляд на комплексы

Общий комплекс Q с отношением подчинения $\preccurlyeq$ есть множество Q с отношением порядка $\preccurlyeq$, т. е. для него верны следующие свойства:

1) рефлексивность $a \preccurlyeq a\ \forall a \in Q$;
2) антисимметричность $a \preccurlyeq b \mathbin{\&} b \preccurlyeq a \implies a = b\ \forall a, b \in Q$;
3) транзитивность $a \preccurlyeq b \mathbin{\&} b \preccurlyeq c \implies a \preccurlyeq c\ \forall a, b, c \in Q$.

Для произвольного подмножества A некоторого комплекса Q с отношением подчинения $\preccurlyeq$ определяются следующие три множества:

звезда $\mathrm{St}_Q^{\preccurlyeq} A := \{q\colon \exists a\ (a \in A \mathbin{\&} a \preccurlyeq q)\}$;
замыкание $\mathrm{Cl}_Q^{\preccurlyeq} A := \{q\colon \exists a\ (a \in A \mathbin{\&} q \preccurlyeq a)\}$;
линк $\mathrm{Lk}_Q^{\preccurlyeq} A := (\mathrm{Cl}_Q^{\preccurlyeq} \mathrm{St}_Q^{\preccurlyeq} A) \setminus (\mathrm{St}_Q^{\preccurlyeq} \mathrm{Cl}_Q^{\preccurlyeq} A)$.

Выпуклые полиэдры и симплексы

Совокупность вершинных точек выпуклого полиэдра P обозначим через $\operatorname{vert} P$, одноточечное множество $\{v\}$ — вершина (нульмерная грань) выпуклого полиэдра P, если v — его вершинная точка.

Для двух симплексов A и B, объединение вершинных множеств которых аффинно независимо, определяется их произведение $A * B$, также симплекс:

$$A * B = B * A := \operatorname{relint} \operatorname{conv}(\operatorname{vert} A \cup \operatorname{vert} B),$$

где relint обозначает внутренность в аффинной оболочке.

Всякой точке x, лежащей в аффинной оболочке некоторого симплекса S, взаимно-однозначно соответствует система вещественных чисел $(S_x^v,\ v \in \operatorname{vert} S)$, называемая *барицентрическими координатами* точки x относительно симплекса S, со следующими свойствами:

1) $(S_x^v,\ v \in \operatorname{vert} S)$ — аффинный набор весов на вершинных точках симплекса S, т. е. $\sum\limits_{v\colon v \in \operatorname{vert} S} S_x^v = 1$;
2) $\sum\limits_{v\colon v \in \operatorname{vert} S} S_x^v v = x$.

Выпукло-полиэдральные комплексы

Подмножеству $\mathbf{A}$ некоторого выпукло-полиэдрального комплекса $\mathbf{P}$ ставятся в соответствие следующие три подмножества того же комплекса (обозначим через $A \lhd B$ отношение «A является подгранью в B»):

звезда $\mathrm{st}_{\mathbf{P}} \mathbf{A} := \mathrm{St}_{\mathbf{P}}^{\lhd} \mathbf{A}$;
замыкание $\mathrm{cl}_{\mathbf{P}} \mathbf{A} := \mathrm{Cl}_{\mathbf{P}}^{\lhd} \mathbf{A}$;
линк $\mathrm{lk}_{\mathbf{P}} \mathbf{A} := \mathrm{Lk}_{\mathbf{P}}^{\lhd} \mathbf{A}$.

1. Замечание. Во всяком выпукло-полиэдральном комплексе $\mathbf{K}$ всякий главный полиэдр (т. е. полиэдр, не являющийся гранью ни в каком ином полиэдре того же комплекса $\mathbf{K}$) является окрестностью в теле того же комплекса каждой своей точки. Скажем здесь, что точка множества A называется *регулярной* во множестве A, если найдётся её гомеоморфная некоторому $\mathbb{R}^\gamma$ окрестность в этом множестве. Таким образом, точки главного полиэдра регулярны во множестве ${}^\cup\mathbf{K}$.

2. Замечание. Для всякого конечного множества $\mathbf{A}$ выпуклых полиэдров существует симплициальный комплекс $\mathbf{B}$, измельчающий множество $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} \lll \mathbf{A}$).

3. Замечание. Для всякого выпукло-полиэдрального комплекса $\mathbf{P}$ существует симплициальный комплекс $\mathbf{K}$, *диагонализирующий* комплекс $\mathbf{P}$, т. е. $\mathbf{K} \lll \mathbf{P}$ и ${}^\cup\operatorname{vert}^\circ(\mathbf{K}) = {}^\cup\operatorname{vert}^\circ(\mathbf{P})$. □

Заметим, что в каждом выпукло-полиэдральном комплексе $\mathbf{K}$ у каждой точки a его тела существует единственный его элемент $K =: \Pi_{\mathbf{K}}a$, содержащий эту точку. В случае симплициального комплекса определяются *координаты точки a относительно комплекса*, т. е. система вещественных чисел

$$\mathbf{K}_a^v := \begin{cases} 0, & \text{если } v \notin \operatorname{vert}\Pi_{\mathbf{K}}a, \\ (\Pi_{\mathbf{K}}a)_a^v, & \text{если } v \in \operatorname{vert}\Pi_{\mathbf{K}}a. \end{cases}$$

О кусочно-аффинных функциях и комплексах

PA-отображение назовём *регулярным*, если для каждой регулярной точки его области действия найдётся некоторая окрестность в этой области, на которой отображение инъективно.

4. Определение. Скажем, что тройка $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}, \mathbf{L}\rangle$ двух полных симплициальных комплексов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ и функции $\mathfrak{f}$, заданной на ${}^\cup\mathbf{K}$, *симплициальна*, если функция $\mathfrak{f}$ аффинна относительно комплекса $\mathbf{K}$ и для каждого симплекса $K \in \mathbf{K}$ справедливо $\mathfrak{f}^\circ(K) \in \mathbf{L}$. □

Последовательность $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu\rangle$, где $\nu \in \mathbb{N}$, $\mathbf{K}$ — полный симплициальный комплекс и функции $\mathfrak{f}_\iota$ являются последовательно согласованными (т. е. $\operatorname{im}\mathfrak{f}_{\iota-1} = \operatorname{dom}\mathfrak{f}_\iota$, где $\iota = 1, \ldots, \nu$), назовём *примитивной* и обозначим $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu\rangle \in \operatorname{Seq}^\nu$, если функция $\mathfrak{f}_0$ симплициальна относительно комплекса $\mathbf{K}$ и для всякого $\iota = 1, \ldots, \nu$ функция $\mathfrak{f}_\iota$ симплициальна относительно комплекса $(\mathfrak{f}_{\iota-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$.

Назовём примитивную последовательность $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu\rangle$ *рёберно-контракционной* и обозначим это $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu\rangle \in \operatorname{Seq}^\nu_{\mathrm{ec}}$, если найдутся рёбра (одномерные симплексы) $E_0, \ldots, E_\nu$ со следующими свойствами:

1) $\mathfrak{f}_0$ — стяжение ребра E_0 относительно комплекса $\mathbf{K}$;
2) для всякого $\iota = 1, \ldots, \nu$ верно, что $\mathfrak{f}_\iota$ — стяжение ребра E_ι относительно комплекса $(\mathfrak{f}_{\iota-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$.

Следующие свойства PA-отображений взяты из [6].

Утверждение. *Композиция* $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}$ *двух кусочно-аффинных функций* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{g}$ *также кусочно-аффинная функция.*

5. Замечание. Для всякой кусочно-аффинной функции $\mathfrak{f}$ и всякого комплекса $\mathbf{K}$, относительно которого функция $\mathfrak{f}$ аффинна, верна следующая формула:

$$\mathfrak{f}(a) = \sum_{v\colon\, v \in^{\cup} \operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{K})} \mathbf{K}_a^v \mathfrak{f}(v) \quad \forall a \in \operatorname{dom} \mathfrak{f}.$$

6. Утверждение. *Для всякой функции* $\mathfrak{f}$*, аффинной относительно некоторого полного симплициального комплекса* $\mathbf{K}$*, и всякого симплициального комплекса* $\mathbf{A}$*, являющегося измельчением множества* $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$*, верно, что множество* $\mathbf{B}$*, определённое формулой*

$$\mathbf{B} := \{B\colon \exists A, K \ (A \in \mathbf{A},\ K \in \mathbf{K},\ K \cap (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(A) = B,\ \mathfrak{f}^{\circ}(B) = A)\},$$

является полным выпукло-полиэдральным комплексом, измельчающим комплекс $\mathbf{K}$.

2. Исследование комплексов и кусочно-аффинных отображений

Точечные комплексы и свойство линка

В данном разделе описываются свойства точечных комплексов (часто их называют симплициальными схемами или иначе). Очевидно, что они изоморфны полным симплициальным комплексам и моделируют их.

7. Заметим, что пересечение произвольного семейства точечных комплексов также является точечным комплексом. □

В точечном комплексе A для некоторого его элемента b скажем, что некоторый элемент a множества A находится в *точечном линке* элемента b и обозначим это $a \in \operatorname{lk}'_A b$, если

$$\forall c \ (c \in A \longrightarrow \neg(c \subset a \mathbin{\&} c \subset b)) \mathbin{\&} \exists c \ (c \in A \mathbin{\&} a \subset c \mathbin{\&} b \subset c).$$

Отношение «находиться в точечном линке» симметрично. Это утверждение проверяется следующим образом:

$$a \in \operatorname{lk}'_A b \iff a \in A \mathbin{\&} b \in A \mathbin{\&} a \cup b \in A \mathbin{\&} a \cap b = \varnothing.$$

Заметим, что $\operatorname{lk}'_A b = \operatorname{Lk}^{\subseteq}_A \{b\}$.

Скажем, что в точечном комплексе A некоторый его элемент a *линковый*, и обозначим этот факт $a \in \operatorname{Link}(A)$, если

$$\operatorname{lk}'_A a = \bigcap_{\substack{b\colon\, b \subset a \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b.$$

Ясно, что во всяком точечном комплексе A всякий его элемент a мощности 1 принадлежит множеству $\operatorname{Link}(A)$.

8. Утверждение.

1. *Для всякого элемента a произвольного точечного комплекса A его точечный линк, если он не пуст, сам является точечным комплексом.*
2. *Если элемент a некоторого точечного комплекса A включён в ещё один его элемент b, то $\operatorname{lk}'_A a \supset \operatorname{lk}'_A b$.*

Доказательство. 1. Непустота и конечность элементов следуют из их принадлежности исходному точечному комплексу. Если же $z \neq \varnothing$, $y \in \operatorname{lk}'_A a$ и $z \subset y$, то $z \cap a \subset y \cap a = \varnothing$ и $z \cup a \subset y \cup a \in A$. Таким образом, $z \in \operatorname{lk}'_A a$.

2. Если $c \in \operatorname{lk}'_A b$, то $c \in A$, $c \cap b = \varnothing$, $c \cup b \in A$. Ясно, что так как $c \cap a \subset c \cap b$, верно, что $c \cap a = \varnothing$. Из $c \cup a \subset c \cup b$ следует, что $c \cup a \in A$. □

9. Теорема. *Если в некотором точечном комплексе A каждое ребро линково (т. е. $\forall a\ (\operatorname{card} a = 2,\ a \in A \longrightarrow a \in \operatorname{Link}(A))$), то $A = \operatorname{Link}(A)$.*

Доказательство. Проведём доказательство индуктивно по мощности ν элементов.

Для элементов мощности $\nu = 1, 2$ верно, что они принадлежат $\operatorname{Link}(A)$.

Допустим, что $\forall a\ (a \in A,\ \operatorname{card} a \leqslant \nu \longrightarrow a \in \operatorname{Link}(A))$, где $\nu \geqslant 2$.

Рассмотрим элемент a со свойствами $a \in A$, $\operatorname{card} a = \nu + 1$. Для него индуктивно же по мощности μ элемента v из $\bigcap\limits_{\substack{b\colon b \subset a \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b$ докажем, что $v \in \operatorname{lk}'_A a$, обратное следует из утверждения 8.

Если $\mu = 1$, то ясно, что $v \in \operatorname{lk}'_A z$ для всякого z со свойствами $z \subset a$ и $0 < \operatorname{card} z \leqslant \nu$, поскольку $v \in \bigcap\limits_{\substack{b\colon b \subset z \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b$ и по предположению индукции по ν.

Возьмём некоторый элемент z мощности $\nu - 1 \geqslant 2 - 1 = 1$, включённый в a. Обозначим $r := a \setminus z = p \sqcup q$, где $p, q \in A$, т. е. r — ребро.

Заметим, что $z \sqcup p \sqcup v \in A$, $z \sqcup q \sqcup v \in A$ по предположению индукции по ν. Таким образом, $z \sqcup v \in \operatorname{lk}'_A p \cap \operatorname{lk}'_A q$. Из условия следует, что $z \sqcup v \in \operatorname{lk}'_A r$, т. е. $a \sqcup v = z \sqcup v \sqcup r \in A$, и $v \in \operatorname{lk}'_A a$.

В предположении, что для всех элементов v со свойствами $\operatorname{card} v \leqslant \mu > 0$, $v \in \bigcap\limits_{\substack{b\colon b \subset a \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b$ верно, что $v \in \operatorname{lk}'_A a$, рассмотрим такой элемент v, что $\operatorname{card} v = \mu + 1$, $v \in \bigcap\limits_{\substack{b\colon b \subset a \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b$.

Если элемент w мощности μ включён в элемент v, то по предположению индукции по μ и утверждению 8 верно, что $w \in \operatorname{lk}'_A a$. В самом деле, $w \subset v$, следовательно, по утверждению 8 верно, что $w \in \bigcap\limits_{\substack{b\colon b \subset a \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b$, и по индукции по μ имеем $w \in \operatorname{lk}'_A a$.

Возьмём некоторый элемент e со свойствами $e \subset v$, $\operatorname{card} e = 2$, $e = p \sqcup q$, где $p, q \in A$, и проведём следующие вычисления.

Ясно, что

$$v \setminus p, v \setminus q \in \bigcap_{\substack{b\colon b \subset a \\ \operatorname{card} b = 1}} \operatorname{lk}'_A b,$$

следовательно,
$$v \setminus p, v \setminus q \in \mathrm{lk}'_A\, a.$$
Таким образом,
$$a \sqcup (v \setminus p), a \sqcup (v \setminus q) \in A,$$
т. е.
$$a \sqcup (v \setminus e) \in \mathrm{lk}'_A\, p \cap \mathrm{lk}'_A\, q.$$
По условию имеем
$$a \sqcup (v \setminus e) \in \mathrm{lk}'_A\, e,$$
следовательно,
$$a \sqcup (v \setminus e) \sqcup e = a \sqcup v \in A.$$
Итак,
$$v \in \mathrm{lk}'_A\, a.$$
Теорема доказана. □

10. Утверждение. *Если в точечном комплексе A все его элементы мощности два линковы, то всякое непустое множество принадлежит A, если каждое его одно- и двухэлементное подмножество принадлежит комплексу A (можно сказать, что в таком комплексе нет «дыр»).*

Доказательство. Возьмём некоторое множество a со свойствами $a \neq \varnothing$, $\forall b\ (b \subset a,\ \mathrm{card}\, b = 1, 2 \longrightarrow b \in A)$. Ясно, что a является подмножеством $^{\cup}A$ и потому конечно. Следовательно, существует $\nu := \min\{\alpha \colon \exists b\ (b \subset a,\ b \notin A,\ \mathrm{card}\, b = \alpha)\} \geqslant 3$. Возьмём некоторый элемент b со свойствами $b \subset a$, $b \notin A$, $\mathrm{card}\, b = \nu$. Можно представить множество b как дизъюнктивное объединение трёх множеств, $b = c \sqcup d \sqcup e$, где $\mathrm{card}\, c \geqslant 1$, $\mathrm{card}\, d = \mathrm{card}\, e = 1$. Ясно, что $\mathrm{card}(c \sqcup d) = \mathrm{card}(c \sqcup e) = \nu - 1 < \nu$. Следовательно, $c \sqcup d \in A$ и $c \sqcup e \in A$. Таким образом, $c \in \mathrm{lk}'_A\, d \cap \mathrm{lk}'_A\, e = \mathrm{lk}'_A(d \sqcup e)$. Итак, $b = c \sqcup d \sqcup e \in A$, что противоречит свойствам множества b. □

Определим для произвольного точечного комплекса A его *центральное подразделение* $\mathrm{centr}(A)$ формулой
$$\mathrm{centr}(A) := \{Q \colon Q \subset A,\ Q \neq \varnothing,\ \text{элементы в } Q \text{ линейно упорядочены по включению}\}.$$

Утверждение. *Для всякого точечного комплекса A верно, что* $\mathrm{centr}(A) = \mathrm{Link}(\mathrm{centr}(A))$.

Доказательство. Рассмотрим ребро Q в $\mathrm{centr}(A)$, т. е. $Q = \{a_1, a_2\}$, где $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ и $a_1 \supset a_2$. Рассмотрим элемент W из пересечения линков в $\mathrm{centr}(A)$ вершин $\{a_1\}$ и $\{a_2\}$ ребра Q, т. е. $W = \{s_0, \ldots, s_\rho\}$, где $s_0 \supset \ldots \supset s_\rho$, и при этом
$$W \sqcup \{a_1\} = \{s_0, \ldots, s_\iota, a_1, s_{\iota+1}, \ldots, s_\rho\} \in \mathrm{centr}(A),$$
$$W \sqcup \{a_2\} = \{s_0, \ldots, s_\kappa, a_2, s_{\kappa+1}, \ldots, s_\rho\} \in \mathrm{centr}(A),$$
где $\iota, \kappa \in \{-1, \ldots, \rho + 1\}$ и $s_\iota \supset a_1 \supset s_{\iota+1}$, $s_\kappa \supset a_2 \supset s_{\kappa+1}$.

Ясно, что $\iota \leqslant \kappa$. В случае $\iota = \kappa$ имеем

$$s_0 \supset \ldots \supset s_\iota \supset a_1 \supset a_2 \supset s_{\iota+1} \supset \ldots \supset s_\rho$$

и потому $W \sqcup \{a_1, a_2\} \in \mathrm{centr}(A)$. Если $\iota < \kappa$, то

$$s_0 \supset \ldots \supset s_\iota \supset a_1 \supset s_{\iota+1} \supset \ldots \supset s_\kappa \supset a_2 \supset s_{\kappa+1} \supset \ldots \supset s_\rho$$

и потому $W \sqcup \{a_1, a_2\} \in \mathrm{centr}(A)$. Теперь искомое следует из теоремы 9. □

Последовательная примитивизация

Следующее утверждение является обобщением теоремы 2.14 из [6] о том, что кусочно-аффинную функцию можно представить симплициальной функцией на некотором симплициальном комплексе.

11. Утверждение. *Для произвольного конечного последовательно согласованного набора кусочно-аффинных функций* $\mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu$ *(т. е.* $\nu \in \mathbb{N}$, $\mathrm{im}\,\mathfrak{f}_{\iota-1} = \mathrm{dom}\,\mathfrak{f}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \nu$*) найдётся полный симплициальный комплекс* $\mathbf{K}$*, примитивизирующий набор этих функций, т. е.* $\exists \mathbf{K} \colon \langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu \rangle \in \mathrm{Seq}^\nu$.

Доказательство. Возьмём некоторые комплексы $\mathbf{A}_\iota$, относительно которых аффинны соответственно функции $\mathfrak{f}_\iota$, $\iota = 0, \ldots, \nu$. Определим индуктивно следующие комплексы: $\mathbf{B}_0 := \mathbf{A}_0$; если уже определён комплекс $\mathbf{B}_{\iota-1}$, то по замечанию 2 найдётся полный симплициальный комплекс $\mathbf{B}_\iota$, такой что

$$\mathbf{B}_\iota \lll \mathbf{A}_\iota \cup {\mathfrak{f}_{\iota-1}}^{\circ\circ}(\mathbf{B}_{\iota-1}), \quad \iota = 1, \ldots, \nu.$$

Также найдётся некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{B}_{\nu+1}$, такой что

$$\mathbf{B}_{\nu+1} \lll \mathfrak{f}_\nu^{\circ\circ}(\mathbf{B}_\nu).$$

Далее обратной индукцией определим выпукло-полиэдральные и симплициальные комплексы

$$\mathbf{C}_\nu := \{C \colon \exists B', B'' \ (B' \in \mathbf{B}_\nu,\ B'' \in \mathbf{B}_{\nu+1},\ C = B' \cap ((\mathfrak{f}_\nu)^{-1})^\circ(B''),\ \mathfrak{f}^\circ(C) = B'')\}.$$

По утверждению 6 множество $\mathbf{C}_\nu$ — выпукло-полиэдральный комплекс, и по замечанию 3 найдётся некоторая диагонализация $\mathbf{D}_\nu$ для выпукло-полиэдрального комплекса $\mathbf{C}_\nu$.

Если уже определён комплекс $\mathbf{D}_\iota$, то по тем же утверждениям определим

$$\mathbf{C}_{\iota-1} := \{C \colon \exists B, D \ (B \in \mathbf{B}_{\iota-1},\ D \in \mathbf{D}_\iota,\ C = B \cap ((\mathfrak{f}_{\iota-1})^{-1})^\circ(D),\ \mathfrak{f}^\circ(C) = D)\}.$$

Существует некоторая диагонализация $\mathbf{D}_{\iota-1}$ для выпукло-полиэдрального комплекса $\mathbf{C}_{\iota-1}$, $\iota = \nu, \ldots, 1$.

Комплекс $\mathbf{K} := \mathbf{D}_0$ искомый. □

Отображения, вырождающие отрезки

12. Утверждение. *Для произвольной функции* $\mathfrak{f}$, *действующей на некотором многогранном множестве в пространстве* $\mathbb{U}$, *верны следующие два утверждения.*

1. *Если найдётся выпуклое и непустое подмножество* P *множества* $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$, *для которого* $\mathfrak{f}|_P$ *аффинно и неинъективно, то функция* $\mathfrak{f}$ *вырождает отрезки.*
2. *Если функция* $\mathfrak{f}$ *вырождает отрезки, то для всякого конечного дизъюнктивного разбиения* $\mathbf{P}$ *множества* $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ *на выпуклые множества в* $\mathbf{P}$ *найдётся такой элемент* P, *что* $\mathfrak{f}|_P$ *неинъективно.*

Доказательство. 1. Отображение $\mathfrak{f}|_P$ аффинно и неинъективно, а множество P выпукло и не пусто, следовательно, P содержит в себе не менее двух точек a, b (а значит, и отрезок между ними), образы которых совпадают. Таким образом, $\mathfrak{f}^\circ([a,b])$ — одноточечное множество.

2. Функция $\mathfrak{f}$ вырождает отрезок, следовательно, существует неточечный отрезок $[a,b]$, такой что $[a,b] \subset \operatorname{dom}\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{f}^\circ([a,b])$ точечно.

Заметим, что в $\mathbf{P}$ найдётся такой элемент P, что $[a,b] \cap P$ — невырожденный отрезок (поскольку $\mathbf{P}$ — конечное разбиение на выпуклые множества). Тогда образ этого отрезка одноточечен. □

13. Утверждение. *Для всякой кусочно-аффинной функции* $\mathfrak{f}$ *следующие условия равносильны*:

1) $\mathfrak{f}$ *вырождает отрезки*;
2) *функция* $\mathfrak{f}$ *аффинна относительно некоторого комплекса* $\mathbf{K}$ *и* $\mathfrak{f}$ *неинъективна на одном из симплексов в* $\mathbf{K}$;
3) *для всякого комплекса* $\mathbf{K}$, *относительно которого функция* $\mathfrak{f}$ *аффинна, верно, что функция* $\mathfrak{f}$ *неинъективна на одном из симплексов в* $\mathbf{K}$.

Доказательство. Найдётся комплекс $\mathbf{K}$, относительно которого аффинна функция $\mathfrak{f}$. Если функция $\mathfrak{f}$ вырождает отрезки, то из утверждения 12 следует, что функция $\mathfrak{f}$ неинъективна на некотором симплексе из $\mathbf{K}$, отсюда же следует и последний пункт.

Обратные переходы следуют из того же утверждения 12. □

Утверждение. *Для всяких двух кусочно-аффинных функций* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{g}$, *согласованных последовательно* ($\operatorname{im}\mathfrak{f} = \operatorname{dom}\mathfrak{g}$), *верно, что функция* $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ *не вырождает отрезки, если и только если таковы обе функции* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Ясно, что утверждаемое эквивалентно следующему:

$$\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f} \text{ вырождает отрезки} \iff \mathfrak{f} \text{ или } \mathfrak{g} \text{ вырождает отрезки.}$$

Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Заметим, что $(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f})^\circ([a,b]) = \mathfrak{g}^\circ(\mathfrak{f}^\circ([a,b]))$. Если $\mathfrak{f}$ вырождает $[a,b]$, то всё доказано. Если же множество $\mathfrak{f}^\circ([a,b])$ не одноточечно, то оно является ломаной и $\mathfrak{g}$-образ от него одноточечен, а значит, $\mathfrak{g}$ вырождает некоторый отрезок.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Если функция $\mathfrak{f}$ вырождает отрезки, то $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ такая же. Если $\mathfrak{g}$ вырождает отрезки, то существует отрезок, вырождаемый функцией $\mathfrak{g}$, а его $\mathfrak{f}$-прообраз содержит в себе некоторый невырожденный отрезок, на котором вырождается $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$. $\square$

О кусочной аффинности переходного гомеоморфизма от одной кусочно аффинной функции, не вырождающей отрезки, к другой

14. Утверждение. *Если тройки $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}, \mathbf{M}\rangle$ и $\langle \mathbf{L}, \mathfrak{g}, \mathbf{M}\rangle$ симплициальны, причём функции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ из этих троек не вырождают отрезки, $\mathfrak{h}$ — непрерывная инъекция из множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom}\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}=\mathfrak{f}$, то тройка $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{h}, \mathbf{L}\rangle$ также симплициальна.*

Доказательство. Рассмотрим симплекс K из комплекса $\mathbf{K}$ и обозначим $\mathfrak{f}^\circ(K) =: M \in \mathbf{M}$. Ясно, что на этом симплексе K выполняется $(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h})|_K = \mathfrak{f}|_K$ и, следовательно, $\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}^\circ(K)}\circ\mathfrak{h}|_K = \mathfrak{f}|_K$.

Заметим, что из условия утверждения следует, что

$$\mathfrak{h}^\circ(K) \subset (\mathfrak{g}^{-1})^\circ(M) = \bigcup_{L\colon\, \mathfrak{g}^\circ(L)=M} L.$$

При этом все такие симплексы L имеют одинаковую размерность и, следовательно, являются связными компонентами в их объединении.

Из непрерывности функции $\mathfrak{h}$ следует, что множество $\mathfrak{h}^\circ(K)$ связно и, следовательно, лежит в только одном из симплексов L, таком что $L\in\mathbf{L}$ и $\mathfrak{g}^\circ(L)=M$.

Наконец, из $\mathfrak{g}^\circ(\mathfrak{h}^\circ(K)) = M$ и данной в условии невырожденности функции $\mathfrak{g}$ вытекает, что $\mathfrak{h}^\circ(K) = L$, т. е. $\mathfrak{h}$-образ симплекса K заполняет весь симплекс L.

Аффинность функции $\mathfrak{h}$ на симплексе K следует из формулы $\mathfrak{h}|_K = (\mathfrak{g}|_L)^{-1}\circ\mathfrak{f}|_K$, причём верно также, что $\mathfrak{h}^\circ(K) = ((\mathfrak{g}|_L)^{-1}\circ\mathfrak{f}|_K)^\circ(K)$, где L — единственный, как выяснено выше, симплекс из комплекса $\mathbf{L}$, пересекающий множество $\mathfrak{h}^\circ(K)$. $\square$

15. Теорема. *Для двух кусочно-аффинных не вырождающих отрезки функций $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ и такой непрерывной биекции $\mathfrak{h}$ множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom}\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}=\mathfrak{f}$, верно, что функция $\mathfrak{h}$ кусочно-аффинна.*

Доказательство. Возьмём некоторые комплексы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$, относительно которых соответственно аффинны функции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$.

По замечанию 2 существует полный симплициальный комплекс $\mathbf{M}$, измельчающий множество $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})\cup\mathfrak{g}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$.

Образуем комплексы $\mathbf{M}_{\mathfrak{f}}$, $\mathbf{M}_{\mathfrak{g}}$ относительно комплексов $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ соответственно, как это описано в утверждении 6, и затем рассмотрим их диагонализации:

$$\mathbf{M}'_{\mathfrak{f}} := \{W \colon \exists M, K\ (M \in \mathbf{M},\ K \in \mathbf{K},\ W = K \cap (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(M),\ \mathfrak{f}^{\circ}(W) = M)\},$$
$$\mathbf{M}'_{\mathfrak{g}} := \{W \colon \exists M, L\ (M \in \mathbf{M},\ L \in \mathbf{L},\ W = L \cap (\mathfrak{g}^{-1})^{\circ}(M),\ \mathfrak{g}^{\circ}(W) = M)\},$$

$\mathbf{M}_{\mathfrak{f}}$ — некоторая диагонализация комплекса $\mathbf{M}'_{\mathfrak{f}}$, $\mathbf{M}_{\mathfrak{g}}$ — некоторая диагонализация комплекса $\mathbf{M}'_{\mathfrak{g}}$, существующие по утверждению 3.

Заметим, что для троек $\langle \mathbf{M}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}, \mathbf{M}\rangle$, $\langle \mathbf{M}_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \mathbf{M}\rangle$ выполнены условия утверждения 14. Таким образом, $\mathfrak{h}$ кусочно-аффинна. □

Регулярные отображения и переходная функция

16. Утверждение. *Никакая регулярная кусочно-аффинная функция не вырождает отрезки.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую регулярную кусочно-аффинную функцию $\mathfrak{f}$ и комплекс $\mathbf{K}$, относительно которого она аффинна. Допустим, что есть симплекс $K \in \mathbf{K}$, такой что $\mathfrak{f}|_K$ вырожденно. Ясно, что в комплексе $\mathbf{K}$ существует симплекс M, такой что $K \lhd M$ и M максимален по отношению $\lhd$ в комплексе $\mathbf{K}$. Легко видеть, что отображение $\mathfrak{f}|_M$ вырожденно, поскольку $\mathfrak{f}$ аффинно на M и непрерывно. Однако по замечанию 1 симплекс M состоит из регулярных в теле комплекса $\mathbf{K}$ точек, и мы пришли к противоречию со свойствами функции $\mathfrak{f}$. □

Утверждение. *Для двух кусочно-аффинных регулярных функций $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ и непрерывной биекции $\mathfrak{h}$ множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom}\mathfrak{g}$, такой что $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h} = \mathfrak{f}$, верно, что функция $\mathfrak{h}$ кусочно-аффинна.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из утверждений 16 и 15. □

Свойства кусочно-аффинных контракций

Утверждение. *Если контракция $\mathfrak{f}$ разложена в композицию двух функций $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, т. е. $\operatorname{im}\mathfrak{g} = \operatorname{dom}\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}\circ\mathfrak{g}$, то функция $\mathfrak{h}$ также контракция.*

Доказательство. Ясно, что

$$(\mathfrak{h}^{-1})^{\circ}(\{x\}) = \mathfrak{g}^{\circ}((\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{x\})).$$

Множество $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связно, и непрерывный образ связного множества связен. □

Утверждение. *Если* PA*-контракция $\mathfrak{f}$ разложена в композицию двух кусочно-аффинных функций $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{f} = \mathfrak{h}\circ\mathfrak{g}$) и функция $\mathfrak{h}$ не вырождает отрезки, то функция $\mathfrak{h}$ инъективна.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{h}$ неинъективна, т. е. найдутся точки x и y со свойствами $x \neq y$ и $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(y) =: s$. Ясно, что найдутся точки $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, такие что $x = \mathfrak{g}(\tilde{x})$, $y = \mathfrak{g}(\tilde{y})$. Заметим также, что $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ и точки $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ принадлежат множеству $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{s\})$, при этом множество $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{s\})$ связно. Соединим в этом прообразе точки $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ ломаной линией L. Ясно, что $\mathfrak{g}^\circ(L)$ также ломаная и не точечная, поскольку содержит точки x, y. При этом $\mathfrak{h}^\circ(\mathfrak{g}^\circ(L)) = \{s\}$. Таким образом, функция $\mathfrak{h}$ вырождает отрезки, что противоречит условию. $\square$

17. Утверждение. *Если $\mathfrak{f}$ — непрерывная функция из компактного топологического пространства в хаусдорфово и $\mathfrak{f}$-прообраз всякого одноточечного множества её образного пространства связен, то $\mathfrak{f}$-прообраз всякого связного замкнутого подмножества её образа замкнут и связен.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое непустое связное замкнутое множество Z, включённое в $\operatorname{im}\mathfrak{f}$ и введём обозначение $A := (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(Z)$. Ясно, что A замкнуто.

Докажем, что множество A связно. Рассмотрим такие два множества B и C, что $B \cup C = A$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$ и B, C замкнуты. Введём обозначения $B' := \mathfrak{f}^\circ(B)$ и $C' := \mathfrak{f}^\circ(C)$. Из компактности следует, что множества B' и C' замкнуты. Ясно также, что $B' \cup C' = Z$. Из условий связности множества Z и замкнутости и непустоте множеств B' и C' следует, что $B' \cap C' \neq \varnothing$. Возьмём некоторую точку $b \in B' \cap C'$. По условию множество $D := (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{b\})$ связно. Заметим, что $D \cap B \neq \varnothing$ и $D \cap C \neq \varnothing$. Также заметим, что $D = (D \cap B) \cup (D \cap C)$. Таким образом, $(D \cap B) \cap (D \cap C) \neq \varnothing$. Итак, $B \cap C \neq \varnothing$. $\square$

Утверждение. *Композиция $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ двух* PA*-контракций $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$* $(\operatorname{im}\mathfrak{f} = \operatorname{dom}\mathfrak{g})$ *также* PA*-контракция.*

Доказательство. Возьмём точку $a \in \operatorname{im}\mathfrak{g}$. Рассмотрим множество

$$A := (\mathfrak{f}^{-1})^\circ((\mathfrak{g}^{-1})^\circ(\{a\})).$$

Множество A — $\mathfrak{f}$-прообраз связного замкнутого множества $(\mathfrak{g}^{-1})^\circ(\{a\})$. По утверждению 17 оно связно и замкнуто. $\square$

18. Теорема. *Для двух разложений в композицию $\mathfrak{f}_1 \circ \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2 \circ \mathfrak{g}_2$, где функции $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ кусочно-аффинны и не вырождают отрезки, а функции $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ —* PA*-контракции (заметим здесь, что* $\operatorname{dom}\mathfrak{g}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{g}_2$)*, найдётся инъективная кусочно-аффинная действующая на* $\operatorname{im}\mathfrak{g}_2$ *функция $\mathfrak{h}$, такая что* $\operatorname{im}\mathfrak{h} = \operatorname{dom}\mathfrak{f}_1$ *и* $\mathfrak{f}_1 \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}_2$.

Доказательство. 1. Пусть L — ломаная линия в $\operatorname{dom}\mathfrak{g}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{g}_2$ и при этом $\mathfrak{g}_1^\circ(L)$ — одноточечное множество. Тогда $\mathfrak{f}_2^\circ(\mathfrak{g}_2^\circ(L)) = \mathfrak{f}_1^\circ(\mathfrak{g}_1^\circ(L))$ — одноточечное множество. Поскольку $\mathfrak{f}_2$ не вырождает отрезки и $\mathfrak{g}_2^\circ(L)$ — ломаная линия, верно, что $\mathfrak{g}_2^\circ(L)$ — одноточечное множество. Таким образом, функции $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ одновременно отправляют ломаные в точки.

2. Пусть $x, y \in \operatorname{dom}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1(x) = \mathfrak{g}_1(y)$. Тогда из условия следует, что найдётся ломаная линия L со свойствами $L \subset \operatorname{dom}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1^\circ(L) = \{\mathfrak{g}_1(x)\}$, $x, y \in L$. По пункту 1 доказательства множество $\mathfrak{g}_2^\circ(L)$ одноточечно и $\mathfrak{g}_2(x) = \mathfrak{g}_2(y)$. Таким образом, функции $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ одновременно склеивают точки.

3. Из пункта 2 доказательства следует, что следующая формула корректно определяет функцию $\mathfrak{h}$ — биекцию множеств $\operatorname{dom}\mathfrak{f}_2$ и $\operatorname{dom}\mathfrak{f}_1$:

$$\{\mathfrak{h}(x)\} := \mathfrak{g}_1^{\circ}((\mathfrak{g}_2^{-1})^{\circ}(\{x\})), \quad x \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}_2.$$

Докажем гомеоморфность функции $\mathfrak{h}$. Для этого напомним одну общетопологическую конструкцию. Для непрерывной функции $\mathfrak{f}$ из топологического пространства X в топологическое пространство Y строится отношение эквивалентности $\backsim_{\mathfrak{f}}$ на множестве X по правилу

$$x' \backsim_{\mathfrak{f}} x'' \iff \mathfrak{f}(x') = \mathfrak{f}(x'').$$

Далее определяется фактор-пространство $\mathbf{X}$ как совокупность всех классов $\backsim_{\mathfrak{f}}$-эквивалентных элементов множества X, а фактор-топология на нём по следующему правилу: подмножество $\mathbf{Q}$ множества $\mathbf{X}$ открыто в $\mathbf{X}$, если и только если ${}^{\cup}\mathbf{Q}$ открыто в X. Ещё строятся два очевидно непрерывных отображения: проекция $\mathfrak{p}(x) := S$, где S — класс $\backsim_{\mathfrak{f}}$-эквивалентных элементу x элементов, и соответствующая биекция $\hat{\mathfrak{f}}(W) := \mathfrak{f}(x)$, где $x \in W \in \mathbf{X}$. При этом верно, что $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{p}$.

Разложим функции $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ в проекции на фактор-пространства и соответствующие биекции:

$$\mathfrak{g}_1 = \hat{\mathfrak{g}}_1 \circ \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{g}_2 = \hat{\mathfrak{g}}_2 \circ \mathfrak{p}_2,$$

где

$$\mathfrak{p}_\iota(x) := (\mathfrak{g}_\iota^{-1})^{\circ}(\{\mathfrak{g}_\iota(x)\}), \quad x \in \operatorname{dom}\mathfrak{g}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{g}_2, \quad \iota = 1, 2,$$
$$\{\hat{\mathfrak{g}}_\iota(X)\} := \mathfrak{g}_\iota^{\circ}(X), \quad X \in \operatorname{im}\mathfrak{p}_\iota, \quad \iota = 1, 2.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{h} = \hat{\mathfrak{g}}_1 \circ (\hat{\mathfrak{g}}_2)^{-1}$. При этом в фактор-топологии функции $\hat{\mathfrak{g}}_\iota$ непрерывны, инъективны, определены на компактном пространстве и принимают значения из хаусдорфова пространства, поэтому являются гомеоморфизмами.

По теореме 15 функция $\mathfrak{h}$ кусочно-аффинна. □

19. Утверждение. *Пусть $\mathfrak{f}$ — контракция, симплициальная относительно комплекса $\mathbf{K}$, L — симплекс из комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ размерности $\nu := \dim\operatorname{dom}\mathfrak{f} = \dim{}^{\cup}\mathbf{K}$. Тогда найдётся один и только один симплекс K из комплекса $\mathbf{K}$, $\mathfrak{f}$-образ которого есть симплекс L.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathbf{A} := \{K \colon K \in \mathbf{K},\ \mathfrak{f}^{\circ}(K) = L\}.$$

Ясно, что у каждого симплекса K из множества $\mathbf{A}$ размерность равна ν. Таким образом, все они имеют одинаковую размерность и, следовательно, являются связными компонентами в их объединении ${}^{\cup}\mathbf{A}$.

Возьмём некоторую точку x из симплекса L. Её прообраз $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связен и пересекается с каждым симплексом из $\mathbf{A}$. Следовательно, $\operatorname{card}\mathbf{A} = 1$. □

Свойства стяжений рёбер

Легко видеть, что верно следующее утверждение.

Утверждение. *Стяжение* $\mathfrak{f}$ *ребра* E *относительно комплекса* $\mathbf{K}$ *является* PA-*контракцией, если и только если ребро* E *обладает свойством линка в комплексе* $\mathbf{K}$, *т. е.*

$$\mathrm{lk}_{\mathbf{K}}\{E\} = \bigcap_{\substack{V:\, V\lhd E\\ \dim V=0}} \mathrm{lk}_{\mathbf{K}}\{V\}.$$

20. Утверждение. *Для стяжения* $\mathfrak{f}$ *ребра* E *относительно комплекса* $\mathbf{K}$ *и симплекса* $L \in \mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ *множество* $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L})$ *связно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{f}^{\circ}(E) = \{v\}$, это точечное множество. Заметим, что $\{v\}$ и L соотносятся следующим образом: или 1) $\neg\{v\} \lhd L$, или 2) $\{v\} \lhd L$.

Рассмотрим оба случая.

1. Если $\neg\{v\} \lhd L$, то вершины в $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(L)$ не являются вершинами в ребре $E = (a, b)$. Ясно, что функция $\mathfrak{f}$ инъективна на множестве этих вершин, а значит, и на всех симплексах на этих вершинах, следовательно, $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L})$ — замкнутый симплекс из комплекса $\mathbf{K}$.

2. Если $\{v\} \lhd L$, то $\mathrm{vert}\, L = \{v, w_1, \ldots, w_\nu\}$. Легко видеть, что

$$(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L}) = \bigcup_{\substack{S:\, S\in\mathbf{K}\\ \mathrm{vert}\, S\subset\{a,b,\mathfrak{f}^{-1}(w_1),\ldots,\mathfrak{f}^{-1}(w_\nu)\}}} S.$$

Симплекс L является образом некоторого симплекса не меньшей размерности, т. е. в комплексе $\mathbf{K}$ найдётся симплекс K, вершинное множество которого включено в $\{a, b, \mathfrak{f}^{-1}(w_1), \ldots, \mathfrak{f}^{-1}(w_\nu)\}$, $\mathrm{card}\,\mathrm{vert}\, K = \nu + 1$. Таким образом, можно считать, что $a \in \mathrm{vert}\, K$.

Возьмём две точки $x', x'' \in (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L})$, тогда $x' \in S'$ и $x'' \in S''$ для некоторых симплексов S', S'' в комплексе $\mathbf{K}$ со свойством

$$\mathrm{vert}\, S', \mathrm{vert}\, S'' \subset \{a, b, \mathfrak{f}^{-1}(w_1), \ldots, \mathfrak{f}^{-1}(w_\nu)\}.$$

Рассмотрим три случая их взаимного расположения.

1. $S', S'' \lhd K$. Здесь x' и x'' связаны отрезком в $\overline{K}$.

2. $S' \lhd K$, $\neg(S'' \lhd K)$. У симплекса S'' есть вершинная точка не из $\mathrm{vert}\, K$, т. е. точка b. Поскольку $x'' \in \overline{S''}$, ясно, что точка x'' связана с точкой b в $\overline{S''}$. Заметим, что точка b связана с точкой a, так как $v \in \mathrm{vert}\, L$. Ясно также, что точка a связана с точкой x' в $\overline{K}$.

3. $\neg(S' \lhd K)$, $\neg(S'' \lhd K)$. У симплексов S', S'' есть вершинная точка b, т. е. точки x', x'' связаны с точкой b. □

Следующее утверждение подобно утверждению 17.

21. Утверждение. *Для стяжения* $\mathfrak{f}$ *ребра* E *относительно комплекса* $\mathbf{K}$ *и всякого подкомплекса* $\mathbf{T}$ *в комплексе* $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, *у которого множество* ${}^{\cup}\mathbf{T}$ *замкнуто и связно, верно, что множество* $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}({}^{\cup}\mathbf{T})$ *связно и замкнуто.*

Доказательство. Для $x', x'' \in (\mathfrak{f}^{-1})^\circ({}^\cup\mathbf{T})$ найдутся T', T'' со свойствами

$$T', T'' \in \mathbf{T}, \quad x' \in (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(T'), \quad x'' \in (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(T'').$$

По утверждению 20 соединим точку x' с некоторой вершинной точкой в $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(T')$ и соединим точку x'' с некоторой вершинной точкой в $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(T'')$. Тогда можно считать, что точки x', x'' вершинные, точки $\mathfrak{f}(x')$, $\mathfrak{f}(x'')$ также вершинные в $\mathbf{T}$ и от вершинной точки $\mathfrak{f}(x')$ до вершинной точки $\mathfrak{f}(x'')$ есть порёберный путь в $\mathbf{T}$: $\{\mathfrak{f}(x')\} = V_0, U_1, V_1, \ldots, U_\nu, V_\nu = \{\mathfrak{f}(x'')\}$, где U_ι — рёбра в $\mathbf{T}$ и V_ι — вершины этих ребер, $V_{\iota-1}, V_\iota \lhd U_\iota$ и $\{\mathfrak{f}(x')\} \lhd U_1$, $\{\mathfrak{f}(x'')\} \lhd U_\nu$.

Прообразы элементов этого пути $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{\mathfrak{f}(x')\})$, $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\overline{U_1})$, $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(V_1)$,..., $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\overline{U_\nu})$, $(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{\mathfrak{f}(x'')\})$ связны по утверждению 20, и каждая последовательная пара имеет общую часть, т. е. точки x', x'' связаны.

Замкнутость множества следует из непрерывности. □

22. Утверждение. *Пусть $\mathfrak{f}$ — стяжение ребра E относительно комплекса $\mathbf{K}$ и множество $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами: $\mathcal{S} \subset \{\mathbf{Q} \colon \mathbf{Q} \subset \mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})\}$ и тело $({}^\cup\mathbf{S})$ всякого элемента $\mathbf{S}$ множества $\mathcal{S}$ замкнуто и связно, $\mathcal{S}$ дизъюнктивно и непусто. Тогда множество*

$$\mathcal{W} := \{\mathbf{D} \colon \exists \mathbf{S}\ (\mathbf{S} \in \mathcal{S},\ \mathbf{D} = (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ\circ}(\mathbf{S}))\}$$

дизъюнктивно, непусто и состоит из того же числа элементов, что и $\mathcal{S}$, при этом тело каждого элемента множества $\mathcal{W}$ замкнуто и связно.

Доказательство. Замкнутость следует из непрерывности, а связность из утверждения 21. Утверждения о дизъюнктивности, непустоте и числе элементов очевидны. □

23. Утверждение. *Пусть $\mathbf{K}$ — полный симплициальный комплекс и кусочно-аффинные функции $\mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu$ обладают следующими свойствами: функция $\mathfrak{f}_0$ есть стяжение некоторого ребра относительно комплекса $\mathbf{K}$, функция $\mathfrak{f}_\iota$ есть стяжение некоторого ребра относительно комплекса $(\mathfrak{f}_{\iota-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ для всякого $\iota = 1, \ldots \nu$. Тогда функция $(\mathfrak{f}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^\circ$ устанавливает биекцию между множеством $(\mathfrak{f}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^\circ$-прообразов каждой из совокупности всех вершин комплекса $(\mathfrak{f}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ и самой этой совокупностью.*

Доказательство. Утверждение следует из утверждения 22. □

Утверждение. *Пусть $\mathbf{K}$ — полный симплициальный комплекс и кусочно-аффинные функции $\mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_\beta$ обладают следующими свойствами: $\mathfrak{f}_0$ и $\mathfrak{g}_0$ — стяжения некоторых своих ребер относительно комплекса $\mathbf{K}$, функции $\mathfrak{f}_\mu$ и $\mathfrak{g}_\nu$ — стяжения некоторых своих ребер соответственно относительно комплексов $(\mathfrak{f}_{\mu-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ и $(\mathfrak{g}_{\nu-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{g}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ для всяких $\mu = 1, \ldots, \alpha$ и $\nu = 1, \ldots, \beta$ и при этом всякое ребро E комплекса $\mathbf{K}$ вырождается функцией $\mathfrak{p} := \mathfrak{f}_\alpha \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0$, если и только если оно вырождается функцией $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}_\beta \circ \ldots \circ \mathfrak{g}_0$. Тогда найдётся функция $\mathfrak{h}$ со следующими свойствами: тройка $\langle \mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K}), \mathfrak{h}, \mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathbf{K}) \rangle$ симплициальна, $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ и $\mathfrak{h}$ инъективна.*

Доказательство. По утверждению 23 поставим в соответствие вершинам в $\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ их $\mathfrak{p}$-прообразы и заметим, что эти множества являются $\mathfrak{q}$-прообразами вершин в $\mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$. Таким образом мы получим соответствие на вершинах. Это так, ибо функции $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ понижают размерность каждого симплекса в комплексе $\mathbf{K}$ на одинаковое значение.

Докажем это. Если $K \in \mathbf{K}$, то $K = K^0_{\mathfrak{p}} * K^1_{\mathfrak{p}} = K^0_{\mathfrak{q}} * K^1_{\mathfrak{q}}$, где $\mathfrak{p}|_{K^0_{\mathfrak{p}}}$ постоянна, а $\mathfrak{p}|_{K^1_{\mathfrak{p}}}$ инъективна, $\mathfrak{q}|_{K^0_{\mathfrak{q}}}$ постоянна, а $\mathfrak{q}|_{K^1_{\mathfrak{q}}}$ инъективна. Достаточно показать, что $K^0_{\mathfrak{p}} = K^0_{\mathfrak{q}}$ в случае, когда $\mathfrak{p}|_K$ и $\mathfrak{q}|_K$ вырожденны.

Рассмотрим $K^0_{\mathfrak{p}}$. Если $\mathfrak{q}|_{K^0_{\mathfrak{p}}}$ не постоянна, то найдётся ребро S, такое что $S \lhd K^0_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{q}|_S$ инъективна, что противоречит условию одновременной вырожденности.

Далее продолжим полученное соответствие вершин по аффинности на каждом симплексе в $\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ до функции $\mathfrak{h}$. А именно, если $L \in \mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, то

$$\exists K \ (K \in (\mathfrak{p}^{-1})^{\circ}(L),\ \mathfrak{p}|_K \text{ инъективна}).$$

Тогда $\mathfrak{q}|_K$ инъективна и вершины симплекса $\mathfrak{q}^{\circ}(K)$ являются $\mathfrak{h}$-образами вершин симплекса L. □

Утверждение. *Для инъективной функции $\mathfrak{f}$, симплициальной относительно комплекса $\mathbf{K}$, а также стяжения $\mathfrak{g}$ ребра E относительно комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ найдутся меняющие порядок $\mathfrak{f}'$, E', $\mathfrak{g}'$, т. е. $\mathfrak{g}'$ — стяжение ребра E' относительно комплекса $\mathbf{K}$, функция $\mathfrak{f}'$ инъективна и симплициальна относительно комплекса $\mathfrak{g}'^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, и композиции равны*: $\mathfrak{f}' \circ \mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$.

Доказательство. Рассмотрим вершинные точки ${}^{\cup}\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{K})$ в $\mathbf{K}$.

У некоторого ребра две его вершинные точки v_1, v_2 со свойствами $v_1 \neq v_2$, $v_1, v_2 \in {}^{\cup}\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{K})$ соответствуют ребру стяжения $E = (\mathfrak{f}(v_1), \mathfrak{f}(v_2))$, т. е. $\mathfrak{g}(\mathfrak{f}(v_1)) = \mathfrak{g}(\mathfrak{f}(v_2)) =: w$.

Выберем некоторую точку c вне аффинной оболочки тел комплексов $\mathbf{K}$, $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, $\mathfrak{g}^{\circ\circ}(\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K}))$.

Определим искомые функции:

$$\mathfrak{g}'(v_1) := \mathfrak{g}'(v_2) := c,$$
$$\mathfrak{g}'(a) := a,\ \text{где } a \in {}^{\cup}\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{K}),\ a \neq v_1, v_2,$$

на комплекс $\mathbf{K}$ продолжим функцию $\mathfrak{g}'$ по аффинности на симплексах,

$$\mathfrak{f}'(c) := w,$$
$$\mathfrak{f}'(a) := \mathfrak{g}(\mathfrak{f}(a)),\ \text{где } a \in {}^{\cup}\operatorname{vert}^{\circ}(\mathfrak{g}'^{\circ\circ}(\mathbf{K})),\ a \neq c,$$

и также на комплекс $\mathfrak{g}'^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ продолжим функцию $\mathfrak{f}'$ по аффинности на симплексах. □

О разложении на комплексе произвольной кусочно-аффинной функции

24. Утверждение. *Для функции $\mathfrak{f}$, симплициальной относительно комплекса $\mathbf{K}$ и вырождающей отрезки, найдутся стяжение $\mathfrak{h}$ некоторого ребра E относительно комплекса $\mathbf{K}$, а также симплициальная относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ функция $\mathfrak{g}$, в композиции дающие функцию $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$.*

Доказательство. По утверждению 13 найдётся такой симплекс K, что $K \in \mathbf{K}$ и $\mathfrak{f}|_K$ неинъективна. При этом (поскольку функция $\mathfrak{f}$ симплициальна относительно $\mathbf{K}$) существует такой симплекс E, что $E \lhd K$, E — одномерный симплекс, функция $\mathfrak{f}$ склеивает две вершинные точки a и b ребра E в одну точку s.

Таким образом, по замечанию 5

$$\mathfrak{f}(u) = \sum_{\substack{v\colon v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{K}) \\ v \neq a,b}} \mathbf{K}_u^v \mathfrak{f}(v) + (\mathbf{K}_u^a + \mathbf{K}_u^b)s, \quad u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}.$$

Возьмём точку c вне аффинной оболочки множества ${}^{\cup}\mathbf{K}$ и определим функцию $\mathfrak{h}$ по формуле

$$\mathfrak{h}(u) := \sum_{\substack{v\colon v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{K}) \\ v \neq a,b}} \mathbf{K}_u^v v + (\mathbf{K}_u^a + \mathbf{K}_u^b)c, \quad u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}.$$

При этом ясно, что функция $\mathfrak{h}$ симплициальна относительно комплекса $\mathbf{K}$, комплекс $\mathbf{L} := \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ полон и

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{h}(u)}^v = \begin{cases} \mathbf{K}_u^v, & \text{если } v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{L}),\ v \neq c,\ u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}, \\ \mathbf{K}_u^a + \mathbf{K}_u^b, & \text{если } v = c,\ u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}. \end{cases}$$

Определим функцию $\mathfrak{g}$ по формуле

$$\mathfrak{g}(z) := \sum_{\substack{v\colon v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{L}) \\ v \neq c}} \mathbf{L}_z^v \mathfrak{f}(v) + \mathbf{L}_z^c s, \quad z \in \operatorname{im}\mathfrak{h}.$$

Ясно, что функция $\mathfrak{g}$ симплициальна относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ и

$$(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h})(u) = \mathfrak{g}(\mathfrak{h}(u)) = \sum_{\substack{v\colon v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{L}) \\ v \neq c}} \mathbf{L}_{\mathfrak{h}(u)}^v \mathfrak{f}(v) + \mathbf{L}_{\mathfrak{h}(u)}^c s =$$

$$= \sum_{\substack{v\colon v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{L}) \\ v \neq c}} \mathbf{K}_u^v \mathfrak{f}(v) + (\mathbf{K}_u^a + \mathbf{K}_u^b)s =$$

$$= \sum_{\substack{v\colon v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{K}) \\ v \neq a,b}} \mathbf{K}_u^v \mathfrak{f}(v) + (\mathbf{K}_u^a + \mathbf{K}_u^b)s = \mathfrak{f}(u), \quad u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}.$$

Утверждение доказано. □

Определим для пары $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}\rangle$, где функция $\mathfrak{f}$ аффинна относительно комплекса $\mathbf{K}$, *число вырождения* $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathbf{K})$ по формуле

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathbf{K}) := \operatorname{card}\{E \colon E \text{ — ребро в комплексе } \mathbf{K}, \text{ на котором функция } \mathfrak{f} \text{ неинъективна}\}.$$

25. Утверждение. *Если $\mathfrak{h}$ — стяжение ребра E относительно комплекса $\mathbf{K}$ и функция $\mathfrak{f}$ симплициальна относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, то*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})) < \mathfrak{z}(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{h}, \mathbf{K}).$$

Доказательство. Введём обозначения

$$\mathbf{E} := \{E \colon E \text{ — вырожденное функцией } \mathfrak{f} \circ \mathfrak{h} \text{ ребро в } \mathbf{K}\},$$
$$\tilde{\mathbf{E}} := \{\tilde{E} \colon \tilde{E} \text{ — вырожденное функцией } \mathfrak{f} \text{ ребро в } \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})\},$$

причём $\operatorname{card} \mathbf{E} = \mathfrak{z}(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{h}, \mathbf{K})$ и $\operatorname{card} \tilde{\mathbf{E}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K}))$. Ясно, что если $\tilde{E} \in \tilde{\mathbf{E}}$, то в $\mathbf{E}$ существует ребро E: $\mathfrak{h}^{\circ}(E) = \tilde{E}$. Таким образом,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{K})) \leqslant \mathfrak{z}(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{h}, \mathbf{K}).$$

Покажем строгость неравенства. Пусть функция $\mathfrak{h}$ стягивает ребро $E \in \mathbf{K}$, тогда $E \in \mathbf{E}$ и множество $\mathfrak{h}^{\circ}(E)$ точечно. Таким образом, не все рёбра из множества $\mathbf{E}$ переводятся функцией $\mathfrak{h}$ в $\tilde{\mathbf{E}}$, и неравенство строгое. □

26. Теорема. *Для всякой кусочно-аффинной вырождающей отрезки функции $\mathfrak{f}$ и всякого комплекса $\mathbf{K}$, относительно которого она симплициальна, найдутся функции $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \ldots, \mathfrak{h}_\nu$ со свойствами*

$$\langle \mathbf{K}, \mathfrak{h}_0, \ldots, \mathfrak{h}_\nu\rangle \in \mathrm{Seq}^{\nu}_{\mathrm{ec}}, \quad \langle \mathbf{K}, \mathfrak{h}_0, \ldots, \mathfrak{h}_\nu, \mathfrak{g}\rangle \in \mathrm{Seq}^{\nu+1},$$

причём функция $\mathfrak{g}$ не вырождает отрезки, а также $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0$.

Доказательство. По утверждениям 24 и 25 функцию $\mathfrak{f}$ можно разложить в композицию стяжения ребра в $\mathbf{K}$ и функции, симплициальной относительно соответствующего («стянутого») комплекса, при этом число рёбер, на которых функция неинъективна, у новой симплициальной пары строго меньше, чем у исходной. Искомое разложение достигается за конечное число шагов. □

О разложении кусочно-аффинных функций на PA-функции, не вырождающие отрезки, и кусочно-аффинные контракции

27. Описание. Опишем *центральное подразделение* произвольного полного выпукло-полиэдрального комплекса $\mathbf{L}$.

Выберем сначала у каждого его элемента L по точке: $c_L \in L$, $L \in \mathbf{L}$. Затем индуктивно построим следующие симплициальные комплексы:

$$\mathbf{N}^0 := \{L \colon L \in \mathbf{L},\ \dim L = 0\};$$

если для $\kappa \geqslant 0$ комплекс $\mathbf{N}^\kappa$ построен, то комплекс $\mathbf{N}^{\kappa+1}$ определим формулой

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{\kappa+1} :=\ & \mathbf{N}^\kappa \sqcup \\ & \sqcup \{N\colon \exists L, Z\ (L \in \mathbf{L},\ \dim L = \kappa+1,\ Z \in \mathbf{N}^\kappa,\ Z \subset \partial L,\ N = \{c_L\} * Z)\} \sqcup \\ & \sqcup \{\{c_L\}\colon L \in \mathbf{L},\ \dim L = \kappa+1\};\end{aligned}$$

комплекс

$$\mathbf{M} := \bigcup_{\kappa\colon \kappa\in\mathbb{N}} \mathbf{N}^\kappa$$

называется центральным подразделением комплекса $\mathbf{L}$ относительно центров c_L, $L \in \mathbf{L}$.

28. Описание. Если $\mathfrak{f}$ — стяжение ребра $E = V_1 * V_2$ относительно комплекса $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — некоторое центральное подразделение (см. описание 27) комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, то опишем *доцентрованный прообраз* комплекса $\mathbf{L}$ относительно функции $\mathfrak{f}$ и комплекса $\mathbf{K}$.

Пусть

$$\mathbf{A} := \{A\colon \exists K, L\ (K \in \mathbf{K},\ L \in \mathbf{L},\ A = K \cap (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(L),\ \mathfrak{f}^\circ(A) = L)\},$$

это выпукло-полиэдральный комплекс по утверждению 6. В нём только элементы, включённые в симплексы комплекса $\mathbf{K}$, являющиеся надгранями ребра E, не являются непременно симплексами.

Выберем в каждом ребре A комплекса $\mathbf{A}$, таком что $\mathfrak{f}^\circ(A)$ одноточечно, по точке c_A. Пусть

$$\mathbf{G} = \{A\colon \exists K\ (K \in \mathbf{K},\ K \rhd E,\ A \subset K)\}.$$

Индуктивно определим следующие симплициальные комплексы:

$$\mathbf{B}^1 := (\mathbf{A} \setminus \mathbf{G}) \cup \{V_1 * \{c_E\}, \{c_E\}, \{c_E\} * V_2\};$$

если комплекс $\mathbf{B}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, построен, то комплекс $\mathbf{B}^{\nu+1}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{\nu+1} :=\ & \mathbf{B}^\nu \cup \{\{c_A\}, \{c_A\} * B\colon \\ & \exists A, K, B\ (K \in \mathbf{K},\ \dim K = \nu+1,\ K \rhd E,\ B \in \mathbf{B}^\nu,\ B \subset \partial K,\ A \subset K)\};\end{aligned}$$

наконец, искомый комплекс $\mathbf{C}$ определим по формуле

$$\mathbf{C} := \bigcup_{\nu\colon \nu\in\mathbb{N}_0} \mathbf{B}^\nu.$$

Ясно, что он является центральным подразделением комплекса $\mathbf{K}$ и при этом функция $\mathfrak{f}$ симплициальна относительно его.

29. Описание. Если отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — некоторое центральное подразделение (см. описание 27) комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, то опишем *доцентрованный прообраз* $\mathbf{F}$ комплекса $\mathbf{L}$ относительно функции $\mathfrak{f}$ и комплекса $\mathbf{K}$.

1. Если отображение $\mathfrak{f}$ не вырождает отрезки, то ясно, что множество

$$\mathbf{F} := \{F\colon \exists K, L\ (K \in \mathbf{K},\ L \in \mathbf{L},\ K \cap (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(L) = F,\ \mathfrak{f}^{\circ}(F) = L)\} \text{ —}$$

полный симплициальный комплекс, называемый доцентрованным прообразом.

2. Если же функция $\mathfrak{f}$ вырождает отрезки, то по теореме 26 найдутся функции $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \ldots, \mathfrak{h}_\nu$ со следующими свойствами: функция $\mathfrak{h}_0$ — стяжение некоторого ребра относительно комплекса $\mathbf{K}$, функция $\mathfrak{h}_\iota$ — стяжение некоторого ребра относительно комплекса $(\mathfrak{h}_{\iota-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ для всех $\iota = 1, \ldots, \nu$, функция $\mathfrak{g}$ симплициальна относительно комплекса $(\mathfrak{h}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$ и не вырождает отрезки, а также $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0$.

3. Ясно, что множество

$$\begin{aligned}\mathbf{B} := \{B\colon \exists K, L\\ &(K \in (\mathfrak{h}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K}),\ L \in \mathbf{L},\ K \cap (\mathfrak{g}^{-1})^{\circ}(L) = B,\ \mathfrak{g}^{\circ}(B) = L)\} \text{ —}\end{aligned}$$

полный симплициальный комплекс.

4. Определим индуктивно последовательность полных симплициальных комплексов $\mathbf{C}_\nu, \ldots, \mathbf{C}_0$ следующим образом: $\mathbf{C}_\nu$ — доцентрованный прообраз (см. описание 28) комплекса $\mathbf{B}$ относительно функции $\mathfrak{h}_\nu$ и комплекса $(\mathfrak{h}_{\nu-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$; $\mathbf{C}_{\iota-1}$ — доцентрованный прообраз комплекса $\mathbf{C}_\iota$ относительно функции $\mathfrak{h}_{\iota-1}$ и комплекса $(\mathfrak{h}_{\iota-2} \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$.

5. Обозначим $\mathbf{F} := \mathbf{C}_0$. Этот комплекс называется доцентрованным прообразом. При этом ясно, что комплекс $\mathbf{F}$ является центральным подразделением комплекса $\mathbf{K}$, и верно, что отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{F}$.

30. Теорема.

1. *Для всякого отображения $\mathfrak{f}$, симплициального относительно симплициального комплекса $\mathbf{K}$, найдутся некоторое центральное подразделение $\mathbf{F}$ комплекса $\mathbf{K}$, а также контракция $\mathfrak{h}$, симплициальная относительно комплекса $\mathbf{F}$, и не вырождающее отрезки и симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{F})$ отображение $\mathfrak{g}$, такие что $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$.*
2. *Для всякой кусочно-аффинной функции $\mathfrak{f}$ найдутся* PA*-контракция $\mathfrak{h}$ и кусочно-аффинное не вырождающее отрезки отображение $\mathfrak{g}$, в композиции дающие $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если функция $\mathfrak{f}$ не вырождает отрезки, то в качестве разложения возьмём $\mathfrak{g} := \mathfrak{f}$ и $\mathfrak{h} := \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \mathfrak{f}}$, в качестве комплекса $\mathbf{F}$ возьмём произвольное центральное подразделение комплекса $\mathbf{K}$.

Если же функция $\mathfrak{f}$ вырождает отрезки, то следующее построение (п. 1—14) приводит к искомому разложению.

1. Проведём построение из описания 29. Будем использовать обозначения оттуда же.

2. Обозначим $\mathbf{L}_0 := \mathbf{F} = \mathbf{C}_0$.

3. Скажем, что набор $\mathbf{S}$ симплексов из комплекса $\mathbf{L}_0$ *цел*, и обозначим это $\mathbf{S} \in \mathcal{D}_0$, если ${}^{\cup}\mathbf{S} \in \mathbf{K}$.

Скажем, что целый набор $\mathbf{S}$ симплексов из комплекса $\mathbf{L}_0$ *рёберно контракционный*, и обозначим это $\mathbf{S} \in \mathcal{E}_0$, если ${}^{\cup}\mathbf{S}$ — ребро в комплексе $\mathbf{K}$, на котором функция $\mathfrak{f}$ неинъективна.

Скажем, что целый набор $\mathbf{S}$ симплексов из комплекса $\mathbf{L}_0$ *мажорирует* целый набор $\mathbf{T}$ симплексов из комплекса $\mathbf{L}_0$, и обозначим это $\mathbf{S} \sqsupset \mathbf{T}$, если $\mathrm{cl}_{\mathbf{L}_0} \mathbf{S} \supset \mathbf{T}$. Заметим, что все целые наборы симплексов образуют общий комплекс $\mathcal{D}_0$ относительно отношения подчинения $\sqsubset$.

4. Построим последовательно для $\iota = 0, \ldots, \mu$ (μ определим ниже) следующие объекты:

- полный симплициальный комплекс $\mathbf{L}_\iota$;
- комплексы (относительно подчинения $\sqsubset$) $\mathcal{D}_\iota$ целых наборов симплексов в комплексе $\mathbf{L}_\iota$;
- совокупности $\mathcal{E}_\iota$ целых рёберно контракционных наборов в комплексе $\mathbf{L}_\iota$;
- особо выбранные семейства $\mathcal{A}_\iota$ целых наборов в комплексе $\mathbf{L}_\iota$ (на основании выбранных целых рёберно контракционных наборов $\mathbf{S}_\iota$);
- функции $\mathfrak{h}'_\iota$, $\mathfrak{h}_\iota$, $\mathfrak{r}_\iota$, $\mathfrak{r}'_\iota$.

Заметим также, что у каждого целого набора $\mathbf{T}$ в комплексе $\mathbf{L}_\iota$ найдётся единственная (центральная) точка $c^\iota_{\mathbf{T}}$ со свойством $\{c^\iota_{\mathbf{T}}\} \in \mathbf{T}$.

5. Рассмотрим ι-й шаг.

Выберем некоторый $\mathbf{S}_\iota$ из $\mathcal{E}_\iota$. Обозначив

$$\hat{\mathbf{D}} := \{v\colon v \text{ — вершинная точка только в одном ребре из } \mathbf{D}\},$$

определим семейство

$$\mathcal{A}_\iota := \{\mathbf{A}\colon \mathbf{A} \in \mathcal{D}_\iota,\ {}^{\cup}\mathbf{A} \text{ одномерно},\ \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{S}}_\iota\}.$$

Заметим, что, как будет видно из дальнейших построений, каждый целый набор из $\mathcal{A}_\iota$ рёберно контракционен, т. е. $\mathcal{A}_\iota \subset \mathcal{E}_\iota$.

6. Построим в пунктах 7 и 8 функцию $\mathfrak{h}'_\iota$. Она действует на совокупности точек вида $c^\iota_{\mathbf{T}}$ и $c^\iota_{\mathbf{H}}$. Здесь $\mathbf{T} \in \mathcal{F}_\iota := \mathrm{St}^{\sqsubset}_{\mathcal{D}_\iota} \mathcal{A}_\iota$ и $\mathbf{H} \sqsubset \mathbf{T}$, $\dim {}^{\cup}\mathbf{H}' = \dim {}^{\cup}\mathbf{T} - 1$, $\mathbf{H} \notin \mathcal{F}_\iota$. Заметим также, что таких целых наборов $\mathbf{H}$ ровно два («боковины»).

7. Скажем, что два целых набора $\mathbf{T}'$, $\mathbf{T}''$ из $\mathcal{F}_\iota$ *смежны*, если найдётся их общая «боковина», т. е. целый набор $\mathbf{H}$, такой что $\mathbf{T}' \sqsupset \mathbf{H}$, $\mathbf{T}'' \sqsupset \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \notin \mathcal{F}_\iota$, $\dim {}^{\cup}\mathbf{H} + 1 = \dim {}^{\cup}\mathbf{T}' = \dim {}^{\cup}\mathbf{T}''$.

Определим также наименьшее отношение эквивалентности, содержащее данное отношение смежности. В каждой размерности λ тел целых наборов пронумеруем некоторым образом их эквивалентные классы: $\mathcal{G}^\lambda_0, \ldots, \mathcal{G}^\lambda_{\tau_\lambda}$. Наконец, индуктивно по размерности $\lambda = 1, \ldots$ и индукцией же по номеру $\kappa = 0, \ldots, \tau_\lambda$ определим значения функции $\mathfrak{h}'_\iota$.

8. В случае $\lambda = 1$ имеем $\mathcal{G}^1_0 = \mathcal{A}_\iota$, $\tau_\lambda = 0$. Всем центральным точкам v вида $v = c^\iota_{\mathbf{A}}, c^\iota_{\mathbf{H}'}, c^\iota_{\mathbf{H}''}$, где $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_\iota$, $\mathbf{H}', \mathbf{H}'' \sqsubset \mathbf{A}$, $\dim {}^{\cup}\mathbf{H}' = \dim {}^{\cup}\mathbf{H}'' = 0$ поставим

значением $\mathfrak{h}'_\iota(v)$ в соответствие некоторую одну и ту же точку вне аффинной оболочки множества $^\cup\mathbf{L}_\iota$.

В случае $\lambda > 1$, предположив, что на центральных точках компонент меньших размерностей $(1, \ldots, \lambda - 1)$ функция $\mathfrak{h}'_\iota$ построена, центральным точкам v вида $v = c^\iota_\mathbf{T}, c^\iota_{\mathbf{H}'}, c^\iota_{\mathbf{H}''}$, где $\mathbf{T} \in \mathcal{G}^\lambda_0$, $\mathbf{H}', \mathbf{H}'' \sqsubset \mathbf{T}$, $\dim{}^\cup\mathbf{H}' = \dim{}^\cup\mathbf{H}'' = \dim{}^\cup\mathbf{T} - 1$, $\neg(\mathbf{H} \sqsupset \mathbf{A})$ для всякого $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_\iota$, значением $\mathfrak{h}'_\iota(v)$ поставим в соответствие некоторую одну и ту же точку вне аффинной оболочки множества $^\cup\mathbf{L}_\iota$, объединённого с множеством всех уже построенных $\mathfrak{h}'_\iota$-значений. Далее при том же λ выполним такое же построение с заменой $0 \to \kappa = 1, \ldots, \tau_\lambda$.

9. Определим функцию $\mathfrak{h}_\iota$ на вершинных точках комплекса $\mathbf{L}_\iota$ по формуле

$$\mathfrak{h}_\iota(v) := \begin{cases} v, & \text{если } v \text{ не вершинная точка во всяком } \mathbf{T},\ \mathbf{T} \in \mathcal{F}_\iota, \\ & \text{или } v \text{ — вершинная точка в некотором } \mathbf{T},\ \mathbf{T} \in \mathrm{Lk}^{\sqsubset}_{\mathcal{D}_\iota} \mathcal{A}_\iota; \\ \mathfrak{h}'_\iota(v), & \text{если } v \text{ — вершинная точка в некотором } \mathbf{T},\ \mathbf{T} \in \mathcal{F}_\iota, \\ & \text{и } v \text{ не вершинная точка во всяком } \mathbf{T},\ \mathbf{T} \in \mathrm{Lk}^{\sqsubset}_{\mathcal{D}_\iota} \mathcal{A}_\iota. \end{cases}$$

Заметим, что точки второго типа — это точки вида $v = c^\iota_\mathbf{Z}, c^\iota_{\mathbf{H}'}, c^\iota_{\mathbf{H}''}$, где $\mathbf{Z} \in \mathrm{St}^{\sqsubset}_{\mathcal{D}_\iota} \mathcal{A}_\iota$, $\mathbf{H}', \mathbf{H}'' \sqsubset \mathbf{Z}$, $\dim{}^\cup\mathbf{H}' = \dim{}^\cup\mathbf{H}'' = \dim{}^\cup\mathbf{Z} - 1$, $\neg(\mathbf{H} \sqsupset \mathbf{A})$ для всякого $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_\iota$.

Затем функция $\mathfrak{r}_\iota$ определяется как посимплексно аффинное продолжение функции $\mathfrak{h}_\iota$ на комплексе $\mathbf{L}_\iota$.

10. Заметим, что функция $\mathfrak{r}'_{\iota-1}$ (а в случае $\iota = 0$ функция $\mathfrak{r}'_{-1} := \mathfrak{f}$) разлагается в композицию некоторой функции $\mathfrak{r}'_\iota$ и функции $\mathfrak{r}_\iota$, т. е. $\mathfrak{r}'_{\iota-1} = \mathfrak{r}'_\iota \circ \mathfrak{r}_\iota$. Действительно, ясно, что если x', x'' таковы, что $\mathfrak{r}_\iota(x') = \mathfrak{r}_\iota(x'')$, то $\mathfrak{r}'_{\iota-1}(x') = \mathfrak{r}'_{\iota-1}(x'')$. Таким образом корректно определяется симплициальная относительно комплекса $\mathfrak{r}^{\circ\circ}_\iota(\mathbf{L}_\iota)$ функция $\mathfrak{r}'_\iota$, такая что $\mathfrak{r}'_\iota(x) := \mathfrak{r}'_{\iota-1}(\tilde{x})$, где $\mathfrak{r}_\iota(\tilde{x}) = x$.

11. Итак, на шаге ι построены функции $\mathfrak{h}'_\iota$, $\mathfrak{h}_\iota$, $\mathfrak{r}_\iota$, $\mathfrak{r}'_\iota$. Построим также (если $\iota < \mu$) комплексы

$$\mathbf{L}_{\iota+1} := \mathfrak{r}^{\circ\circ}_\iota(\mathbf{L}_\iota), \quad \mathcal{D}_{\iota+1} := \mathfrak{r}^{\circ\circ}_\iota(\mathcal{D}_\iota)$$

и совокупность

$$\mathcal{E}_{\iota+1} := \mathfrak{r}^{\circ\circ\circ}_\iota(\mathcal{E}_\iota \setminus \mathcal{A}_\iota).$$

Заметим, что

$$c^{\iota+1}_{\mathfrak{r}^{\circ\circ}_\iota(\mathbf{F})} := \mathfrak{r}_\iota(c^\iota_\mathbf{F}),$$

где $\mathbf{F} \in \mathcal{D}_\iota$.

12. Заметим ещё, что число элементов в множестве $\mathcal{E}_{\iota+1}$ меньше числа элементов множества $\mathcal{E}_\iota$.

13. Индукция проводится до того $\iota = \mu$, при котором уже нет рёберно контракционных целых наборов.

14. Итак, ясно, что $\mathfrak{f} = \mathfrak{r}'_\mu \circ \mathfrak{r}_\mu \circ \ldots \circ \mathfrak{r}_0$, при этом каждая функция $\mathfrak{r}_\iota$ из построения есть PA-контракция, а функция $\mathfrak{r}'_\mu$ не вырождает отрезки.

Наконец, переобозначим $\mathfrak{g} := \mathfrak{r}'_\mu$, $\mathfrak{h} := \mathfrak{r}_\mu \circ \ldots \circ \mathfrak{r}_0$.

Второе утверждение следует из первого и существования симплициального комплекса, относительно которого кусочно-аффинное отображение симплициально. □

Введение многогранных погружений

Для произвольного кусочно-аффинного отображения $\mathfrak{f}$ скажем, что не вырождающее отрезки PA-отображение $\mathfrak{g}$ есть *редукт* отображения $\mathfrak{f}$, если найдётся PA-контракция $\mathfrak{h}$, в композиции с $\mathfrak{g}$ дающая отображение $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$. Совокупность всех редуктов отображения $\mathfrak{f}$ обозначим через $\mathrm{reduct}(\mathfrak{f})$. Из теоремы 30 следует, что $\mathrm{reduct}(\mathfrak{f}) \neq \varnothing$, а теорема 18 показывает, что все редукты гомеоморфно соответствуют друг другу (хотя и неоднозначно).

Две кусочно-аффинные функции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ назовём *редуктивно эквивалентными*, если множества их редуктов совпадают: $\mathrm{reduct}(\mathfrak{f}) = \mathrm{reduct}(\mathfrak{g})$.

Классы эквивалентных PA-функций назовём *многогранниками-следами* или *погружёнными многогранниками*. Совокупность таких многогранников-следов обозначим через PHI.

Заметим, что две кусочно-аффинные функции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ редуктивно эквивалентны тогда и только тогда, когда найдётся конечный набор кусочно-аффинных отображений $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{g}$ и набор PA-контракций $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\nu-1}, \mathfrak{q}_\nu$ со свойством

$$\mathfrak{h}_{\iota-1} \circ \mathfrak{p}_{\iota-1} = \mathfrak{h}_\iota \circ \mathfrak{q}_\iota, \quad \text{где} \quad \iota = 1, \ldots, \nu.$$

Множество

$$\kappa\alpha\nu\omega\nu(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{f} \colon \exists \mathfrak{g} \ (\mathfrak{g} \in \mathfrak{A},\ \mathfrak{f} \in \mathrm{reduct}(\mathfrak{g}))\},$$

где $\mathfrak{A} \in \mathrm{PHI}$, назовём совокупностью *канонических представителей* многогранника-следа $\mathfrak{A}$. Заметим, что $\kappa\alpha\nu\omega\nu(\mathfrak{A}) = \mathrm{reduct}(\mathfrak{g})$ для всякого $\mathfrak{g} \in \mathfrak{A}$.

31. Определение. Для $\iota \in \mathbb{N}$, полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$ и отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ назовём определённое на $[\alpha, \beta] \times {}^\cup\mathbf{K}$ непрерывное отображение $\mathfrak{n}$

- *левым* C^ι- (или *аналитически*) *однородным* относительно комплекса $\mathbf{K}$, при условии, что $\mathfrak{n}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{K}$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$, для всяких двух вершинных точек v', v'' комплекса $\mathbf{K}$ и произвольных чисел $\tau', \tau'' \in (\alpha, \beta]$ верно, что
$$\mathfrak{n}(\tau', v') = \mathfrak{n}(\tau', v'') \iff \mathfrak{n}(\tau'', v') = \mathfrak{n}(\tau'', v''),$$
а также что $\mathfrak{n}(\tau, \cdot)$-образ всякой вершинной точки комплекса $\mathbf{K}$ зависит от τ C^ι-гладко (или аналитически) на $[\alpha, \beta]$;
- C^ι- (или *аналитически*) *однородным* относительно комплекса $\mathbf{K}$, если или $\mathfrak{n}(\cdot, \cdot)$, или $\mathfrak{n}'(\cdot, \cdot)$ левое C^ι- (или аналитически) однородное относительно комплекса $\mathbf{K}$, где $\mathfrak{n}'(\tau, \cdot) = \mathfrak{n}(\alpha + \beta - \tau, \cdot)$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$;
- C^ι- (или *аналитически*) *ровным*, если при $\tau \in (\alpha, \beta)$ отображение $\mathfrak{n}(\tau, \cdot)$ не вырождает отрезки.

32. Определение. Для полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$ и отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ назовём непрерывное отображение $\mathfrak{n}$, определённое на $[\alpha, \beta] \times {}^\cup\mathbf{K}$, *кусочно-$C^\iota$*- (или *аналитически*) *однородным* относительно комплекса $\mathbf{K}$, если $\mathfrak{n}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{K}$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$ и найдутся числа $\alpha = \gamma_0 < \ldots < \gamma_\nu = \beta$, такие что отображения $\mathfrak{n}(\cdot, \cdot)|_{[\gamma_{\iota-1}, \gamma_\iota] \times {}^\cup\mathbf{K}}$ C^ι- (или аналитически) однородны относительно комплекса $\mathbf{K}$ при $\iota = 1, \ldots, \nu$.

Определим *деформацию* $\mathfrak{m}$ многогранников-следов как функцию, ставящую в соответствие каждому числу τ из отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ некоторый многогранник-след $\mathfrak{m}_\tau$, для которой найдутся полный симплициальный комплекс $\mathbf{K}$ и непрерывное отображение $\mathfrak{n}$, действующее на множестве $[\alpha, \beta] \times {}^\cup\mathbf{K}$, такие что $\mathfrak{n}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{K}$ и $\mathfrak{n}(\tau, \cdot) \in \mathfrak{m}_\tau$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Скажем, что эта деформация $\mathfrak{m}$ многогранников-следов есть деформация *конечного* C^ι- (или *аналитического*) *типа*, если найдутся симплициальный комплекс $\mathbf{K}$ и кусочно-C^ι- (или аналитически) однородное относительно его отображение $\mathfrak{n}$, такие что $\mathfrak{n}(\tau, \cdot) \in \mathfrak{m}_\tau$ для $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Приведём некоторые иллюстрации к понятию деформации многогранников-следов.

1. Сети на плоскости. Перемена типа сети: рис. 1. На рисунке стрелками обозначены параметризации сетей и двойными стрелками обозначены переходы по деформации, числа указывают на переходы вершинных точек по параметризации, а на симплексы функции продолжаются по аффинности.
2. Поверхности в $\mathbb{R}^3$. Деформация с изменением строения: рис. 2. На рисунке стрелками обозначены параметризации, а двойной стрелкой обозначен переход по деформации.

Объём многогранников-следов

Выберем некоторое конечномерное аффинное подпространство J, в нём некоторое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и порождённый им объём mes_ι (размерностей $\iota = 0, \ldots, \dim J$).

Для всяких кусочно-аффинного отображения $\mathfrak{f}$ с образом в выбранном пространстве J и полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально, определим *объём* $\mathrm{vol}^3_{\mathbf{K}} \mathfrak{f}$ по формуле

$$\mathrm{vol}^3_{\mathbf{K}} \mathfrak{f} := \sum_{K \colon K \in \mathbf{K}} \mathrm{mes}_\nu \mathfrak{f}^\circ(K),$$

где $\nu = \max\limits_{K \colon K \in \mathbf{K}} \dim K$.

33. Утверждение. *Если выпуклый многогранник B включён в замыкание $\overline{A}$ выпуклого многогранника A, то у многогранника A найдётся подгрань C, включающая многогранник B (т. е. $B \subset C$).*

34. Утверждение. *Отображение vol^3 не зависит от комплекса, т. е. если отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно полных симплициальных комплексов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, то $\mathrm{vol}^3_{\mathbf{A}} \mathfrak{f} = \mathrm{vol}^3_{\mathbf{B}} \mathfrak{f}$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала некоторое кусочно-аффинное отображение $\mathfrak{f}$, симплициальный комплекс $\mathbf{K}$, относительно которого оно симплициально, и некоторый симплициальный комплекс $\mathbf{L}$, измельчающий комплекс $\mathbf{K}$,

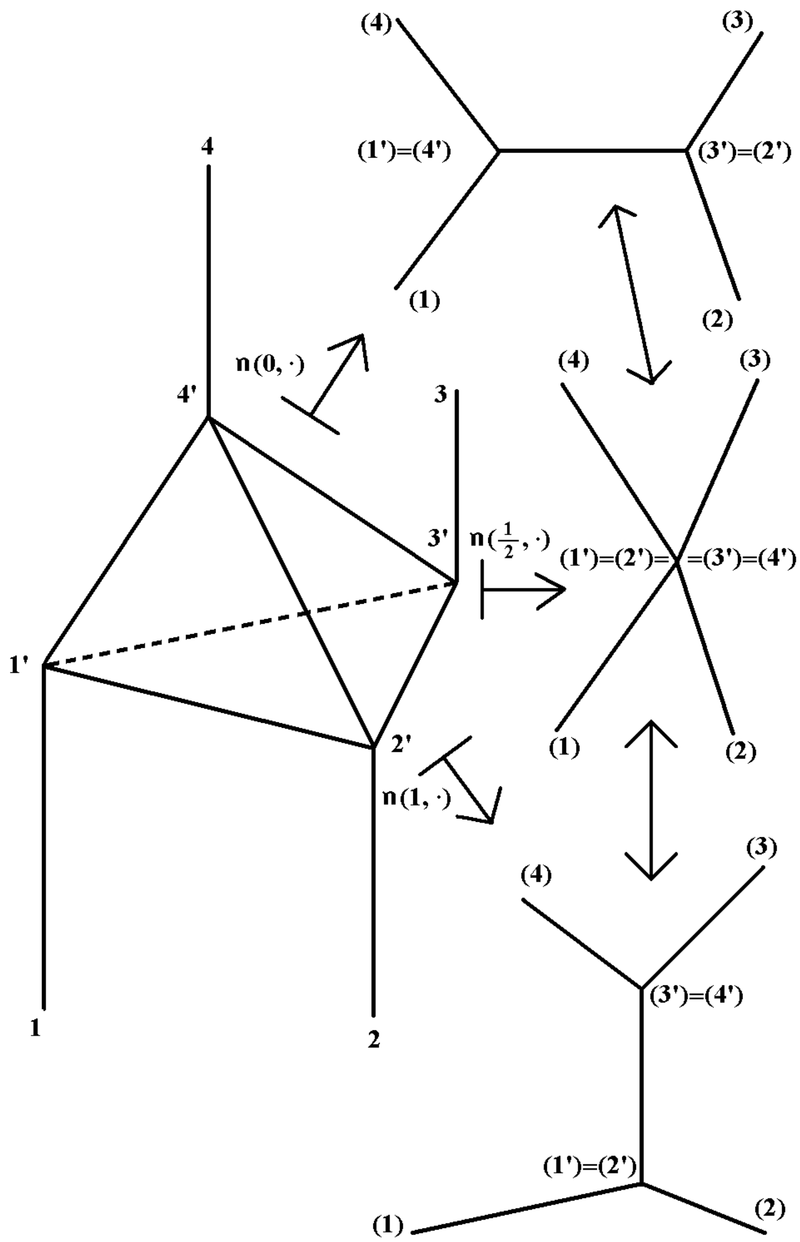

Рис. 1

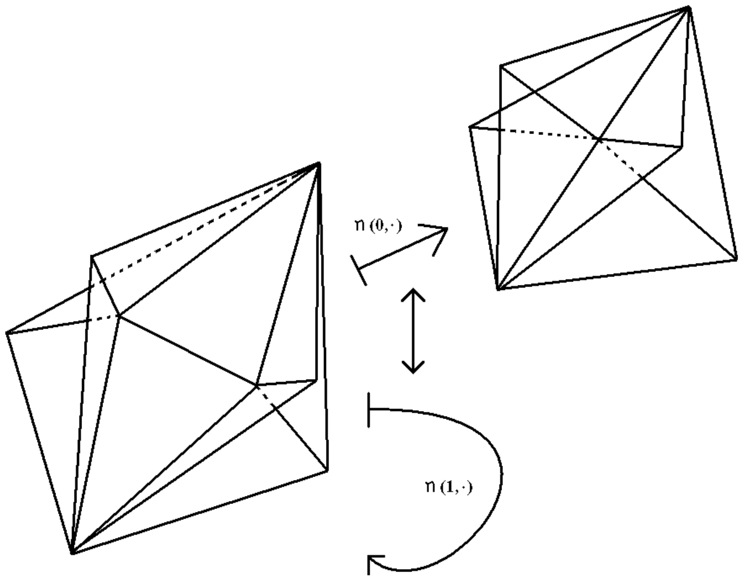

Рис. 2

относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ также симплициально. Нетрудно заметить, что

$$\operatorname{vol}^3_{\mathbf{L}} \mathfrak{f} = \sum_{L\colon L\in\mathbf{L}} \operatorname{mes}_\nu \mathfrak{f}^\circ(L) = \sum_{K\colon K\in\mathbf{K}} \Bigg(\sum_{\substack{L\colon L\in\mathbf{L}\\ L\subset K}} \operatorname{mes}_\nu \mathfrak{f}^\circ(L) \Bigg).$$

Ясно также, что внутренняя сумма совпадает с числом $\operatorname{mes}_\nu \mathfrak{f}^\circ(K)$. Итак, в этом случае независимость доказана.

2. Рассмотрим два комплекса $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{K}''$, относительно которых отображение $\mathfrak{f}$ симплициально. Тогда найдётся некоторый симплициальный комплекс $\mathbf{L}$, измельчающий оба комплекса $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{K}''$.

Заметим, что из утверждения 11 следует существование комплекса $\mathbf{N}$, измельчающего комплекс $\mathbf{L}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально. В самом деле, возьмём некоторую инъективную функцию $\mathfrak{p}$, действующую на вершинном множестве ${}^{\cup}\operatorname{vert}^\circ(\mathbf{L})$ комплекса $\mathbf{L}$, образ $\operatorname{im}\mathfrak{p}$ которой аффинно независим. Продолжив её аффинно на каждом симплексе комплекса $\mathbf{L}$, образуем функцию $\mathfrak{q}$. Обозначим $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{q}^{-1}$ и $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{f}$. Заметим, что эти функции являются последовательно согласованными. Применив к ним утверждение 11, рассмотрим комплекс $\mathbf{M}$, существующий по этому утверждению. Образуем симплекс $S := \operatorname{relint}\operatorname{conv}\operatorname{im}\mathfrak{p}$. Если $M \in \mathbf{M}$, то $M \subset {}^{\cup}\mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathbf{L}) \subset \overline{S}$. Из утверждения 33 заключаем, что у симплекса S найдётся такая подгрань L, что $M \subset L$. Ясно, что эта подгрань есть $\mathfrak{q}$-образ некоторого симплекса комплекса $\mathbf{L}$. Итак, комплекс $\mathbf{M}$

измельчает комплекс $\mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$. Следовательно, комплекс $\mathbf{N} := \mathfrak{g}_0^{\circ\circ}(\mathbf{M})$ измельчает комплекс $\mathbf{L}$, а функция $\mathfrak{g}_1$ симплициальна относительно комплекса $\mathbf{N}$.

Из первой части доказательства вытекает, что $\mathrm{vol}^3_{\mathbf{K}'} \mathfrak{f} = \mathrm{vol}^3_{\mathbf{N}} \mathfrak{f} = \mathrm{vol}^3_{\mathbf{K}''} \mathfrak{f}$. □

Определим объём $\mathrm{vol}^2 \mathfrak{f}$ кусочно-аффинного отображения $\mathfrak{f}$ как $\mathrm{vol}^2 \mathfrak{f} = \mathrm{vol}^3_{\mathbf{K}} \mathfrak{f}$ для некоторого комплекса $\mathbf{K}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально.

Для произвольного кусочно-аффинного отображения $\mathfrak{f}$, образ которого лежит в выбранном пространстве J, и всякого его разложения $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$ в композицию не вырождающего отрезки PA-отображения $\mathfrak{g}$ и PA-контракции $\mathfrak{h}$ определим объём $\mathrm{vol}^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ по формуле

$$\mathrm{vol}^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}) := \mathrm{vol}^2 \mathfrak{g}.$$

Утверждение. *Функция* vol^1 *не зависит от первых двух своих аргументов.*

Доказательство. Возьмём два разложения отображения $\mathfrak{f}$ в композицию:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_1 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_2 \circ \mathfrak{h}_2,$$

где $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — PA-контракции, а $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — кусочно-аффинные не вырождающие отрезки отображения. По теореме 18 найдётся кусочно-аффинный гомеоморфизм $\mathfrak{p}$ множества $\mathrm{im}\, \mathfrak{h}_1$ на множество $\mathrm{im}\, \mathfrak{h}_2$, причём $\mathfrak{g}_2 \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$. Как и в доказательстве утверждения 34 по утверждению 11, найдётся некоторый симплициальный комплекс $\mathbf{K}$, относительно которого отображение $\mathfrak{p}$ симплициально и относительно $\mathfrak{p}$-образа которого (т. е. $\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K})$) отображение $\mathfrak{g}_2$ также симплициально. Тогда отображение $\mathfrak{g}_1$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{K}$. Таким образом, обозначив через ν размерность образа отображения $\mathfrak{f}$, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}^1(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{f}) = \mathrm{vol}^2 \mathfrak{g}_1 = \mathrm{vol}^3_{\mathbf{K}} \mathfrak{g}_1 = \\
&\quad = \sum_{K:\ K \in \mathbf{K}} \mathrm{mes}_\nu\, \mathfrak{g}_1^\circ(K) = \sum_{K:\ K \in \mathbf{K}} \mathrm{mes}_\nu\, \mathfrak{g}_2^\circ(\mathfrak{p}^\circ(K)) = \sum_{L:\ L \in \mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K})} \mathrm{mes}_\nu\, \mathfrak{g}_2^\circ(L) = \\
&\quad = \mathrm{vol}^3_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{K})} \mathfrak{g}_2 = \mathrm{vol}^2 \mathfrak{g}_2 = \mathrm{vol}^1(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}).
\end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

Для произвольного кусочно-аффинного отображения $\mathfrak{f}$, образ которого лежит в выбранном пространстве J, определим его объём по формуле

$$\mathrm{vol}^0 \mathfrak{f} := \mathrm{vol}^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}),$$

где $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$ — некоторое разложение в композицию кусочно-аффинного не вырождающего отрезки отображения $\mathfrak{g}$ и PA-контракции $\mathfrak{h}$.

Определим для многогранника-следа $\mathfrak{A}$, образ которого лежит в выбранном пространстве J, его объём $\mathrm{vol}\, \mathfrak{A}$ по формуле

$$\mathrm{vol}\, \mathfrak{A} = \mathrm{vol}^0 \mathfrak{f},$$

где $\mathfrak{f}$ — некоторый представитель из $\mathfrak{A}$. Независимость от представителя очевидна. В самом деле, если $\mathfrak{p}$ — PA-контракция и $\mathfrak{f}$ — PA-отображение, разложенное по теореме 30 в композицию $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$ некоторого PA-отображения $\mathfrak{g}$ и PA-контракции $\mathfrak{h}$, то

$$\operatorname{vol}^0 \mathfrak{f} = \operatorname{vol}^0(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}) = \operatorname{vol}^2 \mathfrak{g} = \operatorname{vol}^0(\mathfrak{g} \circ (\mathfrak{h} \circ \mathfrak{p})) = \operatorname{vol}^0(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{p}).$$

35. Описание. Пусть $\iota \in \mathbb{N}$, $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{K}$ — полный симплициальный комплекс, $\mathfrak{m}$ — отображение, C^ι-ровное относительно $\mathbf{K}$ и определённое на $[\alpha, \beta] \times {}^\cup\mathbf{K}$, $\mu = \dim {}^\cup\mathbf{K}$, $\mathbf{a} = \langle v_0^K, \ldots, v_\mu^K \rangle$ — набор некоторым образом перенумерованных всех вершинных точек некоторого симплекса K комплекса $\mathbf{K}$ (таким образом, размерность симплекса K равна μ) и

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau)_{\varkappa\lambda} = \left\langle \overrightarrow{\mathfrak{m}(\tau, v_0^K)\mathfrak{m}(\tau, v_\varkappa^K)}, \overrightarrow{\mathfrak{m}(\tau, v_0^K)\mathfrak{m}(\tau, v_\lambda^K)} \right\rangle$$

при $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, \mu$. Определим функции $\mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau)$ и $\mathfrak{q}_K(\tau)$ следующим образом:

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau) = (\mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau)_{\sigma\tau})_{\sigma,\tau=1}^{\sigma,\tau=\mu} = \operatorname{Gram}\left(\overrightarrow{\mathfrak{m}(\tau, v_0^K)\mathfrak{m}(\tau, v_1^K)}, \ldots, \overrightarrow{\mathfrak{m}(\tau, v_0^K)\mathfrak{m}(\tau, v_\mu^K)}\right);$$

$$\mathfrak{q}_K(\tau) = \frac{\sqrt{\det \mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau)}}{\mu!} = \operatorname{mes}_\mu \mathfrak{m}(\tau, \cdot)^\circ(K).$$

Здесь через $\operatorname{Gram}(v_1, \ldots, v_\rho)$ обозначена матрица Грама векторов $v_1, \ldots, v_\rho$.

36. Утверждение. *Если $\mathfrak{m}$ — C^0- (или аналитически) ровное относительно комплекса $\mathbf{K}$ семейство кусочно-аффинных отображений и у каждого μ-мерного ($\mu = \dim {}^\cup\mathbf{K}$) симплекса K выбрана некоторая нумерация его вершин $\mathbf{a}$, то определённая выше функция $\mathfrak{q}_K$ и функция $\mathfrak{p}$, определённая как*

$$\mathfrak{p}(\tau) = \sum_{\substack{K\colon K \in \mathbf{K} \\ \dim K = \mu}} \mathfrak{q}_K(\tau),$$

обладают следующими свойствами:

а) $\mathfrak{p}(\tau) \neq 0$ *при* $\tau \in (\alpha, \beta)$;

б) *функция* $\mathfrak{p}$ *является непрерывной* (*или* C^1*-гладкой*) *на* $[\alpha, \beta]$, *где на концах отрезка* $[\alpha, \beta]$ *подразумевается соответствующая односторонняя производная*;

в) *при аналитичности производная в каждой точке* τ, *где* $\mathfrak{q}_K(\tau) \neq 0$ *у всех* μ*-мерных симплексов* K *комплекса* $\mathbf{K}$, *вычисляется по формуле*

$$\dot{\mathfrak{p}}(\tau) = \frac{1}{\mu!} \sum_{\substack{K\colon K \in \mathbf{K} \\ \dim K = \mu}} \frac{\operatorname{tr}(\mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau)^* \dot{\mathfrak{g}}_{\mathbf{a}}(\tau))}{2\sqrt{\det \mathfrak{g}_{\mathbf{a}}(\tau)}},$$

где символ * *означает переход к транспонированной матрице алгебраических дополнений*;

г) *если* $\mathfrak{m}$ *аналитична, справедливо условие* $\mathfrak{q}_K(\alpha)=0$, *задана нумерация* $\mathbf{a}_0=\langle v_0^K,\dots,v_\mu^K\rangle$ *вершинных точек симплекса* K, *такая что* $\mathfrak{m}(\alpha,v_0^K)=$ $=\mathfrak{m}(\alpha,v_1^K)$, *и векторы* $\overrightarrow{\mathfrak{m}(\tau,v_0^K)\mathfrak{m}(\tau,v_\zeta^K)}$ *обозначены* $\mathfrak{c}_\zeta(\tau)$, *производная вычисляется по формуле*

$$\dot{\mathfrak{q}}_K(\alpha)=\frac{1}{\mu!}\sqrt{\det\operatorname{Gram}(\dot{c}_1(\alpha),c_2(\alpha),\dots,c_\mu(\alpha))}.$$

Доказательство. Пункт а) очевиден (см. описание 35).

Пункт в) следует из известной формулы для производной определителя.

Докажем пункт г). Ясно, что производная вычисляется по следующей формуле (здесь «$\varepsilon\searrow 0$» обозначает стремление к нулю справа):

$$\dot{\mathfrak{q}}_K(\alpha)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon\cdot\mu!}\sqrt{\det\operatorname{Gram}(\mathfrak{c}_1(\alpha+\varepsilon),\dots,\mathfrak{c}_\mu(\alpha+\varepsilon))}=$$
$$=\frac{1}{\mu!}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\det\operatorname{Gram}(\mathfrak{c}_1(\alpha+\varepsilon),\dots,\mathfrak{c}_\mu(\alpha+\varepsilon))}=$$
$$=\frac{1}{\mu!}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\det{}^{1/2}\begin{pmatrix}\varepsilon^2\langle\mathfrak{s}(\varepsilon),\mathfrak{s}(\varepsilon)\rangle & \varepsilon\langle\mathfrak{s}(\varepsilon),\mathfrak{d}_2(\varepsilon)\rangle & \dots & \varepsilon\langle\mathfrak{s}(\varepsilon),\mathfrak{d}_\mu(\varepsilon)\rangle\\ \varepsilon\langle\mathfrak{d}_2(\varepsilon),\mathfrak{s}(\varepsilon)\rangle & \langle\mathfrak{d}_2(\varepsilon),\mathfrak{d}_2(\varepsilon)\rangle & \dots & \langle\mathfrak{d}_2(\varepsilon),\mathfrak{d}_\mu(\varepsilon)\rangle\\ \vdots & & & \vdots\\ \varepsilon\langle\mathfrak{d}_\mu(\varepsilon),\mathfrak{s}(\varepsilon)\rangle & \langle\mathfrak{d}_\mu(\varepsilon),\mathfrak{d}_2(\varepsilon)\rangle & \dots & \langle\mathfrak{d}_\mu(\varepsilon),\mathfrak{d}_\mu(\varepsilon)\rangle\end{pmatrix}$$

при $\varepsilon\searrow 0$. В формуле используются обозначения $\mathfrak{s}(\varepsilon)=\dot{\mathfrak{c}}_1(\alpha)+o(1)$ (при $\varepsilon\searrow 0$), $\mathfrak{d}_\iota(\varepsilon)=\mathfrak{c}_\iota(\alpha+\varepsilon)$, где $\iota=2,\dots,\mu$. В завершение заметим, что по свойству определителя число ε сокращается.

Рассмотрим случай б). Разложим функцию $\det\mathfrak{g}_K(\cdot)$ в ряд Тейлора:

$$\det\mathfrak{g}_K(\tau)=\sum_{\iota:\ \iota\in\mathbb{N}}\frac{1}{\iota!}\sigma_\iota(\tau-\alpha)^\iota,\quad \tau\in[\alpha,\beta].$$

Ясно, что $\sigma_0=0$. Из пункта г) следует, что $\sigma_1=0$. Рассмотрим два случая:

$$\tau>\alpha:\quad \dot{\sqrt{\det\mathfrak{g}_K}}(\tau)=\frac{\frac{1}{1!}\sigma_2(\tau-\alpha)+\frac{1}{2!}\sigma_3(\tau-\alpha)^2+\dots}{2\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2(\tau-\alpha)^2+\frac{1}{3!}\sigma_3(\tau-\alpha)^3+\dots}};$$

$$\tau=\alpha:\quad \dot{\sqrt{\det\mathfrak{g}_K}}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2\varepsilon^2+\frac{1}{3!}\sigma_3\varepsilon^3+\dots}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2+\frac{1}{3!}\sigma_3\varepsilon+\dots}=\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}},$$

затем ещё два случая: $\sigma_2\neq 0$ и $\sigma_2=0$. При $\sigma_2\neq 0$

$$\lim_{\tau\searrow\alpha}\dot{\sqrt{\det\mathfrak{g}_K}}(\tau)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\frac{1}{1!}\sigma_2\varepsilon+\frac{1}{2!}\sigma_3\varepsilon^2+\dots}{2\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2\varepsilon^2+\frac{1}{3!}\sigma_3\varepsilon^3+\dots}}=\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}=\dot{\sqrt{\det\mathfrak{g}_K}}(\alpha).$$

При $\sigma_2 = 0$ найдётся такое $\varkappa$, что $\mathbb{N} \ni \varkappa \geqslant 3$, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_{\varkappa-1} = 0$, $\sigma_\varkappa \neq 0$. Тогда

$$\lim_{\tau \searrow \alpha} \sqrt{\det \dot{\mathfrak{g}}_K}(\tau) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\frac{1}{(\varkappa-1)!}\sigma_\varkappa \varepsilon^{\varkappa-1} + \frac{1}{\varkappa!}\sigma_{\varkappa+1}\varepsilon^{\varkappa} + \ldots}{2\sqrt{\frac{1}{\varkappa!}\sigma_\varkappa \varepsilon^{\varkappa} + \frac{1}{(\varkappa+1)!}\sigma_{\varkappa+1}\varepsilon^{\varkappa+1} + \ldots}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\sqrt{\varkappa!}}{(\varkappa-1)!}\sqrt{\sigma_\varkappa}\varepsilon^{\frac{\varkappa-2}{2}} = 0 = \sqrt{\frac{\sigma_2}{2}} = \sqrt{\det \dot{\mathfrak{g}}_K}(\alpha).$$

Утверждение доказано. □

37. Утверждение. *Для левого C^ι- (или аналитически) однородного относительно симплициального комплекса $\mathbf{K}$ отображения $\mathfrak{m}$, действующего на $[\alpha, \beta] \times {}^\cup\mathbf{K}$, найдутся некоторое центральное подразделение $\mathbf{L}$ комплекса $\mathbf{K}$, контракция $\mathfrak{h}$, симплициальная относительно $\mathbf{L}$, и C^ι-ровное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$ отображение $\tilde{\mathfrak{m}}$, действующее на $[\alpha, \beta] \times \mathfrak{h}^\circ({}^\cup\mathbf{L})$, со свойством $\mathfrak{m}(\tau, x) = \tilde{\mathfrak{m}}(\tau, \mathfrak{h}(x))$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$ и $x \in {}^\cup\mathbf{K}$.*

Доказательство. Проведём рассмотрение в несколько шагов.

1. Для $\mathfrak{m}$ найдётся отображение $\mathfrak{r}$, симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, переводящее его на комплекс $\mathfrak{m}(\alpha, \cdot)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$, причём $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{m}(\beta, \cdot) = \mathfrak{m}(\alpha, \cdot)$.

В самом деле, возьмём точки x' и x'', такие что $\mathfrak{m}(\beta, x') = \mathfrak{m}(\beta, x'')$. Тогда в комплексе $\mathbf{K}$ найдутся два симплекса K' и K'', такие что $x' \in K'$ и $x'' \in K''$. Ясно, что

$$\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^\circ(K') \ni \mathfrak{m}(\beta, x') = \mathfrak{m}(\beta, x'') \in \mathfrak{m}(\beta, \cdot)^\circ(K'').$$

Следовательно,

$$\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^\circ(K') \cap \mathfrak{m}(\beta, \cdot)^\circ(K'') \neq \varnothing.$$

По причине попарной дизъюнктности симплексов комплекса эти два образных симплекса совпадают. Из условия одинаковой склейки при $\tau \in (\alpha, \beta]$ следует, что $\mathfrak{m}(\tau, \cdot)^\circ(K') = \mathfrak{m}(\tau, \cdot)^\circ(K'')$. По непрерывности $\mathfrak{m}(\alpha, \cdot)^\circ(K') = \mathfrak{m}(\alpha, \cdot)^\circ(K'')$. Из координатного представления кусочно-аффинной функции следует, что $\mathfrak{m}(\alpha, x') = \mathfrak{m}(\alpha, x'')$.

Далее построим отображение $\mathfrak{r}$. Возьмём точку $y \in \operatorname{im} \mathfrak{m}(\beta, \cdot)$. Тогда в комплексе $\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}\mathbf{K})$ найдётся единственный симплекс L, содержащий точку y. Заметим, что в комплексе $\mathbf{K}$ найдётся симплекс K со свойствами $\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^\circ(K) = L$ и $\dim K = \dim L$. Определим точку $x_{y,K} := (\mathfrak{m}(\beta, \cdot)|_K)^{-1}(y)$. Установим, что $\mathfrak{m}(\alpha, x_{y,K})$ не зависит от симплекса K. Действительно, при ином симплексе K' имеем $\mathfrak{m}(\beta, x_{y,K'}) = \mathfrak{m}(\beta, x_{y,K})$, и по установленному ранее $\mathfrak{m}(\alpha, x_{y,K'}) = \mathfrak{m}(\alpha, x_{y,K})$. Итак, корректно определяется значение $\mathfrak{r}(y) := \mathfrak{m}(\alpha, x_{y,K})$.

Установим симплициальность отображения $\mathfrak{r}$. Возьмём симплекс L в комплексе $\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$. Тогда в комплексе $\mathbf{K}$ найдётся симплекс K со свойствами $\mathfrak{m}(\beta, \cdot)^\circ(K) = L$ и $\dim K = \dim L$. Ясно, что симплекс $\mathfrak{m}(\alpha, \cdot)^\circ(K)$ является $\mathfrak{r}$-образом симплекса L.

Установим справедливость формулы композиции. Имеем $\mathfrak{r}(\mathfrak{m}(\beta,u)) = \mathfrak{m}(\alpha, x_{\mathfrak{m}(\beta,u),K})$ для некоторого K. Тогда $\mathfrak{m}(\beta,u) = \mathfrak{m}(\beta, x_{\mathfrak{m}(\beta,u),K})$, что влечёт $\mathfrak{m}(\alpha,u) = \mathfrak{m}(\alpha, x_{\mathfrak{m}(\beta,u),K}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{m}(\beta,u))$.

Итак, пункт 1 доказан.

2. Возьмём некоторое центральное подразделение $\mathbf{L}''$ в комплексе $\mathfrak{m}(\alpha,\cdot)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$. По описанию 29 построим некоторый доцентрованный прообраз $\mathbf{L}'$ комплекса $\mathbf{L}''$ относительно отображения $\mathfrak{r}$ и комплекса $\mathfrak{m}(\beta,\cdot)^{\circ\circ}(\mathbf{K})$. Затем по тому же описанию построим некоторый доцентрованный прообраз $\mathbf{L}$ комплекса $\mathbf{L}'$ относительно отображения $\mathfrak{m}(\beta,\cdot)$ и комплекса $\mathbf{K}$.

3. Установим, что $\mathfrak{m}(\alpha,\cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{L}$. Возьмём симплекс L комплекса $\mathbf{L}$. Тогда $\mathfrak{m}(\alpha,\cdot)^{\circ}(L) = \mathfrak{r}^{\circ}(\mathfrak{m}(\beta,\cdot)^{\circ}(L)) = \mathfrak{r}^{\circ}(L') = L'' \in \mathbf{L}''$ по построению 2.

4. Произведём разложение по теореме 30 отображения $\mathfrak{m}(\beta,\cdot)$: $\mathfrak{m}(\beta,\cdot) = \mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — контракция, симплициальная относительно комплекса $\mathbf{L}$, и $\mathfrak{g}$ — не вырождающее отрезки отображение, симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$.

5. Установим, что $\mathfrak{m}(\tau,\cdot) = \tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)\circ\mathfrak{h}$ при $\tau\in[\alpha,\beta]$, где $\mathfrak{h}$ — отображение из пункта 4 и $\tilde{\mathfrak{m}}(\cdot,\cdot)$ — C^1-ровное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$ отображение.

Действительно, в доказательстве теоремы 30 построение разложения основано на факте вырождения рёбер отображением, которое мы разлагаем, — в нашем случае это отображения $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$. Заметим, что из определения 31 следует, что если ребро комплекса $\mathbf{K}$ вырождено отображением $\mathfrak{m}(\beta,\cdot)$, то оно же вырождено отображением $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$ при $\tau\in[\alpha,\beta]$.

Итак, при $\alpha<\tau$ можно в построении контракции строить одну и ту же функцию $\mathfrak{h}$, а не вырождающая отрезки функция $\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)$ повершинно соответствует функции $\mathfrak{g}$ и симплициальна относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$. Если же $\tau=\alpha$, то также можно провести построение функции $\mathfrak{h}$, но функция $\tilde{\mathfrak{m}}(\alpha,\cdot)$ уже может вырождать отрезки, однако же симплициальна относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{L}) =: \mathbf{M}$.

Итак, пункт 5 доказан.

6. Этот пункт касается C^{ι}-гладкости и аналитичности. $\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)$-образы вершинных точек в комплексе $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{L})$ являются аффинными суммами $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$-образов соответствующих вершинных точек в комплексе $\mathbf{K}$ с постоянными коэффициентами. Следовательно, гладкость и аналитичность сохраняются. □

Деформацию $\mathfrak{n}$ конечного C^{ι}- (или аналитического) типа многогранников-следов, образы которых лежат в выбранном пространстве J, с параметром $\tau\in[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ назовём C^{ι}- (или аналитически) *простой* при условии, что размерность образа $\mathfrak{n}_{\tau}$ не зависит от $\tau\in[\alpha,\beta]$.

Утверждение.

1. *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *кусочно* C^0- (*или аналитически*) *однородное относительно комплекса* $\mathbf{K}$ *отображение, определённое на* $[\alpha,\beta]\times{}^{\cup}\mathbf{K}$*, причём* $\mu := \dim\operatorname{im}\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$ *не зависит от* $\tau\in[\alpha,\beta]$*. Тогда функция* $\mathfrak{p}(\tau) =$

$=\operatorname{vol}^0 \mathfrak{m}(\tau,\cdot)$, $\tau\in[\alpha,\beta]$, *непрерывна, а при аналитичности* $\mathfrak{m}$ *она является кусочно-*C^1*-гладкой.*

2. *Пусть* $\mathfrak{n}$ — C^0*- (или аналитически) простая деформация многогранников-следов. Тогда функция* $\mathfrak{p}$*, действующая по формуле* $\mathfrak{p}(\tau)=\operatorname{vol}\mathfrak{n}_\tau$*,* $\tau\in[\alpha,\beta]$*, непрерывна, а при аналитичности* $\mathfrak{m}$ *она является кусочно-*C^1*-гладкой.*

Доказательство. Второе утверждение очевидным образом следует из первого.

Докажем первое утверждение. В доказательстве можно считать, что $\mathfrak{m}$ — левое C^ι- (или аналитически) однородное отображение. Рассмотрим разложение $\mathfrak{m}(\tau,x)=\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\mathfrak{h}(x))$ и другие объекты из утверждения 37.

Рассмотрим функцию объёма

$$\mathfrak{p}(\tau)=\operatorname{vol}^0\mathfrak{m}(\tau,\cdot)=\operatorname{vol}^0\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)$$

для $\tau\in[\alpha,\beta]$. Последний объём опишем подробнее: если $\tau>\alpha$, то

$$\operatorname{vol}^0\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)=\operatorname{vol}^2\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)=\sum_{M\colon M\in\mathbf{M}}\operatorname{mes}_\mu(\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot))^\circ(M).$$

Ещё рассмотрим функцию

$$\hat{\mathfrak{p}}(\tau):=\sum_{M\colon M\in\mathbf{M}}\operatorname{mes}_\mu(\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot))^\circ(M)$$

при $\tau\in[\alpha,\beta]$. Из утверждения 36 следует, что функция $\hat{\mathfrak{p}}$ непрерывная (соответственно C^1-гладкая) на $[\alpha,\beta]$.

Покажем, что $\mathfrak{p}=\hat{\mathfrak{p}}$. При $\tau>\alpha$ это уже указано. Осталось показать, что $\mathfrak{p}(\alpha)=\hat{\mathfrak{p}}(\alpha)$. Построим по описанию 29 доцентрованный прообраз $\mathbf{N}$ некоторого центрального подразделения комплекса $\tilde{\mathfrak{m}}(\alpha,\cdot)^{\circ\circ}(\mathbf{M})$ относительно отображения $\tilde{\mathfrak{m}}(\alpha,\cdot)$ и комплекса $\mathbf{M}$. Рассмотрим объём отображения $\tilde{\mathfrak{m}}(\alpha,\cdot)$. По теореме 30 возьмём разложение отображения $\tilde{\mathfrak{m}}(\alpha,\cdot)=\mathfrak{q}\circ\mathfrak{r}$ относительно комплекса $\mathbf{N}$. Объём вычисляется по формуле

$$\mathfrak{p}(\alpha)=\operatorname{vol}^0\tilde{\mathfrak{m}}(\alpha,\cdot)=\operatorname{vol}^0\mathfrak{q}=\sum_{T\colon T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathbf{N})}\operatorname{mes}_\mu\mathfrak{q}^\circ(T).$$

Заметим, что $\hat{\mathfrak{p}}(\alpha)=\operatorname{vol}^0\mathfrak{q}$. Действительно, запишем следующие равенства:

$$\hat{\mathfrak{p}}(\alpha)=\sum_{N\colon N\in\mathbf{N}}\operatorname{mes}_\mu(\mathfrak{m}'(\alpha,\cdot))^\circ(N)=\sum_{T\colon T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathbf{N})}\left(\sum_{\substack{N\colon N\in\mathbf{N}\\ \mathfrak{r}^\circ(N)=T}}\operatorname{mes}_\mu(\mathfrak{q}\circ\mathfrak{r})^\circ(N)\right)=$$

$$=\sum_{T\colon T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathbf{N})}\left(\sum_{\substack{N\colon N\in\mathbf{N}\\ \mathfrak{r}^\circ(N)=T}}\operatorname{mes}_\mu\mathfrak{q}^\circ(T)\right)=$$

$$=\sum_{T\colon T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathbf{N})}(\operatorname{mes}_\mu\mathfrak{q}^\circ(T))\operatorname{card}\{N\colon N\in\mathbf{N},\ \mathfrak{r}^\circ(N)=T\}.$$

Убедимся, что если в последней сумме $\operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T) > 0$, то

$$\operatorname{card}\{N\colon N \in \mathbf{N},\ \mathfrak{r}^\circ(N) = T\} = 1.$$

Действительно, μ-объём больше нуля только у симплексов T размерности μ. А размерность тела комплекса $\mathbf{N}$ совпадает с размерностью тела комплекса $\mathbf{M}$, в свою очередь совпадающей с размерностью образа отображения $\mathfrak{m}(\beta, \cdot)$, равной тому же числу μ. Следовательно, по утверждению 19 число $\mathfrak{r}$-прообразных симплексу T симплексов N равно единице. Таким образом,

$$\hat{\mathfrak{p}}(\alpha) = \sum_{T\colon T \in \mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathbf{N})} \operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T) = \operatorname{vol}^0 \mathfrak{q}.$$

Утверждение доказано. □

Экстремальность

Скажем, что для PA-отображения $\mathfrak{a}$ множество $F \subset \operatorname{dom}\mathfrak{a}$ есть его *граница*, если для некоторого (а значит, и для всякого) его разложения $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ в композицию PA-отображения $\mathfrak{b}$, не вырождающего отрезки, и PA-контракции $\mathfrak{c}$ и произвольного PA-гомеоморфизма $\mathfrak{d}$, такого что $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{d} = \mathfrak{b}$, верно, что $\mathfrak{c}^\circ(F) = (\mathfrak{d} \circ \mathfrak{c})^\circ(F)$ и $(\mathfrak{c}^{-1} \circ \mathfrak{c})^\circ(F) = F$.

Скажем, что PA-отображение $\mathfrak{a}$ с границей F *локально минимально*, если для всякого левого аналитически однородного относительно некоторого комплекса и отрезка $[0, 1]$ отображения $\mathfrak{m}$, такого что

1) $\mathfrak{m}(0, \cdot) = \mathfrak{a}$,
2) $\mathfrak{m}(\cdot, z) = \mathrm{const}$ при $z \in F$,
3) F является границей в $\operatorname{dom}\mathfrak{m}(\tau, \cdot)$ при $\tau \in [0, 1]$,
4) число $\dim \operatorname{im} \mathfrak{m}(\tau, \cdot)$ постоянно,

верно, что

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0+} \operatorname{vol}^0 \mathfrak{m}(\tau, \cdot) \geqslant 0.$$

Скажем, что два PA-отображения $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ с границами соответственно F' и F'' *эквивалентны*, если найдутся их общий редукт $\mathfrak{b}$ и PA-контракции $\mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{c}''$, такие что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}''$ и $\mathfrak{c}'^\circ(F') = \mathfrak{c}''^\circ(F'')$. Нетрудно видеть, что это на самом деле эквивалентность.

Назовём эквивалентные классы PA-отображений с границей *многогранниками-следами с границей*.

Скажем, что многогранник-след с границей *локально минимален*, если таков всякий представитель его класса эквивалентности.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение (аналог принципов Плато). *Пусть* $\dim J = 3$, $\mathfrak{A}$ — *локально минимальный многогранник-след с границей,* $\langle \mathfrak{a}, F\rangle \in \mathfrak{A}$, *множество* $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ *не имеет точек размерности* 1 *и в каждой точке из* $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ *отображение* $\mathfrak{a}$ *локально* *инъективно. Тогда для каждой точки* $x \in \operatorname{dom}\mathfrak{a} \setminus F$ *найдётся открытое в* $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ *множество* $U \ni x$ *с одним из следующих свойств*:

1) U *гомеоморфно* $\mathbb{R}^2$ *и* $\mathfrak{a}|_U$ *аффинно*;
2) *найдётся симплициальный комплекс* $\mathbf{K}$, *такой что*
   - $^\cup\mathbf{K} = U$;
   - $\mathbf{K} = \{S_1, S_2, S_3, A\}$, *где* S_ι — *двумерный симплекс,* A — *ребро в каждом из* S_1, S_2, S_3;
   - $\mathfrak{a}|_{S_\iota}$ *аффинно,* $\iota = 1, 2, 3$;
   - *двугранный угол между* $\mathfrak{a}^\circ(S_\alpha)$ *и* $\mathfrak{a}^\circ(S_\beta)$ *равен* 120° *при* $\alpha \neq \beta$;
3) *найдётся симплициальный комплекс* $\mathbf{K}$, *такой что*
   - $^\cup\mathbf{K} = U$;
   - $\mathbf{K} = \{S_{12} = S_{21}, S_{23} = S_{32}, S_{31} = S_{13}, S_{14} = S_{41}, S_{24} = S_{42}, S_{34} = S_{43}, A_1, A_2, A_3, A_4, P\}$, *где* $S_{\alpha\beta}$ — *двумерный симплекс, имеющий гранями* A_α, A_β *и* P, *и* A_ι — *ребро с вершиной* P;
   - $\mathfrak{a}|_{S_{\alpha\beta}}$ *аффинно при* $\alpha \neq \beta$;
   - *двугранный угол между* $\mathfrak{a}^\circ(S_{\alpha\beta})$ *и* $\mathfrak{a}^\circ(S_{\beta\gamma})$ *один и тот же при* $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Мы надеемся, что техника, развитая в данной статье, позволит описать строение в малом локально минимальных многогранных структур в многомерных случаях.

Литература

[1] Гусев Н. С. Кусочно-аффинные погружения многоугольников и их границы // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (2—6 февраля 2004 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — С. 390—392.

[2] Дао Чонг Тхи. Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1031—1065.

[3] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 2. — С. 53—115.

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. Погружённые многоугольники и их диагональные триангуляции. — В печати.

[6] Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. — М.: Мир, 1974.

[7] Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии. — М.: Наука, 1982.

[8] Фоменко А. Т. Топологические вариационные задачи. — Изд-во Моск. ун-та, 1984.

[9] Almgren F. J. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of topological type and singularity structure // Ann. Math. (2). — 1968. — Vol. 87, no. 2. — P. 321—391.

[10] Du D. Z., Hwang F. K. A proof of Gilbert–Pollak conjecture on the Steiner ratio // Algorithmica. — 1992. — Vol. 7. — P. 121—135.

[11] Federer H., Fleming W. H. Normal and integral currents // Ann. Math. — 1960. — Vol. 72. — P. 458—520.

[12] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — Vol. 16, no. 1. — P. 1—29.

[13] Reifenberg E. R. Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type // Acta Math. — 1960. — Vol. 104. — P. 1—92.