

# Фазовая топология первого класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле

Д. Б. ЗОТЬЕВ

Волгоградский государственный  
технический университет  
e-mail: zotev@inbox.ru

УДК 513.83+513.38

**Ключевые слова:** волчок Ковалевской, первый класс Аппельрота, фазовая топология, инварианты Фоменко—Цишанга.

## Аннотация

Рассматривается интегрируемый случай, обобщающий первый класс Аппельрота движений волчка Ковалевской в магнитном поле. Его фазовая топология изучается с помощью инвариантов Фоменко—Цишанга. Предлагается подход к вычислению меток в ситуации, когда не может быть применён метод Болсинова.

## Abstract

*D. B. Zotev, Phase topology of Appelrot class I of Kowalewski top in a magnetic field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 95—128.*

We consider an integrable case generalizing the Appelrot class I of Kowalewski top in a magnetic field. Its phase topology is investigated by means of Fomenko—Zieschang invariants. The offered method of approach to the calculation of marks completes Bolsinov's method in the situation when it is not usable.

## 1. Введение

Пусть  $\text{sgrad } H$  — интегрируемая гамильтонова система на симплектическом многообразии  $M^4$ . Рассмотрим компактное неособое подмногообразие

$$Q_h^3 = H^{-1}(h),$$

расслоённое на торы Лиувилля. Каждый тор  $T^2 \subset Q_h^3$  является компонентой  $f^{-1}(\varphi)$  для некоторого регулярного значения  $\varphi \in f(Q_h^3)$ , где  $f$  — дополнительный интеграл на  $Q_h^3$ . Как обычно, предположим, что  $f$  — функция Ботта [3, 4]. Критическим значениям  $f_c$  отвечают бифуркации слоения Лиувилля (атомы). Атом можно рассматривать как связную компоненту малой трубчатой окрестности особого слоя  $f^{-1}(f_c)$ , расслоённую поверхностями уровня  $f$ . Границы атомов состоят из торов. Топология слоения Лиувилля на  $Q_h^3$  и топологический тип  $Q_h^3$  определяются инвариантом Фоменко—Цишанга  $W^*(Q_h^3)$ , называемым также меченой молекулой [3]. Гомотопии вдоль траекторий  $\text{grad } f$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2006, том 12, № 1, с. 95—128.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

(*склеивающие гомотопии*) порождают диффеоморфизмы граничных торов, определяющие склейку  $Q_h^3$  из атомов. Атомные связи, т. е. ребра молекулы, соответствуют склеивающим гомотопиям. Их топологические типы определяются числовыми метками молекулы. Глубокий и эффективный метод круговых молекул, созданный А. В. Болсиновым для вычисления меток, основан на использовании особых точек бифуркационной диаграммы [2]. На эти точки проектируются невырожденные нульмерные и вырожденные одномерные орбиты пуассонова действия группы  $\mathbb{R}^2$ . В представленном случае имеется только две особые точки (обе седлового типа), и метод круговых молекул применить невозможно. Поэтому для вычисления меток были непосредственно сконструированы склеивающие гомотопии. Для этого оказалось достаточным явно описать склеивающие гомотопии (вдоль траекторий  $\text{grad } H$ ) на одном фиксированном уровне интеграла  $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . Затем с использованием наглядных геометрических свойств бифуркационной диаграммы были сконструированы склеивающие гомотопии (вдоль траекторий  $\text{grad } f$ ) на каждом регулярном уровне  $H = h$ . Заметим, что уровень  $f = \text{const}$  можно выбрать так, чтобы упростить вычисления. Статья содержит нетривиальный пример вычисления меток в ситуации, когда метод круговых молекул применить невозможно. В динамике твёрдого тела существует простой и эффективный топологический метод, использующий проекцию на сферу Пуассона [5]. Однако в представленном случае данный метод бесполезен, поскольку потенциальная энергия задана на расслоении касательных окружностей к сфере Пуассона (т. е. на  $\mathbb{R}P^3$ ). По-видимому, это первая задача динамики твёрдого тела, в которой инвариант  $W^*(Q_h^3)$  оказался *единственным* инструментом топологического анализа.

Статья посвящена случаю Богоявленского, обобщающему первый класс Аппельрота особо замечательных движений волчка Ковалевской [5]. В разделе 2 сформулирована исходная задача. В разделе 3 введены специальные локальные координаты на  $M^4$  и найдены критические значения энергии  $H$ . В разделе 4 вычислены критические подмногообразия (окружности) дополнительного интеграла  $f$ , ограниченного на  $Q_h^3$ , а также бифуркационная диаграмма отображения момента  $(H, f): M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Доказано, что интеграл  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$  является функцией Ботта. В разделе 5 исследовано слоение на торы некомпактного трёхмерного многообразия  $f = 0$ , порождаемое боттовской функцией  $H$ . Описаны склеивающие гомотопии и найдены матрицы склейки. В разделе 6 для каждого регулярного  $h$  сконструированы склеивающие гомотопии на  $Q_h^3$ , найдены соответствующие матрицы склейки и вычислены инварианты Фоменко—Цишанга  $W^*(Q_h^3)$ . В разделе 7 описаны топологические типы всех регулярных  $Q_h^3$ , а также  $M^4$ . Доказано, что данная система является нерезонансной. Указаны все топологические эквивалентности с другими задачами динамики твёрдого тела.

Я глубоко признателен академику А. Т. Фоменко за постановку данной задачи и внимание к моей работе, профессору А. В. Болсинову за бесконечное множество критических замечаний, советы и всестороннюю поддержку.

## 2. Случай Богоявленского

### 2.1. Волчок Ковалевской в магнитном поле

Рассмотрим твёрдое тело с неподвижной точкой в двух однородных, стационарных силовых полях, например в гравитационном и магнитном [1]. В подвижной системе отсчёта динамику тела определяют следующие уравнения Эйлера—Пуассона:

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{M}, \vec{\omega}] + mg[\vec{r}, \vec{\gamma}] + B[\vec{d}, \vec{\delta}], \quad \dot{\vec{\gamma}} = [\vec{\gamma}, \vec{\omega}], \quad \dot{\vec{\delta}} = [\vec{\delta}, \vec{\omega}], \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса,  $\vec{M}$  — кинетический момент,  $\vec{\omega}$  — угловая скорость,  $I_1, I_2, I_3$  — главные моменты инерции ( $M_i = I_i \omega_i$ ),  $\vec{r}$  — радиус-вектор центра масс ( $\vec{r} = \text{const}$ ),  $g\vec{\gamma}$  — вектор гравитационного поля,  $B\vec{\delta}$  — вектор магнитного поля,  $\vec{d}$  — магнитный момент тела ( $\vec{d} = \text{const}$ ). Одно из силовых полей можно считать электростатическим, тогда  $B\vec{\delta}$  — напряжённость поля, а  $\vec{d}$  — дипольный момент тела. Подвижность зарядов противоречит условию  $\vec{d} = \text{const}$ , однако такое тело можно сконструировать из заряженных шариков, скреплённых диэлектрическими стержнями.

Система (2.1) имеет геометрические интегралы

$$J_1 = (\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1, \quad J_2 = (\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = c, \quad J_3 = (\vec{\delta}, \vec{\delta}) = 1$$

и интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\vec{M}, \vec{\omega}) - mg(\vec{r}, \vec{\gamma}) - B(\vec{d}, \vec{\delta}).$$

Предположим, в дополнение к условиям Ковалевской, что вектор  $\vec{d}$  ортогонален  $\vec{r}$  и параллелен экваториальной плоскости эллипсоида инерции, т. е.

$$I_1 = I_2 = 2I_3, \quad \vec{r} = (r_1, 0, 0), \quad \vec{d} = (0, d_2, 0).$$

При таких условиях система имеет интеграл  $Z = z_1^2 + z_2^2$  [1], где

$$z_1 = M_1^2 - M_2^2 + 4I_3 mgr_1 \gamma_1 - 4I_3 B d_2 \delta_2,$$

$$z_2 = 2M_1 M_2 + 4I_3 mgr_1 \gamma_2 + 4I_3 B d_2 \delta_2.$$

Это обобщение интеграла Ковалевской. Введём обозначения

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{c_1} \cdot \gamma_i, \quad \eta_i = \sqrt{c_3} \cdot \delta_i \quad (1 \leq i \leq 3), \quad I = I_3, \\ c_1 &= (4I_3 mgr_1)^2, \quad c_3 = (4I_3 B d_2)^2, \quad c_2 = (4I_3)^2 mgr_1 B d_2 c. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда система (2.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= \frac{1}{4I}(2M_2 M_3 + \eta_3), \quad \dot{M}_2 = -\frac{1}{4I}(2M_1 M_3 + \xi_3), \quad \dot{M}_3 = \frac{1}{4I}(\xi_2 - \eta_1), \\ \dot{\xi}_1 &= \frac{1}{2I}(2M_3 \xi_2 - M_2 \xi_3), \quad \dot{\xi}_2 = \frac{1}{2I}(M_1 \xi_3 - 2M_3 \xi_1), \quad \dot{\xi}_3 = \frac{1}{2I}(M_2 \xi_1 - M_1 \xi_2), \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{1}{2I}(2M_3 \eta_2 - M_2 \eta_3), \quad \dot{\eta}_2 = \frac{1}{2I}(M_1 \eta_3 - 2M_3 \eta_1), \quad \dot{\eta}_3 = \frac{1}{2I}(M_2 \eta_1 - M_1 \eta_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теперь интегралы  $H$  и  $Z$  выглядят так:

$$H = \frac{1}{4I}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \xi_1 - \eta_2),$$

$$Z = (M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2)^2 + (2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1)^2.$$

В [6] для системы (2.3) найден обобщённый интеграл площадей:

$$J = (\vec{M}, \vec{\xi})^2 + (\vec{M}, \vec{\eta})^2 + 2M_3(\vec{M}, \vec{\xi}, \vec{\eta}) + c_2(\xi_2 + \eta_1) - c_1\eta_2 - c_3\xi_1. \quad (2.4)$$

Пусть  $G$  — полупрямое произведение  $\text{SO}(3)$  с двумя экземплярами  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathcal{G}$  — алгебра Ли группы  $G$ . Канонический изоморфизм

$$T_cG \cong \text{SO}(3) \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^9(M^1, M^2, M^3, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$$

порождает в  $\mathcal{G}$  координаты  $M^i, \xi^i, \eta^i$ . Пусть  $M_i, \xi_i, \eta_i$  — двойственные координаты в  $\mathcal{G}^*$ , тогда

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \xi_j\} = \varepsilon_{ijk}\xi_k, \quad \{M_i, \eta_j\} = \varepsilon_{ijk}\eta_k,$$

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0, \quad \{\xi_i, \eta_j\} = 0, \quad \{\eta_i, \eta_j\} = 0,$$

где  $\{, \}$  — скобки Пуассона. Будем считать, что система (2.3) задана в пространстве  $\mathcal{G}^*$  [1]. Она может быть записана в гамильтоновом виде следующим образом:

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{\xi}_i = \{H, \xi_i\}, \quad \dot{\eta}_i = \{H, \eta_i\}.$$

Инвариантное подмногообразие

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{G}^* : J_1(x) = 1, J_2(x) = c, J_3(x) = 1\}$$

определяется следующей системой уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = c_1, \quad \sum_{i=1}^3 \xi_i \eta_i = c_2, \quad \sum_{i=1}^3 \eta_i^2 = c_3 \quad (c_2^2 \leq c_1 c_3). \quad (2.5)$$

Если  $c_2^2 = c_1 c_3$ , то на каждой связной компоненте  $\mathcal{O} \cong S^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$  система (2.3) может быть сведена к случаю Ковалевской, а рассматриваемая задача (см. раздел 2.2) вырождается в случай Делоне (т. е. первый класс Аппельрота).

Если  $c_2^2 < c_1 c_3$ , то инвариантное подмногообразие  $\mathcal{O}^6 = \mathcal{O} \cong \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^3$  является регулярной орбитой коприсоединённого представления группы  $G$  [1]. Орбита обладает симплектической структурой, которую определяет стандартная форма Кириллова [4].

Ограничение (2.3) на  $\mathcal{O}^6$  является гамильтоновой системой вида

$$\dot{x} = \{H, x\} = \text{sgrad } H(x).$$

Интегралы  $H, J$  и  $Z$  попарно коммутируют, поэтому система вполне интегрируема по Лиувиллю.

**Предложение 1.** Если параметры  $c_i$  отвечают условию  $c_1 \neq c_3$  или  $c_2 \neq 0$ , то система (2.3), ограниченная на  $\mathcal{O}^6$ , не имеет неподвижных точек.

**Доказательство.** Пусть  $H_0$  — ограничение  $H$  на  $\mathcal{O}^6$ . Легко проверить, что если  $dH_0(x) = 0$  для некоторого  $x \in \mathcal{O}^6$ , то  $c_1 = c_3$  и  $c_2 = 0$ .  $\square$

## 2.2. Случай Богоявленского

Ограничим систему (2.3) на инвариантное подмножество

$$\mathcal{M}^4 = Z^{-1}(0) \cap \mathcal{O}^6 = \{x \in \mathcal{O}^6 : z_1(x) = z_2(x) = 0\},$$

состоящее из точек минимума интеграла  $Z: \mathcal{O}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\mathcal{O}^6 \subset \mathcal{G}^*$  есть произвольная орбита (2.5) при условии  $c_2^2 < c_1 c_3$ .

**Предложение 2.** *Подмножество  $\mathcal{M}^4$  является четырёхмерным гладким многообразием тогда и только тогда, когда*

$$c_2^2 < c_1 c_3, \quad (c_1 - c_3)^2 + c_2^2 \neq 0. \quad (2.6)$$

Орбита  $\mathcal{O}^6 \supset \mathcal{M}^4$  определена произвольным набором параметров  $c_i$  (2.5), отвечающих (2.6). Заметим, что если  $c_1 = c_3$  и  $c_2 = 0$ , то кусочно-гладкая поверхность  $\mathcal{M}^4$  имеет трансверсальное самопересечение вдоль цилиндра  $S^1 \times \mathbb{R}$ , который определяется следующим образом:

$$M_1 = M_2 = \xi_3 = \eta_3 = \xi_1 - \eta_2 = \xi_2 + \eta_1 = 0, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = c_3.$$

Ограничение (2.3) на инвариантное подмногообразие  $\mathcal{M}^4$ , которое было рассмотрено в [1], называется *случаем Богоявленского*. Кроме гамильтониана  $H$ , эта система имеет интеграл  $f: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , являющийся ограничением функции

$$f = \frac{\{z_1, z_2\}}{4} = M_3(M_1^2 + M_2^2) + M_1 \xi_3 + M_2 \eta_3. \quad (2.7)$$

Интеграл  $J$  (2.4), ограниченный на  $\mathcal{M}^4$ , функционально зависит от  $H$  и  $f$ .

**Предложение 3.**  $J = 2I(c_1 + c_3)H - f^2$  тождественно на  $\mathcal{M}^4$ .

Пусть  $\omega$  — ограничение на  $\mathcal{M}^4$  формы Кириллова из  $\mathcal{O}^6$ . Из (2.7) следует, что  $f^{-1}(0)$  совпадает с множеством

$$\Theta = \{x \in \mathcal{M}^4 : \det(\omega_x) = 0\}.$$

Данное множество непусто (см. раздел 5), в связи с чем возникает формальное затруднение. Теория топологической (т. е. *лиувиллевой* [3]) классификации интегрируемых гамильтоновых систем основана на предположении, что  $\mathcal{M}^4$  является симплектическим многообразием. Однако, фактически, условие невырожденности формы  $\omega$  может быть несколько ослаблено. Достаточно, чтобы каждая связная компонента  $\Theta \cap Q_h^3$  была подмножеством некоторого слоя  $f = \text{const}$ . В рассматриваемом случае мы имеем  $f(\Theta) = 0$ , поэтому частичное вырождение  $\omega$  не препятствует корректному применению теории.

Ясно, что векторное поле  $\text{sgrad } H$ , которое характеризуется свойством

$$\omega(v, \text{sgrad } H) = v(H) = dH(v) \text{ для всех } v \in T_x \mathcal{M}^4 \text{ и всех } x \in \mathcal{M}^4,$$

корректно определено *всюду* на  $\mathcal{M}^4$ .

### 3. Критические значения энергии

В координатах  $M_i, \xi_i, \eta_i$  (см. (2.2)) пространства  $\mathcal{G}^*$  подмногообразие  $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{G}^*$  определяется системой уравнений

$$\begin{cases} M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2 = 0, \\ 2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1 = 0, \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = c_1, \\ \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = c_2, \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = c_3. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Предложение 4.** Для любого  $s \in \mathcal{M}^4$  справедливо  $df(s) \neq 0$ , где  $f: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  есть интеграл (2.7).

Рассмотрим следующие удобные координаты  $\rho, \theta, x, y, r, \psi$ :

$$\begin{cases} \xi_1 - \eta_2 = \rho \cos \theta, \\ \xi_2 + \eta_1 = \rho \sin \theta, \\ -\xi_2 + \eta_1 = x, \\ \xi_1 + \eta_2 = y, \\ \xi_3 = r \cos \psi, \\ \eta_3 = r \sin \psi, \\ -\pi < \psi, \theta < \pi, \\ r, \rho > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

В этих специальных координатах имеем

$$H = \frac{1}{4I}(2M_3^2 + \rho - y). \quad (3.3)$$

**Теорема 1.** Гамильтониан (энергия) имеет критические значения

$$h_1 = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{a-b}, \quad h_2 = -h_1, \quad h_3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b},$$

где  $h_1$  — минимум,  $h_2, h_3$  — седловые значения,

$$a = (Bd_2)^2 + (mgr_1)^2, \quad b = \sqrt{((Bd_2)^2 - (mgr_1)^2)^2 + 4 \cdot (Bd_2mgr_1 \cdot (\vec{\gamma}, \vec{\delta}))^2}.$$

Соответствующие критические точки образуют четыре невырожденные окружности, порождённые замкнутыми траекториями (2.3):

$$\gamma_1 \subset H^{-1}(h_1) \cap f^{-1}(0), \quad \gamma_2 \subset H^{-1}(h_2) \cap f^{-1}(0), \quad \gamma_3^\pm \subset H^{-1}(h_3) \cap f^{-1}(0).$$

**Доказательство.** Заметим, что условие  $a > b > 0$  эквивалентно (2.6). Вложение  $\mathcal{M}^4$  в  $\mathcal{G}^* \cong \mathbb{R}^9$  определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta), \\ y\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta), \\ x^2 + y^2 + \rho^2 + 2r^2 = 2c_0, \\ M_1 = \mp \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}, \\ M_2 = \pm \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{cases} c_0 = c_1 + c_3, \\ \tilde{c} = \sqrt{(c_1 - c_3)^2 + 4c_2^2}, \\ \cos \alpha_0 = \frac{c_1 - c_3}{\tilde{c}}, \\ \sin \alpha_0 = \frac{2c_2}{\tilde{c}}. \end{cases}$$

Точка  $(y, \rho)$  изменяется в компактной области  $\Lambda(\mathcal{M}^4)$ , где

$$\Lambda: s \mapsto (y(s), \rho(s))$$

есть отображение из  $\mathcal{M}^4$  в  $\mathbb{R}^2$ , называемое  $\Lambda$ -проекцией. Она полиномиальна, поскольку  $\rho = M_1^2 + M_2^2$ . Из уравнений (3.4) легко получить

$$r^2 = \tilde{c} \cos(2\psi - \alpha_0) - \rho^2 \pm \sqrt{(\tilde{c} \cos(2\psi - \alpha_0) - \rho^2)^2 - (\rho^4 - 2c_0\rho^2 + \tilde{c}^2)}.$$

Отсюда и из условия совместности второго уравнения в (3.4) следует, что границей области  $\Lambda(\mathcal{M}^4)$  является шестиугольник  $ABCDEF$  (рис. 1):

$$\begin{aligned} [AB] &= \{(y, \rho): \rho = -y - \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, -\rho_2 \leq y \leq -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}\}, \\ [BC] &= \{(y, \rho): \rho = y + \sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}}, -\rho_2 \leq y \leq -\rho_1\}, \\ [CD] &= \{(y, \rho): \rho = \rho_2, -\rho_1 \leq y \leq \rho_1\}, \\ [DE] &= \{(y, \rho): \rho = -y + \sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}}, \rho_1 \leq y \leq \rho_2\}, \\ [EF] &= \{(y, \rho): \rho = y - \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}} \leq y \leq \rho_2\}, \\ [AF] &= \{(y, \rho): \rho = 0, -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}} \leq y \leq \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}\}, \\ \rho_1 &= \sqrt{c_0 - \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{c_0 + \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На рис. 1, 2, 3 изображены  $\Lambda$ -проекции многообразий  $Q_h^3 = H^{-1}(h)$ . Заметим, что  $\Lambda(Q_h^3) = \Lambda(\mathcal{M}^4)$  при  $h \geq h_3$ . Очевидно, что критические точки  $H$  проектируются на отрезки  $[EF]$ ,  $[AD]$  и  $[BC]$ . Соответствующие критические окружности определяются следующими условиями:

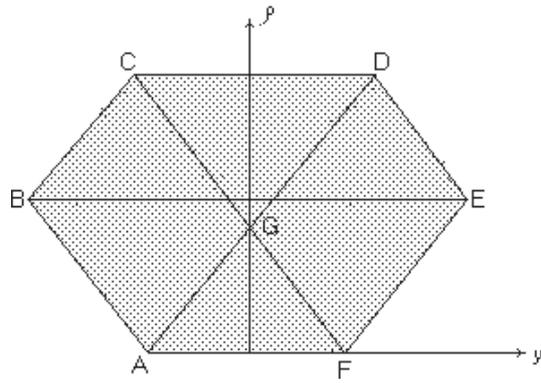


Рис. 1.  $h > h_3$

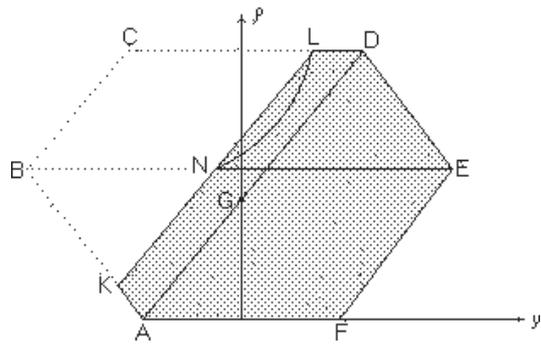


Рис. 2.  $h_2 < h < h_3$

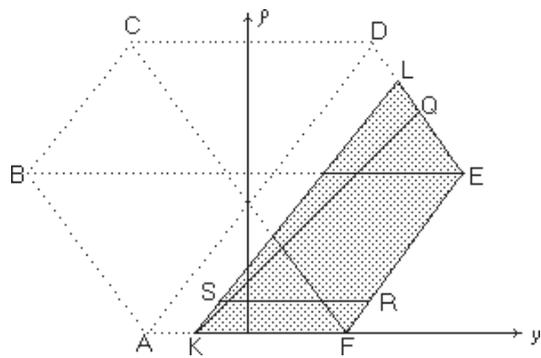


Рис. 3.  $h_1 < h < h_2$

$$\begin{aligned}\Lambda(\gamma_1) &= [EF], \quad \Lambda(\gamma_2) = [AD], \quad \Lambda(\gamma_3^\pm) = [BC], \\ \theta(\gamma_i) &= \alpha_0, \quad \psi(\gamma_i) = \frac{\alpha_0}{2} + \pi n \quad i \in \{1, 2\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \theta(\gamma_3^\pm) &= \alpha_0 \pm \pi, \quad \psi(\gamma_3^\pm) = \frac{\alpha_0}{2} \pm \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ясно, что  $M_3 = 0$  в критической точке. Из (3.5) получаем критические значения:

$$\begin{aligned}h_1 = H(\gamma_1) &= -\frac{\sqrt{2c_0 - 2\bar{c}}}{4I}, \quad h_2 = H(\gamma_2) = \frac{\sqrt{2c_0 - 2\bar{c}}}{4I}, \\ h_3 = H(\gamma_3^+) &= H(\gamma_3^-) = \frac{\sqrt{2c_0 + 2\bar{c}}}{4I}.\end{aligned}$$

Так как интеграл (2.7) имеет вид

$$f = M_3\rho \pm r\sqrt{\rho} \cdot \sin\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right), \quad (3.6)$$

то  $f = 0$  в каждой точке, критической для  $H$ . Невырожденность критической окружности  $S^1 \subset f^{-1}(0)$  эквивалентна невырожденности гессиана  $|d^2H(z)|$  на малом диске  $D^2 \subset f^{-1}(0)$ , трансверсальном  $S^1$  в точке  $z = S^1 \cap D^2$  [3]. Легко проверить, что для окружностей  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3^\pm$  это условие выполняется.

Из предложения 1 следует, что на  $\mathcal{M}^4$  нет неподвижных точек (2.3), т. е. все критические окружности порождены периодическими траекториями. Заметим, что  $dH(p) = 0$  влечёт  $\omega(v, \text{sgrad } H) = 0$  для всех  $v \in T_p\mathcal{M}^4$ . Мы имеем  $\text{sgrad } H(p) \neq 0$ , следовательно,  $\text{sgrad } H(p) \in \text{Ker}(\omega_p)$  для всех  $p \in \mathcal{M}^4$ , являющихся критическими для  $H$ .  $\square$

## 4. Критические значения интеграла

**Теорема 2.** Пусть  $f_h$  — ограничение интеграла  $f$  на подмногообразии  $Q_h^3 = H^{-1}(h)$ , где  $h$  — регулярное значение гамильтониана  $H: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Критические значения функции  $f_h$  являются корнями уравнения

$$\begin{aligned}108f^8 - 36(8I^2h^2 - c_0)(\bar{c}^2 - 16Ihf^2)f^4 + (\bar{c}^2 - 16Ihf^2)^3 + \\ + 32(8I^2h^2 - c_0)^3f^4 - (8I^2h^2 - c_0)^2(\bar{c}^2 - 16Ihf^2)^2 = 0, \quad (4.1)\end{aligned}$$

которое определяет представленную на рис. 4 бифуркационную диаграмму отображения  $(H, f): \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Она является набором из восьми гладких кривых  $f_i^\pm$ , где  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , и пяти особых точек

$$(h_j, 0) = f_j^+ \cap f_j^- \quad \text{для } j \in \{1, 2, 3\}, \quad (h_0, f_0^\pm) = f_3^\pm \cap f_4^\pm,$$

где  $h_0$  — некоторое число из интервала  $(h_2; h_3)$ . Пусть  $f_i^\pm(h)$  — критическое значение  $f_h$ , отвечающее кривой  $f_i^\pm$ , тогда

$$f_0^\pm = f_3^\pm(h_0) = f_4^\pm(h_0).$$

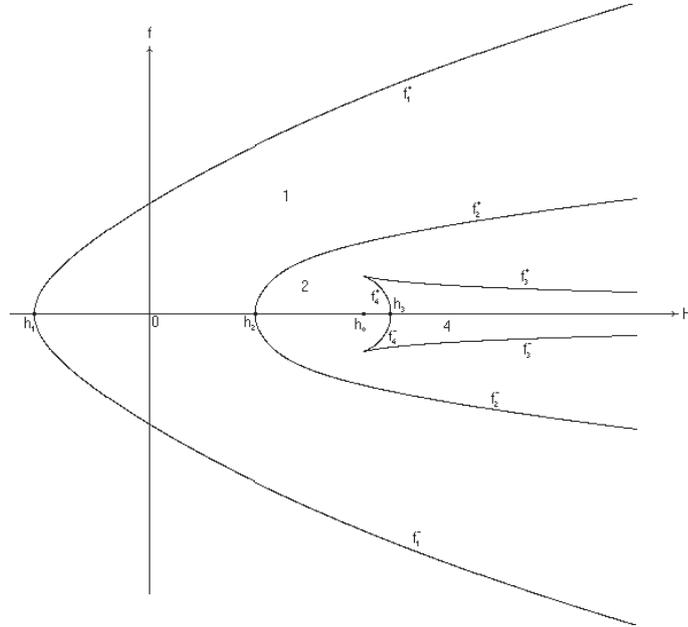


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма

2. Критические точки  $f_h$  организованы во вложенные окружности: одна окружность над каждой точкой кривых  $f_1^\pm$  и  $f_2^\pm$ , две над каждой точкой кривых  $f_3^\pm$  и  $f_4^\pm$ . Критические окружности, соответствующие значению  $f_i^\pm(h)$ , определяются системой (3.1) и уравнениями

$$\begin{cases} M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \xi_1 - \eta_2 = 4Ih & (I = I_3), \\ 2(M_2\xi_3 - M_1\eta_3)M_3 = (M_1^2 + M_2^2)(\eta_1 - \xi_2), \\ M_1(c_1\eta_3 - c_2\xi_3 - (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\eta_3) + M_2(c_2\eta_3 - c_3\xi_3 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\xi_3) = \\ = (2f_i^\pm)^{-1}(M_1^2 + M_2^2)((c_1\eta_3 - c_2\xi_3)\xi_3 + (c_2\eta_3 - c_3\xi_3)\eta_3). \end{cases} \quad (4.2)$$

#### 4.1. Критические точки

Условие  $c_0 > \tilde{c} > 0$  эквивалентно (2.6). Мы предполагаем, что это условие выполнено. Оно означает, что  $M^4$  является гладким четырёхмерным многообразием (предложение 2). Критические точки функции  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$  будем искать, используя локальные координаты  $Q_h^3$ .

**Лемма 1.** Если в окрестности некоторой точки из  $Q_h^3$  определены координаты  $(y, \rho, \psi)$  или  $(y, \rho, r)$ , то в этой точке имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$$

соответственно.

**Доказательство.** Положим  $4I = 1$ , тогда

$$H = 2M_3^2 + \rho - y$$

по (3.3). Вложение  $Q_h^3 \subset \mathcal{M}^4$  определяется уравнением

$$M_3^2 = \frac{y - \rho + h}{2}.$$

Из (3.6) следует, что

$$f = \rho \sqrt{\frac{y - \rho + h}{2}} \operatorname{sgn}(M_3) \pm r \sqrt{\rho} \sin \left( \psi - \frac{\theta}{2} \right). \quad (4.3)$$

Рассмотрим функцию  $f(y, \rho, \psi)$ . Пусть  $\alpha = \psi - \theta/2$  и  $\beta = \theta - \alpha$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\rho}{2\sqrt{2}\sqrt{y - \rho + h}} \operatorname{sgn}(M_3) \mp \frac{r\sqrt{\rho} \cos \alpha}{2x}, \\ \frac{\partial f}{\partial \psi} &= \mp \frac{\tilde{c}r}{x\sqrt{\rho}} \left[ \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{-r^2 - \rho^2 + \tilde{c} \cos(2\alpha + \beta)} (\tilde{c} \sin \alpha \sin \beta + r^2 \cos \alpha) + \cos \alpha \sin \beta \right], \\ \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{2y - 3\rho + 2h}{2\sqrt{2}\sqrt{y - \rho + h}} \operatorname{sgn}(M_3) \pm \left[ \frac{r}{2\sqrt{\rho}} \sin \alpha - \frac{ry}{2x\sqrt{\rho}} \cos \alpha \right] \pm \\ &\pm \frac{\rho(r^2 + \rho^2 - c_0)}{r(-r^2 - \rho^2 + \tilde{c} \cos(2\alpha + \beta))} \left[ \sqrt{\rho} \sin \alpha - \frac{r^2}{x\sqrt{\rho}} \cos \alpha \cos 2\alpha \right]. \end{aligned}$$

Если  $\partial f/\partial y = \partial f/\partial \psi = 0$ , то, используя уравнения (3.4), можно доказать, что  $\partial f/\partial \rho = 0$ . Аналогично  $\partial f/\partial \rho = 0$  следует из  $\partial f/\partial y = \partial f/\partial r = 0$ . Из равенств  $\partial f/\partial y = 0$  и  $\partial f/\partial \psi = 0$  получаются второе и третье уравнения системы (4.2).  $\square$

**Лемма 2.** Среди тех точек, где не определены координаты  $(y, \rho, \psi)$  и  $(y, \rho, r)$ , существует только конечное число критических для функции  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Из лемм 1 и 2 вытекает, что множество критических точек функции  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующих некоторому значению  $f_i$ , является замыканием множества решений системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta), \\ y\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta), \\ y^2 + \rho^2 + x^2 + 2r^2 = 2c_0, \\ x\rho \cos\left(\psi + \frac{\theta}{2} - \alpha_0\right) + \rho^2 \cos\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta - \alpha_0) = 0, \\ x\rho = \pm r \sqrt{2\rho(y - \rho + 4Ih)} \cos\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sgn}(M_3), \\ \mp \frac{\tilde{c}}{2} \sqrt{\rho} \sin(\theta - \alpha_0) \left(r \cos\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right)\right)^{-1} = f_i, \\ M_1 = \mp \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}, \\ M_2 = \pm \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}, \\ M_3^2 = \frac{y - \rho + 4Ih}{2}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Знаки  $\pm$  и  $\mp$  во всех формулах согласованы. Уравнения с первого по третье и с седьмого по девятое определяют орбиту  $\mathcal{O}^6$  и вложения  $Q_h^3 \subset \mathcal{M}^4 \subset \mathcal{O}^6$ , четвёртое следует из  $\partial f / \partial \psi = 0$ , пятое следует из  $\partial f / \partial y = 0$ , шестое следует из первого и пятого и равенства  $f = f_i$  (см. (4.3)).

Из (4.4) можно получить систему (4.5), а также следующее уравнение, которое эквивалентно (4.1):

$$\begin{aligned} (54f_i^4 + 9(8I^2h^2 - c_0)(16Ihf_i^2 - \tilde{c}^2) + 8(8I^2h^2 - c_0)^3)^2 = \\ = (3(16Ihf_i^2 - \tilde{c}^2) + 4(8I^2h^2 - c_0)^2)^3. \end{aligned}$$

Дискриминант многочлена (4.1) равен

$$\begin{aligned} 27 \cdot 2^{66} \tilde{c}^{12} (c_0^2 - \tilde{c}^2)^2 (\tilde{c}^2 - (8I^2h^2 - c_0)^2) \times \\ \times (16(8I^2h^2 - c_0)^4 + 64c_0(8I^2h^2 - c_0)^3 + 72\tilde{c}^2(8I^2h^2 - c_0)^2 - 27\tilde{c}^4)^6. \end{aligned}$$

Из равенства  $D(h) = 0$  мы получаем значения

$$h_1 = -\frac{1}{4I} \sqrt{2(c_0 - \tilde{c})}, \quad h_2 = -h_1, \quad h_3 = \frac{1}{4I} \sqrt{2(c_0 + \tilde{c})}, \quad h_4 = -h_3$$

и значения  $\pm h_0$ , где  $h_0 \in (h_2; h_3)$ . Числа  $h_4$  и  $-h_0$  не являются значениями  $H$ , поскольку  $h_4 < h_1$  и  $-h_0 < h_1$ . Легко проверить, что регулярное значение  $h_0$  характеризуется равенством  $D_i(h_0) = 0$  (см. (4.5)). Обозначим через  $f_0^\pm$  соответствующий кратный корень уравнения (4.1). Итак, числа  $h_i$ , где  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , действительно являются теми (и только теми) значениями  $h$ , при которых уравнение (4.1) имеет кратные корни. Оно определяет бифуркационную диаграмму, изображённую на рис. 4. Отметим, что среди кривых  $f_i^\pm$  нет ни одного сегмента параболы.

**Предложение 5 (А. В. Болсинов).** *Левая часть уравнения (4.1), взятая со знаком минус, является дискриминантом многочлена*

$$Q_h(\lambda) = \lambda^3 + 2(8I^2h^2 - c_0)\lambda^2 + (\tilde{c}^2 - 16Ihf^2)\lambda + 4f^4.$$

Система (4.5), определяющая критические точки  $f_h$ , вместе с уравнением (4.1) эквивалентны (4.4). Обозначим критические значения  $f_h$  через  $f_i^\pm(h) = f_i^\pm$  в соответствии с рис. 4. Пусть  $f_i = f_i^{[\pm]}$ , если  $i \in \{1, 2\}$ , и  $f_i = f_i^{[\mp]}$  если  $i \in \{0, 3, 4\}$ . Тогда множество критических точек функции  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующих значению  $f_i$ , определяется системой

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2K_i^2\rho^2 + \rho - 4Ih, \\ \cos(\theta - \alpha_0) = [\pm]2(\tilde{c})^{-1}f_i(K_i\rho + (2K_i)^{-1} + [\mp]f_i\rho^{-1}), \\ r^2 = y\rho - \tilde{c}\cos(\theta - \alpha_0) + \frac{1}{2}\tilde{c}^2f_i^{-2}\rho\sin^2(\theta - \alpha_0), \\ \cos\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) = [\pm](\mp)\frac{1}{2}\tilde{c}r^{-1}f_i^{-1}\sqrt{\rho}\sin(\theta - \alpha_0), \\ \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right)\right) = (\mp)\operatorname{sgn}(K_i\rho + [\mp]f_i\rho^{-1}), \\ x = [\mp]K_i\tilde{c}f_i^{-1}\rho\sin(\theta - \alpha_0), \\ M_1 = [\pm](\mp)\sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}, \\ M_2 = [\pm](\pm)\sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2}, \\ M_3 = [\pm]K_i\rho, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

где  $K_i = K_i(h)$  — положительная величина, определённая следующим образом:

$$K_i = \frac{3|f_i|}{2(c_0 - 8I^2h^2) + \sqrt{D_i(h)}} \quad \text{для } i \in \{1, 2\},$$

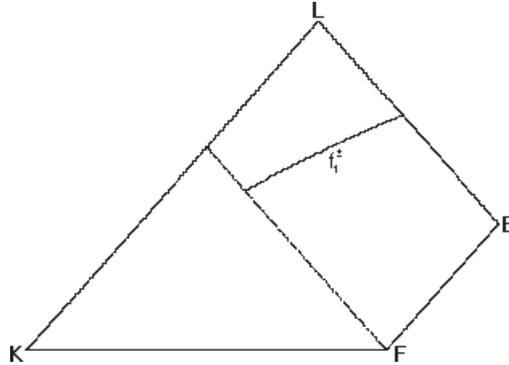
$$K_3 = \frac{3|f_3|}{2(8I^2h^2 - c_0) - \sqrt{D_3(h)}}, \quad K_4 = \frac{3|f_4|}{2(8I^2h^2 - c_0) + \sqrt{D_4(h)}},$$

$$D_i(h) = 3(16Ihf_i^2 - \tilde{c}^2) + 4(8I^2h^2 - c_0)^2.$$

Если  $h = h_0$ , то мы полагаем  $K_0 = K_3(h_0) = K_4(h_0)$ . Заметим, что знаки  $[\pm]$  и  $[\mp]$  во всех формулах согласованы. Например, рассматривая критические точки на уровне  $f_3 = f_3^+$ , мы выбираем в каждой квадратной скобке нижний знак.

## 4.2. Критические окружности

Пусть  $C(f_i)$  — множество критических точек функции  $f_h$ , отвечающих критическому значению  $f_i$ . Из системы (4.5) координаты  $\rho, \theta, x, y, r, \psi, M_i$  последовательно выражаются как функции  $\rho$ . Система совместна, если второе

Рис. 5. Критические окружности при  $h_1 < h < h_2$ 

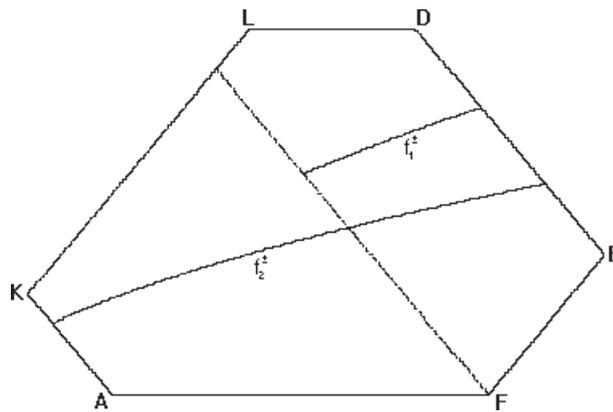
уравнение разрешимо относительно  $\theta$ , т. е. если

$$|2(\bar{c})^{-1}f_i(K_i\rho + (2K_i)^{-1} + [\mp]f_i\rho^{-1})| \leq 1.$$

Данное условие выделяет сегмент параболы

$$y = 2K_i^2\rho^2 + \rho - 4Th,$$

являющийся  $\Lambda$ -проекцией (см. раздел 3) критической окружности. Эти сегменты изображены на рис. 5—8. После того как из второго уравнения в (4.5) определено  $\theta$ , легко выразить все остальные координаты, при этом  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $M_1$  и  $M_2$  выражаются неоднозначно. Для каждой внутренней точки сегмента получим пару значений  $\theta$ ,  $\alpha_0$ , отличающихся знаками. Каждой граничной точке отвечает одно значение  $\theta$ , равное  $\alpha_0$  или  $\alpha_0 \pm \pi$ . Следовательно, проекция  $C(f_i)$  на

Рис. 6. Критические окружности при  $h_2 < h < h_0$

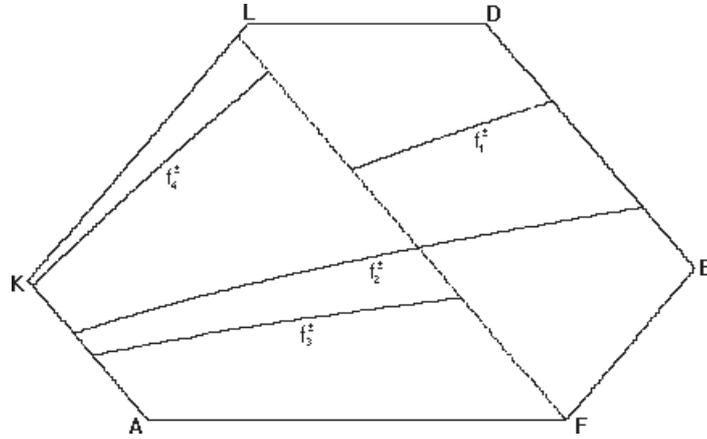


Рис. 7. Критические окружности при  $h_0 < h < h_3$

$\mathbb{R}^5(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, M_3)$  является окружностью, обозначаем её  $S_i^1$ . При каждом  $\theta$ , выбирая знаки в круглых скобках, получим два значения  $\psi$ , которые отличаются друг от друга на  $\pm\pi$ . Соответствующие координаты  $M_1$  и  $M_2$  имеют противоположные знаки. Итак, над каждой точкой окружности  $S_i^1$  мы имеем пару точек из множества  $C(f_i)$ . Из (4.5) следует, что  $\theta = \alpha_0$  в критических точках над  $[DE]$  и  $\theta = \alpha_0 \pm \pi$  в критических точках над  $[CF]$  и  $[AB]$ .

Пусть точка  $(y, \rho)$  пробегает сегмент параболы, отвечающей значению  $f_1$  или  $f_2$ . Тогда координата  $\theta$ , изменяясь от  $\alpha_0 \pm \pi$  до  $\alpha_0$ , в единственной точке окружности  $S_i^1$  принимает значение  $\pm\pi$ . Следовательно, множество  $C(f_i)$  является окружностью, которая двулистно накрывает  $S_i^1$ . Если точка  $(y, \rho)$  про-

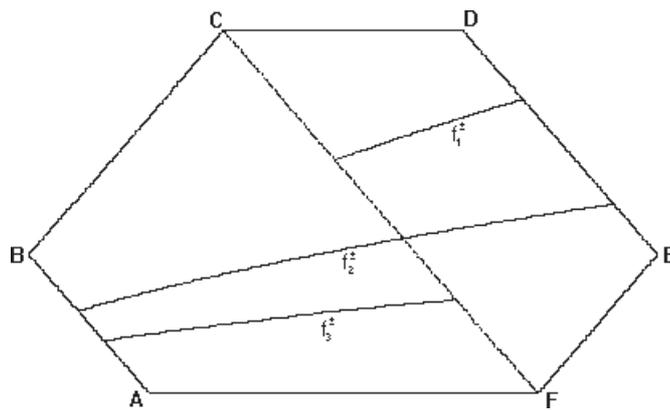


Рис. 8. Критические окружности при  $h > h_3$

бегают сегмент  $f_3$ , или  $f_4$ , или  $f_0$ , то координата  $\theta$  возвращается к исходному значению  $\alpha_0 \pm \pi$ . Следовательно, она принимает значение  $\pm\pi$  в двух точках окружности  $S_i^1$  или ни в одной. В любом случае множество  $C(f_i)$  состоит из двух непересекающихся окружностей. Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Интеграл  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$  является функцией Ботта для всех регулярных  $h \neq h_0$ , где

$$h_0 = \frac{\sqrt{2c_0 + k_0\tilde{c}}}{4I}$$

для некоторого  $k_0 \in (0; 1)$ , совпадающего с единственным корнем уравнения

$$k^4 + 8\frac{c_0}{\tilde{c}}k^3 + 18k^2 - 27 = 0. \quad (4.6)$$

Критические окружности функции  $f: Q_{h_0}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , отвечающие значениям  $f_i^\pm$ , являются вырожденными при  $i = 0$  и невырожденными при  $i \neq 0$ .

**Доказательство.** Положим  $4I = 1$ . Для каждой критической окружности достаточно доказать её невырожденность в одной точке [3]. Проекция всех критических окружностей, кроме  $f_1^\pm$ , пересекают отрезок  $[AB]$  (см. рис. 5–8). На критической окружности  $S_i^1 \subset Q_h^3$  выберем такую точку  $z \in S_i^1$ , что

$$\Lambda(z) \in (AB), \quad \psi(z) = \frac{\alpha_0}{2}, \quad \theta(z) = \alpha_0 \pm \pi.$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что в окрестности  $z$  существуют координаты  $(\rho, \psi, \theta)$  многообразия  $Q_h^3$ . Легко проверить, что одна из двух поверхностей  $\theta = \alpha_0 \pm \pi$  и  $\psi = \alpha_0/2$  трансверсальна  $S_i^1$  в точке  $z$ . Можно считать, что  $S_i^1$  трансверсальна диску  $D^2$  с центром  $z$ , определяемому равенством  $\theta \equiv \alpha_0 \pm \pi$ . Ограничим  $f$  на этот диск и вычислим гессиан  $|d^2f(z)|$ .

Координатная линия  $\rho = t$ , проходящая через  $z$ , лежит на  $\Lambda^{-1}(AB)$ . Из (4.3) следует, что на этой линии  $\partial f / \partial \psi \equiv 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \rho}(z) &= 0, \quad |d^2f(z)| = \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(z) \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(z), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(z) &= \pm \frac{r(r^2 + \rho^2)}{h_2\rho} \left( \frac{r}{\sqrt{2(y - \rho + h)}} \pm \sqrt{\rho} \right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что  $\partial^2 f / \partial \psi^2(z) = 0$  влечёт

$$-\rho^2 - h_2\rho + \tilde{c} = 4\rho(\rho_0 - \rho) = 0, \quad (4.7)$$

где  $\rho = \rho(z)$ .

Чтобы вычислить  $\partial^2 f / \partial \rho^2(z)$ , ограничим  $f$  на линию  $\rho = t$ , проходящую через  $z$ . Функция  $\pm f(\rho)$  равна

$$(2\rho_0 - 3\rho)\sqrt{-\rho^3 - h_2\rho^2 + \tilde{c}\rho} \pm \sqrt{\rho_0 - \rho}(-3\rho^2 - 2h_2\rho + \tilde{c}). \quad (4.8)$$

Ясно, что  $df/d\rho = 0$  в точке  $\rho(z)$ .

Рассмотрим многочлен

$$\mathcal{P}_h(\rho) = (2\rho_0 - 3\rho)^2(-\rho^3 - h_2\rho^2 + \tilde{c}\rho) \mp (\rho_0 - \rho)(-3\rho^2 - 2h_2\rho + \tilde{c})^2, \quad (4.9)$$

где  $\rho_0 = (h - h_2)/2$ . Знаки  $\pm$  и  $\mp$  в (4.8) и (4.9) согласованы между собой. Легко проверить, что  $df/d\rho = 0$  эквивалентно  $\mathcal{P}_h(\rho) = 0$ . Если  $\mathcal{P}_h(\rho) = 0$ , то равенство  $d^2f/d\rho^2 = 0$  эквивалентно  $d\mathcal{P}_h/d\rho = 0$ . Ясно, что  $\mathcal{P}_h(\rho) = 0$  в точке  $\rho = \rho(z)$ . Поэтому если бы имело место  $\partial^2 f/\partial\psi^2 = 0$ , то из (4.7) и (4.9) можно было бы получить

$$-3\rho^2 - 2h_2\rho + \tilde{c} = 2\rho(2\rho_0 - 3\rho). \quad (4.10)$$

Из (4.7) и (4.10) следует  $\rho = \rho(z) = 0$ , и тогда  $f(z) = 0$ . Но 0 не является критическим значением  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $h$  регулярно (теорема 2). Следовательно,  $\partial^2 f/\partial\psi^2(z) \neq 0$ .

Из (3.5) следует, что  $\rho \leq \rho_0$  в каждой точке из  $\Lambda^{-1}[AB]$ . Если  $P_h(\rho)$  имеет на интервале  $(0; \rho_0)$  кратный корень, то  $h = \sqrt{2c_0 + k_0\tilde{c}}$ , где  $k_0$  есть корень (4.6). Легко проверить, что в случае  $c_0 > \tilde{c} > 0$  данное уравнение имеет единственный корень  $k_0$ , при этом  $0 < k_0 < 1$ . Вспомним, что мы положили  $4I = 1$ . Следовательно,  $h_0 = \sqrt{2c_0 + k_0\tilde{c}}/(4I)$  является единственным регулярным значением  $H$ , при котором  $f$  не является функцией Ботта на  $Q_h^3$ . Легко проверить, что это значение  $h_0$  ранее было найдено в теореме 2.

Итак,  $\partial^2 f/\partial\rho^2(z) \neq 0$  при  $h \neq h_0$ . Следовательно, если  $\Lambda$ -проекция критической окружности пересекается с отрезком  $[AB]$ , то эта окружность является невырожденной при  $h \neq h_0$ . Аналогично, если  $\Lambda$ -проекция критической окружности пересекается с отрезком  $[DE]$ , то эта окружность является невырожденной при *всех регулярных*  $h$ .

Очевидно, что каждая пара критических окружностей функции  $f: Q_{h_0}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , отвечающих значениям  $f_0^\pm$ , является вырожденной (рис. 4). Поскольку  $f_3^\pm(h_0) = f_4^\pm(h_0)$  и  $D_3(h_0) = D_4(h_0) = 0$ , то  $K_3(h_0) = K_4(h_0)$ . Отсюда и из (4.5) следует, что критические окружности  $f_3^\pm(h_0)$  и  $f_4^\pm(h_0)$  слились с вырожденной окружностью  $f_0^\pm$ . Следовательно, её  $\Lambda$ -проекция является сегментом параболы, расположенным между отрезками  $[AB]$  и  $[CF]$  (см. рис. 8).  $\square$

## 5. Нулевой уровень

**Теорема 4.** Число связных компонент подмногообразия

$$M_h^2 = f^{-1}(0) \cap Q_h^3$$

зависит от  $h$  следующим образом:

- равно одна при  $h_1 < h < h_2$ ;
- равно две при  $h_2 < h < h_3$ ;
- равно четыре при  $h > h_3$ .

**Доказательство.** Положим  $4I = 1$ . Ясно (см. рис. 4), что каждая компонента  $M_h^2$  является тором  $T^2$ , когда  $h$  регулярно. Из (3.3), (3.4) и (4.3) следует, что подмногообразие  $M_h^2 \subset \mathbb{R}^9$  определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta), \\ y\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta), \\ r^2 = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + h\rho - \rho^2, \\ \rho^2(y - \rho + h) = r^2\rho(1 - \cos(2\psi - \theta)), \\ M_1 = \mp\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}, \\ M_2 = \pm\sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}, \\ M_3^2 = \frac{y - \rho + h}{2}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Четвёртое уравнение следует из (4.3) и условия  $f = 0$ . Пусть

$$\mathcal{M}_0^3 = \{z \in \mathcal{M}^4: f(z) = 0\},$$

т. е.

$$M_h^2 = \mathcal{M}_0^3 \cap Q_h^3.$$

Из предложения 4 следует, что  $\mathcal{M}_0^3$  есть гладкое многообразие. В теореме 1 фактически описаны критические значения функции  $H: \mathcal{M}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$  и соответствующие (невырожденные) критические окружности  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3^\pm$ . Их проекциями являются отрезки  $[EF]$ ,  $[AD]$  и  $[BC]$  (см. рис. 1). Бифуркации  $M_h^2$  происходят только при  $h = h_i$ , где  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Будут полезны следующие симметрии многообразия  $\mathcal{M}^4$ :

$$\begin{aligned} \sigma(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, x, y, r, \psi) &= (-M_1, -M_2, -M_3, \rho, \theta, x, y, r, \psi), \\ s(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, x, y, r, \psi) &= (M_1^*, M_2^*, -M_3, \rho, \theta^*, -x, y, r, \psi^*), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\theta^* - \alpha_0 = \alpha_0 - \theta, \quad \psi^* - \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\alpha_0}{2} - \psi.$$

Если  $h_1 < h < h_2$ , то боттовский интеграл  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$  имеет только два критических значения. Из общей теории бифуркаций слоений Лиувилля [3, 4], называемой в дальнейшем *теорией Фоменко*, мы получаем, что  $M_h^2$  имеет одну связную компоненту.

Из (5.1) следует, что при каждом  $h \in (h_1; h_2)$  уравнение  $\theta = \alpha_0$  определяет в  $M_h^2$  пару непересекающихся  $s$ -симметричных окружностей  $\gamma_\pm(h)$ , непрерывно зависящих от  $h$ . Отображением  $\Lambda$  (см. раздел 3) они проектируются на отрезок прямой

$$y = \frac{2c_0 - h^2}{2\tilde{c}}\rho - h,$$

заклѳенный между точкой  $K$  и отрезком  $[DE]$  ( $[KQ]$  на рис. 3). При  $h \rightarrow h_1 + 0$  окружности  $\gamma_{\pm}(h)$  сближаются и в пределе совпадают с  $\gamma_1$ . Аналогично, окружности  $\gamma_{\pm}(h_2)$  совпадают с  $\gamma_2$ . Очевидно, что  $\gamma_+(h)$  и  $\gamma_-(h)$  гомотопны на торе  $M_h^2$ . В соответствии с теорией Фоменко при переходе через критический уровень  $h = h_2$  возможны две различные бифуркации тора  $M_h^2$ . При одной из них тор распадается на два. Из поведения окружностей  $\gamma_{\pm}(h)$  видно, что именно эта бифуркация имеет место. Следовательно, при  $h_2 < h < h_3$  подмногообразие  $M_h^2$  имеет две связанные компоненты.

При  $h \in (h_1; h_2)$  уравнение  $M_1 = M_2 = 0$  определяет в  $M_h^2$  пару непересекающихся окружностей, проектирующихся на отрезок  $[KF]$  (см. рис. 3) и непрерывно зависящих от  $h$ . На первой из них  $\psi \equiv \alpha_0/2$ , а на второй  $\psi \equiv \alpha_0/2 \pm \pi$ . Первую окружность обозначим  $\delta(h)$ . Из (3.4) и (3.5) следует, что  $\Lambda^{-1}(K) \cap Q_h^3$  состоит из двух  $s$ -симметричных точек. В одной из точек окружности  $\delta(h)$  и  $\gamma_+(h)$  трансверсально пересекаются, и других пересечений нет. Следовательно, каждая из них негомотопна нулю на торе  $M_h^2$ . Обозначим через  $P(h)$  точку  $\delta(h) \cap \gamma_+(h)$ . При  $h \rightarrow h_1 + 0$  окружность  $\delta(h)$  стягивается в точку  $P(h_1) \in \Lambda^{-1}(F)$  и при  $h \rightarrow h_2 - 0$  склеивается в восьмѳрку. Вершиной этой восьмѳрки является  $P(h_2) \in \Lambda^{-1}(A)$ . При  $h > h_2$  она распадается на пару непересекающихся  $\sigma$ -симметричных окружностей  $\delta_{\pm}(h)$ . Они проектируются на отрезок  $[AF]$  (см. рис. 2). Ясно, что связанные компоненты  $M_h^2$ , содержащие эти окружности, также  $\sigma$ -симметричны. Пусть  $T_h^2$  — такая компонента  $M_h^2$ , что  $\delta_+(h) \subset T_h^2$ , тогда  $\delta_-(h) \subset \sigma(T_h^2)$ .

При каждом  $h \in (h_2; h_3)$  уравнение  $\psi = \alpha_0/2 + \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ) определяет пару непересекающихся  $\sigma$ -симметричных окружностей  $\beta_{\pm}(h)$ , таких что  $\beta_+(h) \subset T_h^2$  и  $\beta_-(h) \subset \sigma(T_h^2)$ . Каждая из этих окружностей непрерывно зависит от  $h$  и проектируется на сегмент параболы

$$\tilde{c}y = (\rho - h_2)(\tilde{c} - (h - h_2)\rho),$$

заклѳенный внутри шестиугольника  $AKLDEF$  (см. рис. 2). Данный сегмент проходит через точки  $A$ ,  $G$  и  $L$ . При  $h \rightarrow h_2 + 0$  окружности  $\beta_{\pm}(h)$  сближаются, и в пределе обе совпадают с  $\gamma_2$ . При  $h \rightarrow h_3 - 0$  каждая из этих окружностей склеивается в восьмѳрку. Вершинами этих восьмѳрок являются точки  $P_{\pm} \in \Lambda^{-1}(C)$ .

При каждом  $h \in (h_2; h_3)$  уравнение  $\psi = \alpha_0/2 \pm \pi/2$  определяет четвѳрку непересекающихся окружностей  $\alpha_{1,\pm}(h)$ ,  $\alpha_{2,\pm}(h)$ . Окружности  $\alpha_{b,+}(h)$  и  $\alpha_{b,-}(h)$   $\sigma$ -симметричны для каждого  $b \in \{1, 2\}$ . Окружности  $\alpha_{1,+}(h)$  и  $\alpha_{2,+}(h)$   $s$ -симметричны, и окружности  $\alpha_{1,-}(h)$  и  $\alpha_{2,-}(h)$  также  $s$ -симметричны. Все они проектируются на сегмент параболы

$$\tilde{c}y = (\rho - h_3)(\tilde{c} + (h - h_3)\rho),$$

заклѳенный внутри шестиугольника  $AKLDEF$  (см. рис. 2). Данный сегмент проходит через точки  $N$  и  $L$ . Множество  $\Lambda^{-1}(L) \cap Q_h^3$  состоит из четырёх точек. В одной из них  $\alpha_{1,+}(h)$  и  $\beta_+(h)$  трансверсально пересекаются, и других пересечений у них нет. В  $s$ -симметричной точке трансверсально пересекаются

окружности  $\alpha_{2,+}(h)$  и  $\beta_+(h)$ . Следовательно, все эти окружности негомотопны нулю,  $\alpha_{1,+}(h)$  гомотопна  $\alpha_{2,+}(h)$  в  $T_h^2$  и  $\alpha_{1,-}(h)$  гомотопна  $\alpha_{2,-}(h)$  в  $\sigma(T_h^2)$ . В пределе при  $h \rightarrow h_3 - 0$  окружности  $\alpha_{1,+}(h)$ ,  $\alpha_{2,+}(h)$  сливаются с  $\gamma_3^+$ . Аналогично, окружности  $\alpha_{1,-}(h_3)$ ,  $\alpha_{2,-}(h_3)$  совпадают с  $\gamma_3^-$ . Поэтому при переходе через критический уровень  $h = h_3$  с  $T_h^2$  и  $\sigma(T_h^2)$  происходят бифуркации превращения из одного в два тора. Следовательно, при  $h > h_3$  подмногообразие  $M_h^2$  имеет четыре связные компоненты. Теорема доказана.  $\square$

### 5.1. Матрицы склейки

В дальнейшем, рассматривая на фиксированном торе  $T^2$  ориентированные окружности, будем называть их *циклами*. Мы будем отождествлять гомотопные или гомологичные циклы. Термин *окружность* мы будем использовать только для окружностей, рассматриваемых без ориентаций. Многообразие  $S^1 \times D^2$  называется полноторием. Его краем является тор. Многообразие  $S^1 \times N^2$ , где  $N^2$  — диск с двумя дырками, называется ориентированным седлом [3]. Его край состоит из трёх торов.

На многообразии  $M_0^3 = f^{-1}(0)$  фиксируем ориентацию, определяемую ориентацией  $M^4$  и полем  $\text{grad } f$ . Ограничим гамильтониан  $H$  на  $M_0^3$ . Из теорем 1, 2 следует, что  $M_0^3$  расслоено на торы, являющиеся компонентами подмногообразий  $M_h^2 = H^{-1}(h)$ . Пусть  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число. Подмногообразие  $H^{-1}[h_i - \varepsilon; h_i + \varepsilon]$  при  $i = 1$  диффеоморфно полноторию, а при  $i \in \{2, 3\}$  — седлу. Слоение  $M_0^3$  на торы можно изобразить некомпактным графом, у которого вершина  $A$  отвечает полноторию, а вершины  $B$  — седлам (рис. 9). На каждом граничном торе многообразия  $H^{-1}[h_i - \varepsilon; h_i + \varepsilon]$  фиксируем ориентацию края. Сдвиги вдоль траекторий поля  $\text{grad } H$  порождают *склеивающие диффеоморфизмы*. Такие диффеоморфизмы связывают торы  $M_{h_1+\varepsilon}^2$ ,  $M_{h_2-\varepsilon}^2$  и пары торов  $M_{h_2+\varepsilon}^2$ ,  $M_{h_3-\varepsilon}^2$ . Матрицы склейки определяют изоморфизмы групп

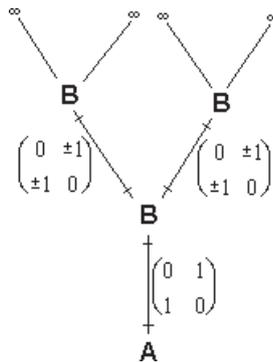


Рис. 9. Слоение нулевого уровня  $f$

$H_1(T^2, \mathbf{Z})$  граничных торов  $T^2$ , которые с точностью до гомотопий определяют склеивающие диффеоморфизмы (см. рис. 9). Заметим, что произвольная гомотопия  $j_h: T^2 \rightarrow M_0^3$ , связывающая некоторые граничные торы  $j_\alpha(T^2)$  и  $j_\beta(T^2)$  так, что

$$j_h(T^2) \subset H^{-1}(h) \text{ для каждого } h \in [\alpha; \beta],$$

порождает гомеоморфизм  $j_\alpha(p) \mapsto j_\beta(p)$  граничных торов, гомотопный склеивающему диффеоморфизму. Матрицы склейки зависят от циклов  $\lambda, \mu \subset T^2$ , которые образуют базисы групп  $H_1(T^2, \mathbf{Z})$  граничных торов  $T^2$ . Эти базисы мы выбираем так, чтобы на границе каждого полнотория и каждого седла набор  $\{(\lambda, \mu)\}$  образовывал *допустимую систему координат* [3] или чтобы этот набор можно было дополнить до допустимой системы координат. Такие базисы будем называть допустимыми

**Предложение 6.** Пусть  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число.

1. На торах  $M_{h_1+\varepsilon}^2$  и  $M_{h_2-\varepsilon}^2$  существуют такие допустимые базисы  $(\lambda_1, \mu_1)$  и  $(\lambda_2, \mu_2)$ , что соответствующая матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

2. На торах, являющихся компонентами  $M_{h_2+\varepsilon}^2$  и  $M_{h_3-\varepsilon}^2$ , существуют допустимые базисы  $(\lambda_2^\pm, \mu_2^\pm)$  и  $(\lambda_3^\pm, \mu_3^\pm)$  соответственно, в которых матрицы склейки совпадают и имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

**Доказательство.** Используя окружности, которые мы определили при доказательстве теоремы 4, введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \delta(h_1 + \varepsilon), & \mu_1 &= \gamma_+(h_1 + \varepsilon), \\ \lambda_2 &= \gamma_+(h_2 - \varepsilon), & \mu_2 &= \delta(h_2 - \varepsilon), \\ \lambda_2^\pm &= \beta_\pm(h_2 + \varepsilon), & \mu_2^\pm &= \alpha_{1,\pm}(h_2 + \varepsilon), \\ \lambda_3^\pm &= \alpha_{1,\pm}(h_3 - \varepsilon), & \mu_3^\pm &= \beta_\pm(h_3 - \varepsilon). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Поскольку при  $\varepsilon \rightarrow +0$  окружность  $\lambda_1$  стягивается в точку, она является меридианом полнотория  $H^{-1}[h_1; h_1 + \varepsilon]$ . Если зафиксировать соответствующие ориентации, то получается допустимый базис  $(\lambda_1, \mu_1)$ .

В пределе при  $\varepsilon \rightarrow +0$  окружность  $\lambda_2$ , а также каждая из окружностей  $\lambda_2^\pm$  совпадает с  $\gamma_2$ . Зафиксируем ориентации, которые определяет траектория  $\gamma_2$ . Окружность  $\delta(h)$  склеивается в восьмёрку и затем распадается на две окружности  $\delta_\pm(h)$ , когда  $h$  возрастает от  $h_2 - \varepsilon$  до  $h_2 + \varepsilon$  (теорема 4). Ясно, что в результате получается диск с двумя дырками (т. е.  $N^2$ ). Окружность  $\delta_+(h_2 + \varepsilon)$  гомотопна  $\mu_2^+$  в  $T_{h_2+\varepsilon}^2$ , а окружность  $\delta_-(h_2 + \varepsilon)$  гомотопна  $\mu_2^-$  в  $\sigma(T_{h_2+\varepsilon}^2)$ . Дело в том, что их  $\Lambda$ -проекции (сегмент параболы  $NL$  и отрезок  $[AF]$ ) не пересекаются (см. рис. 2). Следовательно, можно построить сечение  $\tilde{N}^2 \cong N^2$  седла

$H^{-1}[h_2 - \varepsilon; h_2 + \varepsilon] \cong N^2 \times S^1$ , у которого край состоит из окружностей  $\mu_2$  и  $\mu_2^\pm$ . Если соответствующие ориентации фиксированы, то получаются допустимые базисы  $(\lambda_2, \mu_2)$  и  $(\lambda_2^\pm, \mu_2^\pm)$ .

При  $\varepsilon \rightarrow +0$  каждая из окружностей  $\lambda_3^\pm$  сливается с одной из  $\gamma_3^\pm$ , а каждая из окружностей  $\mu_3^\pm$  склеивается в восьмёрку. Обозначим через  $\mu_3^{\pm,1}$  и  $\mu_3^{\pm,2}$  произвольные окружности в  $M_{h_3+\varepsilon}^2$ , склеивающиеся в эти восьмёрки при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , так, что при  $\varepsilon = 0$  мы имеем

$$\mu_3^{+,1} \cup \mu_3^{+,2} = \mu_3^+, \quad \mu_3^{-,1} \cup \mu_3^{-,2} = \mu_3^-.$$

Каждая из окружностей  $\mu_3^{\pm,1}$ ,  $\mu_3^{\pm,2}$  вложена в один из четырёх торov, составляющих многообразие  $M_{h_3+\varepsilon}^2$ . Выберем циклы  $\lambda_3^{\pm,1}$  и  $\lambda_3^{\pm,2}$  и зафиксируем ориентации так, чтобы получить допустимые системы координат на сёдлах, являющихся компонентами  $H^{-1}[h_3 - \varepsilon; h_3 + \varepsilon]$ .

Допустимые базисы построены. Вычислим матрицы склейки. Если  $\varepsilon = (h_2 - h_1)/2$  в первых двух формулах (5.5), то  $\lambda_1(\varepsilon) = \mu_2(\varepsilon)$  и  $\mu_1(\varepsilon) = \lambda_2(\varepsilon)$ . Эти равенства означают совпадение окружностей без учёта ориентаций. Следовательно, рассматривая *циклы* мы имеем

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon) \\ \mu_1(\varepsilon) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2(\varepsilon) \\ \mu_2(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, с точностью до знака матрица склейки имеет вид (5.3).

Докажем, что ориентации циклов  $\mu_1$  и  $\lambda_2$  при гомотопии совпадают. Проведём отрезок  $[SR]$  достаточно близко к  $[KF]$  (см. рис. 3). Для каждого  $h \in [h_1; h_2]$  на окружности  $\gamma_+(h)$  выберем такую непрерывно зависящую от  $h$  точку  $\tilde{P}(h)$ , что  $\Lambda(\tilde{P}(h)) \in [SR]$  и  $\Lambda(\tilde{P}(h)) = [KQ] \cap [SR]$  (см. рис. 3). Из (3.2) и (5.1) следует, что если  $\rho$  достаточно мало, то в каждой точке  $\tilde{P}(h)$  имеем

$$M_1\eta_3 - M_2\xi_3 = \pm r\sqrt{\rho} \cos\left(\psi - \frac{\alpha_0}{2}\right) \neq 0.$$

Следовательно, можно считать, что  $M_1\eta_3 - M_2\xi_3 > 0$  в каждой точке  $\tilde{P}(h)$ .

Пусть  $\tau$  — натуральный параметр на окружности  $\gamma_+(h)$ , задающий направление от точки  $P(h)$  к точке  $\tilde{P}(h)$ . Пусть  $t$  — время движения вдоль траектории, порождающей окружность  $\gamma_+(h_i)$ , где  $i = 1$  или  $i = 2$ . Пусть  $\tau = \tau_i$  и  $t = t_i$  в точке  $\tilde{P}(h_i)$ . В каждой точке  $P(h)$  имеем

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0,$$

и  $x = 0$  в точках  $P(h_i)$  (см. (5.1)). Очевидно, что  $\dot{\rho}(\tau) > 0$  (см. рис. 3). Из (2.3) и (3.2) следует, что знак  $\dot{y}(t_i)$  совпадает со знаком  $M_1\eta_3 - M_2\xi_3$  в точке  $\tilde{P}(h_i)$ , если  $\rho$  достаточно мало. Поскольку  $\rho$  мало, то  $\dot{y}(t_i) > 0$  при каждом  $i \in \{1, 2\}$ . Очевидно (см. рис. 3), что  $\dot{y}(\rho) > 0$  на каждой из окружностей  $\gamma_+(h_i)$ . Окончательно получаем, что  $\dot{t}(t_i) > 0$  при каждом  $i \in \{1, 2\}$ . Это значит, что на каждой из окружностей  $\gamma_+(h_i)$  параметры  $t$  и  $\tau$  задают одинаковые ориентации. Очевидно, что склеивающая гомотопия сохраняет ориентации, порождённые  $\tau$ . А так как ориентации циклов  $\mu_1$  и  $\lambda_2$  порождаются  $t$ , то гомотопия сохраняет

их. Следовательно, в допустимых базисах  $(\lambda_1, \mu_1)$  и  $(\lambda_2, \mu_2)$  матрица склейки имеет вид (5.3).

Из (5.5) следует, что в базисах  $(\lambda_2^+, \mu_2^+)$  и  $(\lambda_3^+, \mu_3^+)$ , а также в базисах  $(\lambda_2^-, \mu_2^-)$  и  $(\lambda_3^-, \mu_3^-)$  матрицы склейки имеют вид (5.4). Докажем, что эти две матрицы совпадают.

**Лемма 3.** *Симметрия  $\sigma$  обращает ориентации подмногообразий  $M^4$  и  $Q_h^3$  и сохраняет ориентацию  $M_0^3$ . Динамическая система,  $\sigma$ -симметричная системе (2.3), отличается от неё только направлением времени.*

Из леммы 3 следует, что симметрия  $\sigma: M_0^3 \rightarrow M_0^3$  сохраняет ориентацию края седла  $H^{-1}[h_2 - \varepsilon; h_2 + \varepsilon]$ , а также ориентацию края каждого из двух сёдел, составляющих  $H^{-1}[h_3 - \varepsilon; h_3 + \varepsilon]$ . Каждая из следующих пар окружностей  $\sigma$ -симметрична:  $\lambda_2^\pm, \lambda_3^\pm, \mu_2^\pm, \mu_3^\pm$ . При  $\varepsilon \rightarrow +0$  каждая из окружностей  $\lambda_2^\pm$  стремится к окружности  $\gamma_2$ . Пара окружностей  $\lambda_3^\pm$  стремится к  $\sigma$ -симметричной паре окружностей  $\gamma_3^\pm$ . Отсюда и из леммы 3 следует, что  $\sigma$  обращает ориентации циклов  $\lambda_2^\pm$  и  $\lambda_3^\pm$ . Поэтому, сохраняя ориентации граничных торов,  $\sigma$  обращает ориентации циклов  $\mu_2^\pm$  и  $\mu_3^\pm$ . Очевидно, что  $\sigma$ -симметрия склеивающей гомотопии также является склеивающей гомотопией. Следовательно, матрица склейки в базисах  $(\lambda_2^-, \mu_2^-)$  и  $(\lambda_3^-, \mu_3^-)$  совпадает с матрицей склейки в базисах  $(\lambda_2^+, \mu_2^+)$  и  $(\lambda_3^+, \mu_3^+)$ . Поясним это. Предположим, для примера, что склеивающая гомотопия переводит цикл  $\lambda_2^+$  в цикл  $\mu_3^+$ , а цикл  $\mu_2^+$  в цикл  $\lambda_3^+$ . Следовательно, некоторая склеивающая гомотопия переводит цикл  $\sigma(\lambda_2^+) = -\lambda_2^-$  в цикл  $\sigma(\mu_3^+) = -\mu_3^-$ , а цикл  $\sigma(\mu_2^+) = -\mu_2^-$  в цикл  $\sigma(\lambda_3^+) = -\lambda_3^-$ . Но тогда она совмещает циклы  $\lambda_2^-$  и  $\mu_3^-$ , а также  $\mu_2^-$  и  $\lambda_3^-$ . Это означает, что каждая из двух матриц склейки имеет одинаковый вид. Предложение 6 доказано.  $\square$

## 6. Инварианты Фоменко—Цишанга

**Теорема 5.** *Инварианты  $W^*(Q_h^3)$ , вычисленные для всех регулярных  $h \neq h_0$ , представлены на рис. 10—13.*

**Доказательство.** Конструкции молекул  $W(Q_h^3)$  прямо следуют из теорем 2, 3, 4. Ясно, что каждое регулярное многообразие  $Q_h^3$  склеено из полноторий и сёдел.

Пусть  $M_\varphi^3 = f^{-1}(\varphi)$  и  $Q_h^3 = H^{-1}(h)$ . Обозначим через  $f_h$  функцию  $f: Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$  и через  $H_\varphi$  функцию  $H: M_\varphi^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Критические значения  $f_h$  согласно теореме 2 обозначаем  $f_i^\pm$  или  $f_i^\pm(h)$ . Следовательно, бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  является объединением четырёх кривых  $f_i$ , где  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (рис. 14).

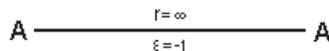


Рис. 10. Инварианты Фоменко—Цишанга при  $h_1 < h < h_2$

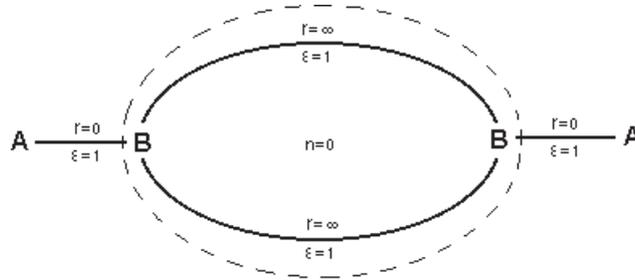


Рис. 11. Инварианты Фоменко—Цишанга при  $h_2 < h < h_0$

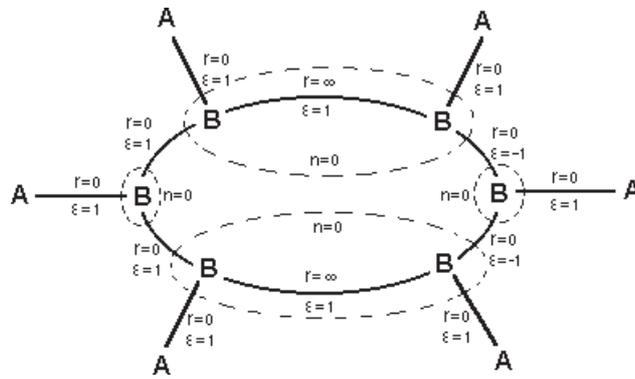


Рис. 12. Инварианты Фоменко—Цишанга при  $h_0 < h < h_3$

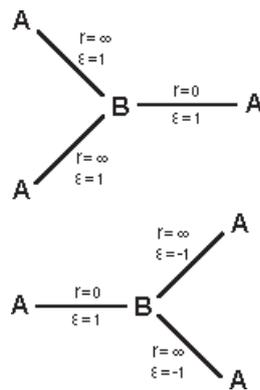


Рис. 13. Инварианты Фоменко—Цишанга при  $h > h_3$

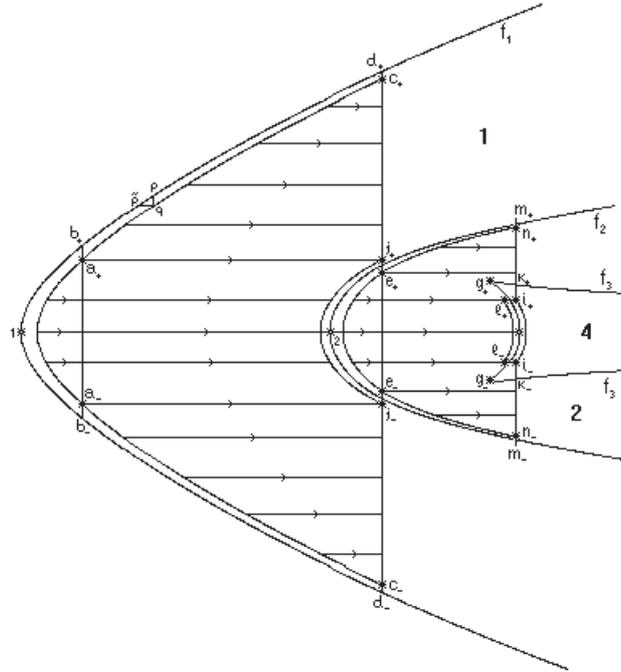


Рис. 14. Склеивающие гомотопии при  $h_1 < h < h_3$

Кривые  $f_i$  называются *ветвями* диаграммы. Заметим, что ветвь  $f_3$  состоит из двух кривых, симметричных относительно прямой  $f = 0$ . Ветви ограничивают *регулярные области*, которые отмечены как 1, 2, 4 — в соответствии с числом торов над каждой точкой  $(h, \varphi)$ . Каждый из этих торов мы обозначаем  $T^2(h, \varphi)$ . Подмногообразие  $\{H = h, f = \varphi\}$  обозначим  $M^2(h, \varphi)$ . Его связными компонентами являются торы, также обозначаемые  $T^2(h, \varphi)$ . Будем говорить, что точка  $q = (h, \varphi) \notin \Sigma$  бесконечно близка к бифуркационной диаграмме (или к ветви  $f_i$ ), если расстояние от  $q$  до некоторой ветви  $f_i$  произвольно мало. Например, точка  $q$  на рис. 14 бесконечно близка к ветви  $f_1$ .

В дальнейшем нам потребуются следующие замечания. Возьмём точку  $q = (h, \varphi)$ , бесконечно близкую к ветви  $f_i$ , где  $i \in \{2, 4\}$ . Очевидно, что на ветви  $f_i$  найдётся такая пара точек  $p$  и  $\tilde{p}$ , что  $p$  и  $q$  лежат на одной вертикали, а  $\tilde{p}$  и  $q$  на одной горизонтали. Значения  $f_2^\pm(h)$  и  $f_4^\pm(h)$  являются седловыми, следовательно, точка  $p$  отвечает окружности  $S^1$ , являющейся седловой критической для функции  $f_h$ , а точка  $\tilde{p}$  отвечает окружности  $\tilde{S}^1$ , являющейся седловой критической для функции  $H_\varphi$ . Сепаратрисные диаграммы окружностей  $S^1$  и  $\tilde{S}^1$

определяют на торе  $T^2(h, \varphi)$  циклы  $\lambda$  и  $\tilde{\lambda}$  [3]. Окружность  $\lambda$  бесконечно близка к  $S^1$ , а окружность  $\tilde{\lambda}$  бесконечно близка к  $\tilde{S}^1$ . Интегральные траектории, порождающие седловые окружности  $S^1$  и  $\tilde{S}^1$ , также бесконечно близки друг к другу. Следовательно, циклы  $\lambda$  и  $\tilde{\lambda}$  гомотопны на торе  $T^2(h, \varphi)$ , т. е. *эти циклы равны*.

Аналогично, пусть точка  $q = (h, \varphi)$  бесконечно близка к ветви  $f_i$ , где  $i \in \{1, 3\}$ . Циклы  $\lambda$  и  $\tilde{\lambda}$ , возникающие на торе  $T^2(h, \varphi)$ , являются меридианами двух полноторий, одно из которых вложено в  $Q_h^3$ , а другое в  $M_\varphi^3$ . На рис. 14 первому полноторию отвечает отрезок  $[pq]$ , а второму — отрезок  $[\tilde{p}q]$ . Очевидно, что одно из полноторий можно непрерывно трансформировать в другое так, чтобы тор  $T^2(h, \varphi)$  оставался неподвижным. Поскольку циклы  $\lambda$  и  $\tilde{\lambda}$  являются меридианами общего полнотория, то они гомотопны на торе  $T^2(h, \varphi)$ . Однако их ориентации могут оказаться различными, т. е. эти циклы равны с точностью до знака.

**Лемма 4.** Пусть  $\varphi \neq 0$  и точка  $q = (h, \varphi)$  одной из регулярных областей бесконечно близка к ветви  $f_i$ . Соединим  $q$  с  $f_i$  двумя отрезками: вертикальным  $[pq]$  и горизонтальным  $[\tilde{p}q]$ . Пусть  $k \neq 0$  есть угловой коэффициент касательной к кривой  $f_i$  в произвольной точке, лежащей между  $p$  и  $\tilde{p}$ . Тогда две ориентации края, индуцированные на  $M^2(h, \varphi)$  из многообразий  $Q_h^3$  и  $M_\varphi^3$ , равны при  $k > 0$  и противоположны при  $k < 0$ .

## 6.1. Метки

Пусть  $\delta$  обозначает достаточно малое положительное число. Мы хотим явно построить склеивающие гомотопии на каждом регулярном многообразии  $Q_h^3$ . Произвольная гомотопия граничного тора, при которой он непрерывно переходит с одного уровня функции  $f_h$  на другой, будет считаться склеивающей. Матрицы склейки, вычисленные в допустимых базисах, определяют конечный набор числовых инвариантов (меток), не зависящий от выбора допустимых базисов [3]. Существует три вида меток:  $r$ ,  $\varepsilon$ ,  $n$ ,

$$r \in \mathbb{Q} \text{ и } 0 \leq r < 1 \text{ или } r = \infty, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Метки  $r$  и  $\varepsilon$  соответствуют рёбрам молекулы  $W(Q_h^3)$ , а метки  $n$  соответствуют *семьям атомов*. Семья отвечает максимальной зейфертовой компоненте  $Q_h^3$  [3]. На рис. 11, 12 семьи выделены пунктирной линией, а на рис. 10, 13 семей нет.

В дальнейшем отображение момента  $(H, f): \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  будет называться *проекцией*. Пусть  $\nabla H_\varphi$  есть векторное поле  $\text{grad } H_\varphi$ . Интегральные траектории  $\nabla H_\varphi$  изображены стрелками (рис. 14, 15).

## 6.2. Метки при $h_1 < h < h_2$

Согласно теореме 1 окружность  $\gamma_1$  порождена замкнутой интегральной траекторией. Замкнутые траектории, отвечающие всевозможным значениям  $f_1^\pm(h)$ , вместе с  $\gamma_1$  организованы в непрерывное семейство, проектирующееся на ветвь  $f_1$  (см. рис. 14). Окружность  $\gamma_1$  проектируется в точку 1. Кривая  $a_-a_+$

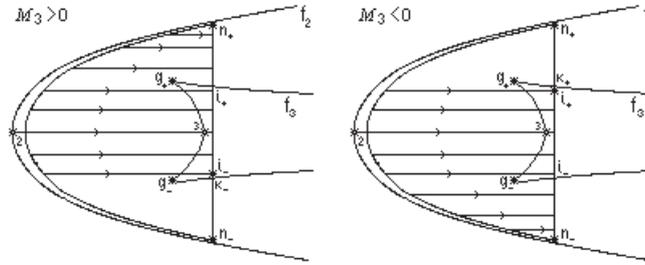


Рис. 15. Склеивающие гомотопии при  $h > h_3$

получена сдвигом  $f_1$  на  $\delta$  вправо. Очевидно, что на каждом торе  $T^2(h, \varphi)$ , проектирующемся в точку кривой  $a_-a_+$ , существует непрерывно зависящий от  $\varphi$ , допустимый в  $\mathcal{M}_\varphi^3$  базис  $(\lambda_1(\varphi), \mu_1(\varphi))$ , такой что

$$(\lambda_1(0), \mu_1(0)) = (\lambda_1, \mu_1).$$

Ясно (см. рис. 10), что  $Q_h^3$  склеено из полноторий  $f_h^{-1}[\varphi_+; f_1^+(h)]$  и  $f_h^{-1}[f_1^-(h); \varphi_-]$ , проектирующихся на отрезки  $[a_+; b_+]$  и  $[b_-; a_-]$  (см. рис. 14). Если  $h' \leq h$  и  $\varphi_- \leq \varphi \leq \varphi_+$ , то каждый тор  $T^2(h', \varphi)$ , проектирующийся в точку кривой  $a_-a_+$ , мы сдвинем вдоль траекторий поля  $\nabla H_\varphi$  на уровень  $H = h$ . Очевидно, что в  $Q_h^3$  мы получим склеивающую гомотопию, проектирующуюся на отрезок  $[a_-; a_+]$ , которая трансформирует тор  $T^2(h, \varphi_-)$  в тор  $T^2(h, \varphi_+)$ . При этой гомотопии базис  $(\lambda_1(\varphi_-), \mu_1(\varphi_-))$  переходит в базис  $(\lambda_1(\varphi_+), \mu_1(\varphi_+))$ . Из леммы 4 следует, что базисы  $(-\lambda_1(\varphi_-), \mu_1(\varphi_-))$  на  $T^2(h, \varphi_-)$  и  $(\lambda_1(\varphi_+), \mu_1(\varphi_+))$  на  $T^2(h, \varphi_+)$  являются допустимыми относительно  $Q_h^3$ . В этих базисах матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из матрицы находим метки [3]:  $r = -1/0 = \infty$ ,  $\varepsilon = \text{sgn}(-1) = -1$ ,  $n$ -меток нет, поскольку отсутствуют семьи атомов.

### 6.3. Метки при $h_2 < h < h_0$

Обозначим через  $T^2(h, \varphi)$  тор, являющийся прообразом точки  $(h, \varphi)$  из регулярной области 1, и через  $T_\pm^2(h, \varphi)$  торы, являющиеся связными компонентами прообраза точки  $(h, \varphi)$  из области 2 (см. рис. 14). Торы  $T_\pm^2(h, \varphi)$  являются  $\sigma$ -симметричными.

Замкнутые траектории, отвечающие всевозможным значениям  $f_2^\pm(h)$ , вместе с  $\gamma_2$  организованы в непрерывное семейство, проектирующееся на ветвь  $f_2$  (см. рис. 14). Окружность  $\gamma_2$  проектируется в точку 2. Кривые  $j_-j_+$  и  $e_-e_+$  получены из  $f_2$  посредством сдвига на  $\delta$  влево и вправо. На каждом торе  $T^2(h, \varphi)$ , проектирующемся в точку кривой  $j_-j_+$ , существует непрерывно зависящий от  $\varphi$ ,

допустимый в  $\mathcal{M}_\varphi^3$  базис  $(\lambda_2(\varphi), \mu_2(\varphi))$ , такой что

$$(\lambda_2(0), \mu_2(0)) = (\lambda_2, \mu_2).$$

На каждом торе  $T_\pm^2(h, \varphi)$ , проектирующемся в точку кривой  $e_-e_+$ , существует непрерывно зависящий от  $\varphi$ , допустимый в  $\mathcal{M}_\varphi^3$  базис  $(\lambda_2^\pm(\varphi), \mu_2^\pm(\varphi))$ , такой что

$$(\lambda_2^\pm(0), \mu_2^\pm(0)) = (\lambda_2^\pm, \mu_2^\pm).$$

Ясно (см. рис. 11), что  $Q_h^3$  склеено из двух полноторий, проектирующихся на отрезки  $[c_+; d_+]$  и  $[d_-; c_-]$ , и двух седел, проектирующихся на отрезки  $[e_+; j_+]$  и  $[j_-; e_-]$  (см. рис. 14). Сёдла склеены друг с другом по двум парам граничных торов. Найдём матрицы склейки седел. Рассуждения, аналогичные проведённым в разделе 6.2, показывают, что существуют две склеивающие гомотопии в  $Q_h^3$ , проектирующиеся на отрезок  $[e_-; e_+]$ . Эти гомотопии переводят пару базисов  $(\lambda_2^\pm(\varphi_-), \mu_2^\pm(\varphi_-))$  над точкой  $e_-$  в пару базисов  $(\lambda_2^\pm(\varphi_+), \mu_2^\pm(\varphi_+))$  над точкой  $e_+$ . Из леммы 4 следует, что базисы  $(\lambda_2^\pm(\varphi_-), -\mu_2^\pm(\varphi_-))$  в  $T_\pm^2(h, \varphi_-)$  и базисы  $(\lambda_2^\pm(\varphi_+), \mu_2^\pm(\varphi_+))$  в  $T_\pm^2(h, \varphi_+)$  являются допустимыми относительно  $Q_h^3$ . В этих базисах обе матрицы склейки имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из матриц находим метки:  $r = 1/0 = \infty$ ,  $\varepsilon = \text{sgn}(1) = 1$ .

Найдём матрицы склейки седел с полноториями. Пусть  $j_+ = (h, \varphi_1)$  и  $c_+ = (h, \varphi_2)$  (см. рис. 14). Если  $h' \leq h$  и  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , то каждый тор  $T^2(h', \varphi)$ , проектирующийся в точку кривой  $a_-a_+$ , мы сдвигаем вдоль траекторий  $\nabla H_\varphi$  на уровень  $H = h$ . Очевидно, что мы получим склеивающую гомотопию в  $Q_h^3$ , проектирующуюся на отрезок  $[j_+c_+]$ , которая трансформирует тор  $T^2(h, \varphi_1)$  в тор  $T^2(h, \varphi_2)$ . Из предложения 6 следует, что при сдвиге вдоль траекторий поля  $\nabla H_0$  базис  $(\lambda_1, \mu_1)$  превращается в базис  $(\mu_2, \lambda_2)$ . Следовательно, при сдвиге вдоль траекторий  $\nabla H_\varphi$  *каждый* базис  $(\lambda_1(\varphi), \mu_1(\varphi))$  превращается в базис  $(\mu_2(\varphi), \lambda_2(\varphi))$ . Следовательно, при склеивающей гомотопии базис  $(\lambda_2(\varphi_1), \mu_2(\varphi_1))$  переходит в базис  $(\mu_1(\varphi_2), \lambda_1(\varphi_2))$ . Из леммы 4 следует, что базисы  $(\lambda_2(\varphi_1), \mu_2(\varphi_1))$  и  $(\lambda_1(\varphi_2), \mu_1(\varphi_2))$  являются допустимыми относительно  $Q_h^3$ . В этих базисах матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Для второй пары седло—полноторие рассуждения аналогичны, и склеивающая гомотопия проектируется на отрезок  $[c_-j_-]$  (см. рис. 14). При этой гомотопии базис  $(\mu_1(\varphi_2), \lambda_1(\varphi_2))$  над точкой  $c_-$  превращается в базис  $(\lambda_2(\varphi_1), \mu_2(\varphi_1))$  над точкой  $j_-$ . Базисы  $(-\lambda_1(\varphi_2), \mu_1(\varphi_2))$  и  $(\lambda_2(\varphi_1), -\mu_2(\varphi_1))$  являются допустимыми в  $Q_h^3$ , следовательно, матрица склейки также имеет вид (6.1). Отсюда  $r = 0/1 = 0$  и  $\varepsilon = \text{sgn}(1) = 1$ . Единственная семья состоит из двух В-атомов и на рис. 11 выделена пунктиром. Из вида матриц склейки следует, что соответствующая  $n$ -метка равна нулю [3].

### 6.4. Метки при $h_0 < h < h_3$

При переходе через уровень  $h = h_0$  многообразие  $Q_h^3$  не испытывает топологической перестройки, так как  $h_0$  не является критическим значением  $H$ . Однако слоение Лиувилля на  $Q_h^3$  претерпевает бифуркацию: «из ничего» появляются четыре новых атома типа А (см. рис. 11, 12). Обозначим через  $T_{\pm,1}^2(h, \varphi)$  и  $T_{\pm,2}^2(h, \varphi)$  торы, являющиеся компонентами прообраза точки  $(h, \varphi)$  из регулярной области 4 (см. рис. 14). При этом торы  $T_{+,b}^2(h, \varphi)$  и  $T_{-,b}^2(h, -\varphi)$   $\sigma$ -симметричны для каждого  $b \in \{1, 2\}$ . Каждый из торов  $T_{\pm}^2(h, \varphi)$  распадается на два,  $T_{\pm,1}^2(h, \varphi)$  и  $T_{\pm,2}^2(h, \varphi)$ , когда точка  $(h, \varphi)$  из области 2, движущаяся в область 4, пересекает ветвь  $f_4$ .

Точки  $g_{\pm}$  являются проекциями вырожденных критических окружностей  $f_0^{\pm}$ . Замкнутые траектории, отвечающие всевозможным значениям  $f_4^{\pm}(h)$ , вместе с  $\gamma_3^{\pm}$  организованы в два непрерывных семейства, проектирующихся на ветвь  $f_4$ , т. е. на кривую  $g_-g_+$  (см. рис. 14). Выберем сегмент кривой  $g_-g_+$ , заключённый между двумя произвольными точками, расположенными бесконечно близко к  $g_+$  и  $g_-$ . Кривые  $l_-l_+$  и  $i_-i_+$  получены из этого сегмента сдвигами влево и вправо на  $\delta$  (точки  $i_{\pm}$  должны оставаться в регулярной области 4).

На каждом торе  $T_{\pm}^2(h, \varphi)$ , проектирующемся в точку кривой  $l_-l_+$ , существует непрерывно зависящий от  $\varphi$ , допустимый в  $\mathcal{M}_{\varphi}^3$  базис  $(\lambda_3^{\pm}(\varphi), \mu_3^{\pm}(\varphi))$ , такой что

$$(\lambda_3^{\pm}(0), \mu_3^{\pm}(0)) = (\lambda_3^{\pm}, \mu_3^{\pm}).$$

Пусть  $b \in \{1, 2\}$ . На каждом торе  $T_{\pm,b}^2(h, \varphi)$ , проектирующемся в точку кривой  $i_-i_+$ , существует непрерывно зависящий от  $\varphi$ , допустимый в  $\mathcal{M}_{\varphi}^3$  базис  $(\lambda_3^{\pm,b}(\varphi), \mu_3^{\pm,b}(\varphi))$ , такой что

$$(\lambda_3^{\pm,b}(0), \mu_3^{\pm,b}(0)) = (\lambda_3^{\pm,b}, \mu_3^{\pm,b}).$$

При  $\delta \rightarrow +0$  каждая пара окружностей  $\mu_3^{\pm,1}(\varphi)$  и  $\mu_3^{\pm,2}(\varphi)$  склеивается в восьмёрку. Одновременно окружность  $\mu_3^{\pm}(\varphi)$  склеивается в эту же восьмёрку (всего получаются две различные восьмёрки).

Пусть  $\varphi \neq 0$ . Только один из торов  $T_{+,1}^2(h, \varphi)$  и  $T_{+,2}^2(h, \varphi)$ , а также только один из торов  $T_{-,1}^2(h, \varphi)$  и  $T_{-,2}^2(h, \varphi)$  связаны с полноториями посредством сдвигов вдоль траекторий  $\text{grad } f$  (эти два полнотория проектируются на отрезки  $[i_+; k_+]$  и  $[i_-; k_-]$ ). Базисы на этих торах обозначим  $(\lambda_3^{\pm,m}(\varphi), \mu_3^{\pm,m}(\varphi))$  ( $m$  обозначает  $\max$  или  $\min$ ). Каждый из оставшихся торов, являющихся компонентами  $M^2(h, \varphi)$ , связан с двумя седлами (см. рис. 12). Базисы на этих торах обозначим  $(\lambda_3^{\pm,s}(\varphi), \mu_3^{\pm,s}(\varphi))$  ( $s$  обозначает saddle).

Согласно предложению 6 при сдвиге вдоль траекторий поля  $\nabla H_0$  базис  $(\lambda_2^{\pm}, \mu_2^{\pm})$  превращается в базис  $\{\pm\}(\mu_3^{\pm}, \lambda_3^{\pm})$ . Поскольку точное значение  $\{\pm\}$  не существенно, мы можем (и будем) считать, что этот знак есть  $+$ .

Ясно, что при  $f_0^- < \varphi < f_0^+$  сдвиг вдоль траекторий  $\nabla H_{\varphi}$  превращает базис  $(\lambda_2^{\pm}(\varphi), \mu_2^{\pm}(\varphi))$  в базис  $(\mu_3^{\pm}(\varphi), \lambda_3^{\pm}(\varphi))$ . Однако в данном случае сдвиг на уровень  $H = h$  не является гомотопией, поскольку тор  $T_{\pm}^2(h', \varphi)$ , проходя через седло над кривой  $g_-g_+$ , распадается на два (см. рис. 14). Один из этих торов

стягивается на критическую окружность, отвечающую ветви  $f_3$ , а другой уходит в бесконечность, дрейфуя в потоке  $\nabla H_\varphi$ . Этот последний тор, пришедший на уровень  $H = h$ , будет называться *трансформацией* тора  $T_\pm^2(h', \varphi)$ . Очевидно (см. рис. 14), что в случае  $|\varphi| > f_0^+$  при трансформации не происходит никакой топологической перестройки. При  $\varphi = f_0^\pm$  у тора  $T_\pm^2(h_0, \varphi)$  появляется негладкая особенность. Это «ребро», образованное вырожденной критической окружностью значения  $f_0^\pm$ .

**Лемма 5.** Пусть точка  $(h, \varphi)$  принадлежит кривой  $i_-i_+$  (см. рис. 14). Соединим эту точку вертикальным отрезком  $D^1$  с ближайшей ветвью  $f_3$ . Тогда цикл  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  является меридианом полнотория  $\mathcal{A}_\pm^3$ , проектирующегося на  $D^1$  и являющегося малой нормальной окрестностью критической окружности  $f_3^\pm(h)$ .

**Доказательство.** Можно считать, что  $D^1$  есть отрезок  $[i_+; k_+]$  (см. рис. 14), тогда окружность  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  проектируется в точку  $i_+$ . Когда отрезок  $[i_+; k_+]$  стягивается в точку  $k_+ \in f_3$ , полноторие  $\mathcal{A}_\pm^3$  стягивается на максимальную окружность  $S_+^1$  значения  $f_3^+(h)$ . Предположим, что при этом окружность  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi) \subset \subset \partial \mathcal{A}_\pm^3$  не стягивается в точку  $S_+^1$ . Тогда она стягивается на окружность  $S_+^1$ , накрывая её  $n > 0$  раз. Очевидно, что то же самое происходит с окружностью  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  в потоке  $\nabla H_\varphi$ : она стягивается на критическую окружность, которая проектируется в точку  $(h', \varphi)$  ветви  $f_3$ .

Окружность  $\beta_+(h)$  склеивается в восьмёрку при  $h \rightarrow h_3 - 0$  (см. раздел 5), и распадается на две при  $h > h_3$ . Эта восьмёрка проектируется на сегмент параболы, проходящий через точки  $A, G$  и  $C$  (см. рис. 1). Если  $\varphi$  достаточно мало, то  $\Lambda$ -проекция окружности  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  представляет собой кривую внутри шестиугольника  $ABCDEF$ , как угодно близкую к этому сегменту. Почти всюду на многообразии  $\mathcal{M}_\varphi^3$  существуют локальные координаты  $M_3, \rho, y$ . Из (3.3) следует, что, когда окружность  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  дрейфует в потоке  $\nabla H_\varphi$ , её  $\Lambda$ -проекция удаляется от отрезка  $[AF]$  в направлении отрезка  $[BC]$ . Из (4.3) видно, что  $\Lambda$ -проекция максимальной окружности  $f_3^+(h)$  (см. рис. 8) равномерно стремится к отрезку  $[AF]$  при  $h \rightarrow +\infty$  (так как  $\rho \rightarrow 0$ ). Следовательно, если  $\varphi$  достаточно мало, то окружность  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  не может стягиваться на максимальную окружность над ветвью  $f_3$ , дрейфуя в потоке  $\nabla H_\varphi$ . Ясно, что то же самое имеет место при любом  $\varphi$ . Лемма доказана.  $\square$

Заметим, что обе ветви  $f_3$  неограниченно приближаются к горизонтальной прямой  $f = 0$  при  $h \rightarrow +\infty$  (см. рис. 4).

Вычислим матрицы склейки над рёбрами В–В, возникшими вместе с новыми А-атомами (см. рис. 12). Рассмотрим седло  $f_h^{-1}[f_2^+(h) - \delta; f_2^+(h) + \delta]$ , проектирующееся на отрезок  $[n_+; m_+]$  (см. рис. 14), а также склеенную с ним пару сёдел. Эти сёдла являются связными компонентами  $f_h^{-1}[f_4^+(h) - \delta; f_4^+(h) + \delta]$ . При склейке пара торов над точкой  $i_+$  (граничных для «нижних» сёдел) отождествляется с парой торов над точкой  $n_+$  (граничащих с «верхним» седлом). Можно считать, что точки  $i_+$  и  $n_+$  имеют координаты  $(h, \varphi_1)$  и  $(h, \varphi_2)$ , где  $\varphi_1 = f_4^+(h) + \delta$  и  $\varphi_2 = f_2^+(h) - \delta$ .

Если  $h' \leq h$  и  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , то каждый тор  $T_{\pm}^2(h', \varphi)$ , проектирующийся в точку кривой  $e_-e_+$ , подвергнем трансформации на уровень  $H = h$ . Тогда мы снова получим в  $Q_h^3$  склеивающую гомотопию, проектирующуюся на отрезок  $[i_+; n_+]$  (см. рис. 14), которая трансформирует тор  $T_{\pm, s}^2(h, \varphi_1)$  в тор  $T_{\pm}^2(h, \varphi_2)$ . Очевидно, что при трансформации цикл  $\mu_3^{\pm, s}(\varphi)$  превращается в цикл  $-\mu_3^{\pm, s}(\varphi)$ , а цикл  $\lambda_3^{\pm}(\varphi)$  — в цикл  $\lambda_3^{\pm, s}(\varphi)$ . Следовательно, склеивающая гомотопия переводит базис  $(\lambda_3^{\pm, s}(\varphi_1), -\mu_3^{\pm, s}(\varphi_1))$  в базис  $(\mu_2^{\pm}(\varphi_2), \lambda_2^{\pm}(\varphi_2))$ . Из леммы 4 следует, что базисы  $(\lambda_3^{\pm, s}(\varphi_1), -\mu_3^{\pm, s}(\varphi_1))$  и  $(\lambda_2^{\pm}(\varphi_2), \mu_2^{\pm}(\varphi_2))$  являются допустимыми в  $Q_h^3$ . В этих базисах матрицы склейки имеют вид (6.1).

Аналогичные гомотопии, проектирующиеся на отрезок  $[i_-; n_-]$ , склеивают пару седел  $f_h^{-1}[f_4^-(h) - \delta; f_4^-(h) + \delta]$  с седлом  $f_h^{-1}[f_2^-(h) - \delta; f_2^-(h) + \delta]$  (отрезок  $[m_-; n_-]$  на рис. 14). При этих гомотопиях базис  $(\lambda_3^{\pm, s}(\varphi_1), -\mu_3^{\pm, s}(\varphi_1))$  переходит в базис  $(\mu_2^{\pm}(\varphi_2), \lambda_2^{\pm}(\varphi_2))$ . По лемме 4 базис  $(\lambda_3^{\pm, s}(\varphi_1), \mu_3^{\pm, s}(\varphi_1))$ , а также базис  $(\lambda_2^{\pm}(\varphi_2), -\mu_2^{\pm}(\varphi_2))$  являются допустимыми в  $Q_h^3$ . В этих базисах матрицы склейки отличаются от (6.1) только знаками.

Найдём матрицы склейки седел с полноториями, возникшими вместе с новыми А-атомами при  $h > h_0$  (см. рис. 12). Согласно лемме 5 цикл  $\mu_3^{\pm, m}(\varphi)$  можно включить в допустимый базис полнотория в  $Q_h^3$ , отвечающего ветви  $f_3$  (см. рис. 14). Возьмём произвольное полноторие над отрезком  $[i_+; k_+]$ , являющееся компонентой подмногообразия  $f_h^{-1}[f_3^+(h) - \delta; f_3^+(h)]$ , и склеенное с ним седло, являющееся компонентой  $f_h^{-1}[f_4^+(h) - \delta; f_4^+(h) + \delta]$ . Можно считать, что тор  $T_+^2(h, \varphi_0)$  над точкой  $i_+$  одновременно граничит с полноторием и седлом, т. е. что

$$\varphi_0 = f_3^+(h) - \delta = f_4^+(h) + \delta.$$

Согласно лемме 4 базис  $(\lambda_3^{+, m}(\varphi_0), -\mu_3^{+, m}(\varphi_0))$  является допустимым на торе  $T_+^2(h, \varphi_0)$  как на крае седла, а базис  $(-\mu_3^{+, m}(\varphi_0), \lambda_3^{+, m}(\varphi_0))$  является допустимым на этом торе как на крае полнотория. Следовательно, матрица склейки имеет вид (6.1). В точке  $i_-$  получим тот же результат.

Из вида матриц склейки следует, что все четыре  $n$ -метки равны нулю [3].

## 6.5. Метки при $h > h_3$

Если  $h < h_3$ , то множество

$$Q_h^3 \cap \{M_3 = 0\}$$

проектируется на отрезок  $[KL]$  (см. рис. 2, 3). При  $h > h_3$  это множество пусто, и  $Q_h^3$  состоит из двух связанных  $\sigma$ -симметричных компонент, отвечающих противоположным знакам координаты  $M_3$  (см. рис. 1). Из теоремы 2 следует, что компонента  $\{M_3 > 0\}$  содержит критические окружности  $f_1^+(h)$ ,  $f_2^+(h)$  и пару критических окружностей  $f_3^-(h)$ . Компонента  $\{M_3 < 0\}$  содержит окружности  $f_1^-(h)$ ,  $f_2^-(h)$  и пару критических окружностей  $f_3^+(h)$ . Этим компонентам  $Q_h^3$  отвечают две различные молекулы (см. рис. 13).

Рассмотрим компоненту  $M_3 > 0$ . Вычислим матрицы склейки седла  $f_h^{-1}[f_2^+(h) - \delta; f_2^+(h) + \delta]$  с двумя полноториями, являющимися связными компонентами  $f_h^{-1}[f_3^-(h); f_3^-(h) + \delta]$ . Граничные торы полноторий проектируются в точку  $i_-$ , а склеенные с ними граничные торы седла — в точку  $n_+$  (см. рис. 15). Окружности  $\gamma_3^\pm$  проектируются в точку 3. Вдоль этих окружностей подмногообразие  $Q_h^3$  распадается на две связные компоненты, когда  $h$  проходит через значение  $h_3$ .

Будем считать, что точки  $i_-$  и  $n_+$  имеют координаты  $(h, \varphi_1)$  и  $(h, \varphi_2)$ , где  $\varphi_1 = f_3^-(h) + \delta$  и  $\varphi_2 = f_2^+(h) - \delta$ . В пределе при  $\varphi \rightarrow +0$  тор  $T_{+,s}^2(h', \varphi)$  совпадает с одним из торов  $T_{+,b}^2(h_3 + \delta, 0)$  ( $b \in \{1, 2\}$ ). Обозначим его  $T_0^2$ . Семейство всех торов  $T_{+,s}^2(h', \varphi)$ , где  $\varphi > 0$ , непрерывно продолжается тором  $T_0^2$  и торами  $T_{+,m}^2(h', \varphi)$  при  $\varphi < 0$ . Из леммы 5 легко получить следующее утверждение. Если  $\varphi < 0$ , то сдвинем каждый цикл  $\mu_3^{+,m}(\varphi)$  вдоль траекторий  $\nabla H_\varphi$ . Тогда мы получим меридиан полнотория в  $Q_h^3$ , отвечающего минимальной окружности значения  $f_3^-(h)$ . Это полноторие проектируется на отрезок  $[i_-; k_-]$  (см. рис. 15).

Трансформация, определённая в разделе 6.4, может быть продолжена на семейство торов  $T_+^2(h', \varphi)$  над кривой  $n_-n_+$ , где  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ . Аналогично тому, как это было сделано в разделе 6.4, мы получим склеивающую гомотопию тора  $T_{+,m}^2(h, \varphi_1)$  на тор  $T_+^2(h, \varphi_2)$ , которая проектируется на отрезок  $[i_-; n_+]$ . Если  $\varphi > 0$ , то при трансформации цикл  $\mu_3^+(\varphi)$  превращается в цикл  $-\mu_3^{+,s}(\varphi)$ , а цикл  $\lambda_3^+(\varphi)$  превращается в цикл  $\lambda_3^{+,s}(\varphi)$ . Если же  $\varphi < 0$ , то при трансформации цикл  $\mu_3^+(\varphi)$  превращается в цикл  $-\mu_3^{+,m}(\varphi)$ , а цикл  $\lambda_3^+(\varphi)$  превращается в цикл  $\lambda_3^{+,m}(\varphi)$ . Следовательно, при склеивающей гомотопии базис  $(\lambda_3^{+,m}(\varphi_1), -\mu_3^{+,m}(\varphi_1))$  переходит в базис  $(\mu_2^+(\varphi_2), \lambda_2^+(\varphi_2))$ . Из леммы 4 следует, что базисы  $(\mu_3^{+,m}(\varphi_1), \lambda_3^{+,m}(\varphi_1))$  и  $(\lambda_2^+(\varphi_2), \mu_2^+(\varphi_2))$  являются допустимыми в  $Q_h^3$ . В этих базисах матрица склейки выглядит, как матрица (1) в (6.2):

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Точно такая же матрица отвечает второму полноторию над  $[i_-; k_-]$ . Находим метки:  $r = -1/0 = \infty$  и  $\varepsilon = \text{sgn}(-1) = -1$ . Семей в данном случае нет [3].

В компоненте  $\{M_3 < 0\}$  аналогичная гомотопия проектируется на отрезок  $[i_+; n_-]$  (см. рис. 15). Положим  $i_+ = (h, \varphi_1)$  и  $n_- = (h, \varphi_2)$ . Базисы  $(-\mu_3^{\pm,m}(\varphi_1), \lambda_3^{\pm,m}(\varphi_1))$  и  $(\lambda_2^\pm(\varphi_2), -\mu_2^\pm(\varphi_2))$  являются допустимыми в  $Q_h^3$ . По этой причине матрицы склейки, рассмотренные выше, изменили свои знаки на противоположные и выглядят как матрица (2) в (6.2). Поэтому две  $\varepsilon$ -метки также изменились. Теорема 5 доказана.  $\square$

## 7. Фазовая топология

После того как найдены инварианты Фоменко—Цишанга, легко сделать следующие топологические выводы.

**Теорема 6.** *Изоэнергетическое подмногообразие  $Q_h^3$  гомеоморфно  $S^2 \times S^1$  при  $h_1 < h < h_2$  и тору  $T^3$  при  $h_2 < h < h_3$ . Если  $h > h_3$ , то  $Q_h^3$  состоит из двух связанных компонент, каждая из которых гомеоморфна  $S^2 \times S^1$ .*

Топологический тип  $Q_h^3$  однозначно определяется инвариантом  $W^*(Q_h^3)$  [3].

**Теорема 7.** *Фазовое многообразие  $M^4$  гомеоморфно  $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** Если  $h > h_3$ , то поверхность  $Q_h^3$  имеет две связанные компоненты:

$$Q_h^3(\pm) = \left\{ s \in M^4 : M_3(s) = \pm \sqrt{\frac{y - \rho + 4Ih}{2}} \right\}.$$

Из (3.1) видно, что  $M^4 = \mathcal{N}^3 \times \mathbb{R}(M_3)$ , где  $\mathcal{N}^3$  — подмногообразие пространства

$$\mathbb{R}^8(M_1, M_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

определяемое системой (3.1). При  $h > h_3$  каждая компонента  $Q_h^3$  является графиком над  $\mathcal{N}^3$ , поэтому она гомеоморфна  $\mathcal{N}^3$ . Следовательно,  $M^4 \cong Q_h^3(+)\times\mathbb{R}$ , а так как  $Q_h^3(+)\cong S^2 \times S^1$  (теорема 6), то  $M^4 \cong S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ .  $\square$

**Теорема 8.** *Рассматриваемая динамическая система является нерезонансной на регулярном подмногообразии  $Q_h^3$  для почти всех значений  $h$ .*

**Доказательство.** В аналитическом случае альтернатива в том, что все торы Лиувилля являются резонансными [3]. Пусть  $h_0 < h < h_3$ . Если бы система была резонансной на подмногообразии  $Q_h^3$ , то расслоение  $Q_h^3$  на замкнутые траектории индуцировало бы склеивающие гомотопии, и тогда матрицы склейки В-атомов имели бы вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого  $m \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $r$ -метка равнялась бы  $1/0 = \infty$ , однако  $r = 0$  (см. рис. 12). Итак, при  $h \in (h_0; h_3)$  система является нерезонансной на  $Q_h^3$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 9.** *Случай Богоявленского на отдельных изоэнергетических подмногообразиях  $Q_h^3$  лиувиллево эквивалентен следующим интегрируемым задачам:*

- 1) при  $h_1 < h < h_2$  случаям Лагранжа и Жуковского (динамика твёрдого тела);
- 2) при  $h_2 < h < h_0$  линейно интегрируемым геодезическим потокам на торе  $T^2$ , определяемым метрикой

$$ds^2 = g(y)(a dx^2 + b dx dy + c dy^2)$$

в угловых координатах  $x \bmod 2\pi$  и  $y \bmod 2\pi$ , для произвольной гладкой положительной функции  $g(y)$ , имеющей ровно один минимум и один максимум;

- 3) при  $h > h_3$  случаям Жуковского, Ковалевской и Сретенского (динамика твёрдого тела).

Список инвариантов Фоменко—Цишанга содержится в [3]. В указанных случаях отдельные молекулы  $W^*(Q_h^3)$  совпадают с молекулами из теоремы 5 с точностью до преобразований  $\varepsilon$ -меток, не меняющих тип лиувиллевой эквивалентности.

Идея следующей важной теоремы принадлежит А. В. Болсинову.

**Теорема 10.** *На многообразии  $M^4$  не существует симплектической структуры, относительно которой система (2.3) на  $M^4$  является гамильтоновой, т. е. имеет вид  $\dot{x} = \text{sgrad } F$  для некоторой функции  $F$ .*

**Доказательство.** Каждая критическая окружность гамильтониана  $H$  порождается замкнутой периодической траекторией (теорема 1). Если бы многообразие  $M^4$  было симплектическим, то критические окружности  $H$  состояли бы из нулевых точек  $\text{sgrad } H$ . Тогда некоторые  $\varepsilon$ -метки имели бы противоположные значения, например в случае  $h_1 < h < h_2$  (см. рис. 10). Однако нерезонансная система однозначно определяет набор инвариантов  $\{W^*(Q_h^3)\}$ . Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, особенности симплектической структуры многообразия  $M^4$  обусловлены исходной физической задачей, т. е. имеют объективную природу.

## Литература

- [1] Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 883—938.
- [2] Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 2. — С. 3—42.
- [3] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация. Т. 1, 2. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 1999.
- [4] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [5] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
- [6] Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. The Kowalewski top 99 years later: A Lax pair, generalizations and explicit solutions // Comm. Math. Phys. — 1989. — Vol. 122, no. 2. — P. 321—354.