Некоторые свойства рычажных отображений

М. Д. КОВАЛЁВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

УДК 514+531.8

Ключевые слова: рычажно-шарнирные конструкции, шарнирные схемы, рычажное отображение, множества постоянного ранга отображения.

Аннотация

Получены оценки минимального ранга дифференциала рычажного отображения, зависящие от структурной схемы и от точек закрепления. Выдвинуты две гипотезы: о наличии в множестве минимального ранга шарнирной конструкции с рычагом нулевой длины и о неограниченности множеств постоянного ранга рычажного отображения в случае их положительной размерности. В некоторых случаях эти гипотезы доказаны.

Abstract

M. D. Kovalev, Some properties of rigidity mapping, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 129—142.

The bounds of minimal rank of differential of rigidity mapping are obtained. They depend on the structural scheme and on the positions of fastened points. Two hypotheses are introduced. One about presence in the set of minimal rank of the rigidity mapping of a construction with a zero length lever. Another—about unboundedness of the sets of a constant rank of the rigidity mapping in the case of their positive dimension. In some cases these hypotheses are proved.

1. Введение

Рычажное отображение ставит в соответствие набору точек евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ набор квадратов некоторых из попарных расстояний между ними. Это отображение при $d = 2, 3$ лежит в основании теории шарнирных механизмов и ферм. Строение шарнирных конструкций описывает их *структурная схема* [1], т. е. абстрактный связный граф $G(V, E)$ без петель и кратных рёбер с вершинами двух видов: закреплёнными (они отвечают фиксированным в $\mathbb{R}^d$ шарнирам) и свободными, (они отвечают незакреплённым шарнирам). Рёбра шарнирной схемы — отрезки, соединяющие её вершины, — отвечают рычагам шарнирной конструкции. Пусть $V_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ — совокупность свободных, а $V_2 = \{v_{m+1}, \dots, v_{m+n}\}$ — совокупность закреплённых вершин, $V = V_1 \cup V_2$. Отметим, что на граф $G(V, E)$ накладываются два естественных требования:

он не содержит ни одного ребра, соединяющего две закреплённые вершины, и его подграф, состоящий из свободных вершин и соединяющих их между собой рёбер, связен. *Закреплённой шарнирной схемой* (ЗШС) в $\mathbb{R}^d$ называется структурная схема, каждой из закреплённых вершин $v_i \in V_2$ которой отвечает определённая точка $p_i \in \mathbb{R}^d$. Если теперь поставить в соответствие и каждой из вершин $v_i \in V_1$ свою точку $p_i \in \mathbb{R}^d$, то получим определённый *шарнирник* $\mathbf{p} = \{p_1, \ldots, p_{m+n}\} \in \mathbb{R}^{dm}$. В инженерном понимании шарнирник есть либо шарнирная ферма, либо некоторое положение шарнирного механизма. Будем называть ЗШС в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, 1-*распрямлённой*, если все её закреплённые шарниры лежат на одной прямой. Шарнирник будем называть 1-распрямлённым, если все его шарниры лежат на одной прямой. Выбор ЗШС определяет *рычажное отображение* $F\colon \mathbb{R}^{dm} \to \mathbb{R}^r$, где $r = |E|$, задающееся формулами

$$d_{ij} = (p_i - p_j)^2, \quad v_i v_j \in E. \tag{1}$$

Величины d_{ij} — квадраты длин рычагов шарнирника. Выбор прямоугольной декартовой системы координат в $\mathbb{R}^d$ позволяет записать формулы (1) в переменных, которые мы считаем стандартными прямоугольными декартовыми координатами в $\mathbb{R}^{dm}$ и $\mathbb{R}^r$.

Строка матрицы $dF(\mathbf{p})$ дифференциала рычажного отображения выглядит для рычага, соединяющего два свободных шарнира p_i и p_j, $i < j$, следующим образом:

$$(0, 0, \ldots, 0, 2(p_i - p_j), 0, \ldots, 0, 2(p_j - p_i), 0, \ldots, 0).$$

Для рычага, соединяющего свободный шарнир p_i с закреплённым шарниром p_j, она может содержать ненулевые элементы лишь в столбцах, отвечающих координатам шарнира p_i:

$$(0, 0, \ldots, 0, 2(p_i - p_j), 0, \ldots, 0).$$

Линейная зависимость строк c_{ij} матрицы $dF(\mathbf{p})$ с коэффициентами ω_{ij} имеет механический смысл внутреннего напряжения $\omega = \{\omega_{ij}\}$, $v_i v_j \in E$, в шарнирнике $\mathbf{p}$. Напряжение ω характеризуется тем, что к шарниру p_i со стороны рычага $p_i p_j$ приложена действующая вдоль этого рычага сила $\omega_{ij}(p_i - p_j)$ и в каждом из свободных шарниров все такие силы взаимно уравновешиваются. Множество всех внутренних напряжений для данного шарнирника $\mathbf{p}$ вместе с нулевым напряжением образует линейное *пространство* $W(\mathbf{p})$ *внутренних напряжений*. Справедливо соотношение

$$\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) = r - \dim W(\mathbf{p}). \tag{2}$$

Циклом шарнирника $\mathbf{p}$ назовём совокупность его рычагов, которым отвечают строки матрицы $dF(\mathbf{p})$, допускающие равную нулевой строке линейную комбинацию со всеми ненулевыми коэффициентами. В частности, каждый рычаг нулевой длины является циклом. В совокупности циклов шарнирника $\mathbf{p}$ можно выбрать базис линейно независимых циклов, число циклов в котором равно $\dim W(\mathbf{p})$. В одномерном случае базис циклов шарнирника, кроме рычагов нулевой длины, содержит циклы графа $G(V,E)$, а также цепи с концами в закреплённых вершинах, составленные из рычагов ненулевой длины и независимые по модулю 2. Далее мы будем называть такие цепи *псевдоциклами*. *Множеством постоянного ранга* l рычажного отображения мы называем множество $M_l \subset \mathbb{R}^{dm}$, на котором $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) = l$. Множество минимального возможного для ЗШС Z ранга обозначим M_Z.

Вопросы, связанные с максимальным рангом дифференциала рычажного отображения, неоднократно исследовались (см., например, [1, 8, 10, 11]). Здесь нас будет занимать вопрос о минимальном его ранге и простейших свойствах множеств M_l и M_Z. В литературе эти вопросы, несмотря на их естественность, ранее, по-видимому, не поднимались. Отметим, что ряд свойств рычажных отображений, в том числе и достаточно тонких, изучался в связи с различными геометрическими задачами многими математиками, из последних работ упомянем [5, 6, 9, 13], а также работы автора [2, 3].

Пусть структурная схема фиксирована и ЗШС, задающейся точкой $Z \in \mathbb{R}^{dn}$, отвечает рычажное отображение F_Z. Нас будет интересовать число

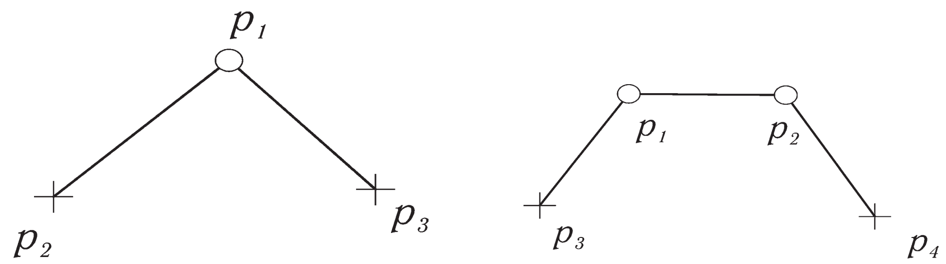
$$k(Z) = \min_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^{dm}} \operatorname{Rank} dF_Z(\mathbf{p}).$$

Разумнее даже несколько расширить задачу, рассматривая не определённую ЗШС, а целое семейство C_t^d ЗШС в $\mathbb{R}^d$ с одной и той же структурной схемой, на закреплённые шарниры которых наложены определённые условия, и искать число

$$k(C_t^d) = k_t^d = \min_{Z\in C_t^d} k(Z).$$

Если не накладывать никаких условий на закрепление, то получаем семейство C_0^d всех ЗШС в $\mathbb{R}^d$ с данной шарнирной схемой, и решение этой задачи очевидно: $k_0^d = 0$. Оно отвечает шарнирникам $\mathbf{p}$, у которых все закреплённые и все свободные шарниры лежат в одной точке, а все рычаги имеют нулевую длину. Для них матрица $dF(\mathbf{p})$ состоит лишь из нулевых строк. Первый нетривиальный пример даёт семейство C_1^d, состоящее из ЗШС с попарно несовпадающими закреплёнными шарнирами. Этот случай рассмотрен в [4]. Оказалось, что число k_1^d определяется лишь структурной схемой. Мы опишем этот результат в следующем разделе.

Для рычажного отображения, отвечающего ЗШС простейшей шарнирной фермы в плоскости (рис. 1 *а*), множество M_1 минимального ранга, равного 1, неограниченно и состоит из всех шарнирников, для которых свободный шарнир p_1 лежит на прямой p_2p_3. Оно содержит два шарнирника, определяемые условиями $p_1 = p_2$ и $p_1 = p_3$, с рычагом нулевой длины. Для рычажного отображения, отвечающего ЗШС плоского шарнирного четырёхзвенника (рис. 1 *б*), $k(Z) = 1$ и множество $M_Z = M_1$ состоит из трёх шарнирников, для которых $p_1 = p_2 = p_3$, $p_1 = p_2 = p_4$ и $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$, обладающих двумя рычагами нулевой длины. Множество же M_2 содержит шарнирники с рычагами ненулевой длины, все шарниры которых лежат на одной прямой, и поэтому является



а *б*

Рис. 1

неограниченным. Эти примеры приводят к двум вопросам. Первый: всегда ли множество M_Z минимального ранга содержит шарнирник с рычагом нулевой длины? Второй: если множество M_l постоянного ранга l имеет положительную размерность, то непременно ли оно неограниченно? В известных примерах ответы на эти два вопроса положительны. Однако в общем случае, даже в размерности два, эти вопросы, несмотря на свою кажущуюся простоту, пока не решены. Далее мы приведём их решения в некоторых частных случаях.

2. Оценки числа $k(Z)$

Приведём сначала основной результат работы [4] с необходимыми пояснениями. Рассмотрим допустимые разбиения множества V вершин ЗШС на непустые классы K_i. Каждое такое разбиение $R = R(\mathbf{p})$ порождается некоторым (как правило, не единственным) шарнирником $\mathbf{p}$ с данной ЗШС, причём каждый из первых n классов K_i состоит из закреплённого шарнира p_{m+i} и всех свободных шарниров, соединённых с p_{m+i} в шарнирнике $\mathbf{p}$ цепью из рычагов нулевой длины. Каждый из остальных классов состоит из всех свободных шарниров, соединённых между собой в шарнирнике $\mathbf{p}$ цепью из рычагов нулевой длины.

Рассмотрим возможно несвязный граф $G(R)$, порождённый множеством $E(R)$ рёбер графа $G(V,E)$, соединяющих вершины этого графа, лежащие в различных классах допустимого разбиения R. В графе $G(R)$, наследнике графа $G(V,E)$, имеются вершины, отвечающие закреплённым и свободным шарнирам. Мы их также будем называть закреплёнными и свободными. Всем рёбрам графа $G(R)$ очевидным образом отвечают рычаги ненулевой длины любого шарнирника $\mathbf{p}$, порождающего разбиение R. Пусть $c(R)$ — число независимых по модулю 2 циклов и псевдоциклов в графе $G(R)$. Пусть $l(R) = |E(R)| - c(R)$ и $l = \min\limits_R l(R)$.

Лемма 1. *При подсчёте числа l можно ограничиться допустимыми разбиениями множества вершин графа $G(V,E)$ ровно на n классов.*

Доказательство. Рассмотрим допустимое разбиение R на $q > n$ классов. В силу связности графа $G(V,E)$ среди классов, не содержащих закреплённых шарниров, найдётся класс K_i, содержащий шарнир, смежный какому-либо шарниру из класса K_j, содержащего закреплённый шарнир. Присоединим все шарниры класса K_i к классу K_j. Мы получим допустимое разбиение R_1, состоящее из $q-1$ класса. Рассмотрим число $l(R_1) = |E(R_1)| - c(R_1)$. Пусть $t > 0$ — число рычагов, соединяющих шарниры из класса K_i с шарнирами из класса K_j. Тогда $|E(R_1)| = |E(R)| - t$. Число $l(R)$ равно числу рёбер в графе, получающемся из остовного леса графа $G(R)$ исключением некоторых рёбер, соединяющих закреплённые шарниры со свободными и входящих в псевдоциклы. Однако число независимых по модулю 2 псевдоциклов в остовном лесе графа $G(R)$ очевидным образом превосходит их число в остовном лесе графа $G(R_1)$ не более чем на t. Поэтому $l(R_1) \leqslant l(R)$. $\square$

Основной результат работы [4] содержится в следующей теореме, где величину l вследствие леммы 1 можно определить как минимум $\min\limits_R l(R)$ по всем допустимым разбиениям R множества вершин графа $G(V,E)$ ровно на n классов, каждый из которых содержит по одной закреплённой вершине.

Теорема 1. *Для произвольной ЗШС Z из семейства C_1^d справедлива оценка $k(Z) \geqslant l$, достижимая для 1-распрямлённых ЗШС. Таким образом, $k_1^d = l$.*

Заметим, что минимум ранга рычажного отображения может достигаться на шарнирнике $\mathbf{p}$, порождающем разбиение $R(\mathbf{p})$ на число классов, большее n, и не достигаться ни на одном шарнирнике, порождающем разбиение на n классов. Так, для ЗШС Z со свободными шарнирами v_1, v_2, v_3, закреплёнными шарнирами v_i, $4 \leqslant i \leqslant 7$, и рычагами v_1v_2, v_2v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_6, v_2v_7 (рис. 2) $k(Z) = 2$. Это значение достигается на единственном шарнирнике $\mathbf{p}_0$, у которого все свободные шарниры лежат в точке пересечения прямых p_4p_5 и p_6p_7. Для этого шарнирника $|R(\mathbf{p}_0)| = 5$.

Отметим также следующее любопытное обстоятельство. В случае 1-распрямлённых ЗШС Z величина $k(Z)$ не зависит от положений на прямой закреплённых шарниров, если только они не совпадают между собой. Если же рассмотреть семейство C_2^2 ЗШС, все закреплённые шарниры которых находятся в общем положении в плоскости, то ситуация меняется. А именно, существуют ЗШС Z и Z'

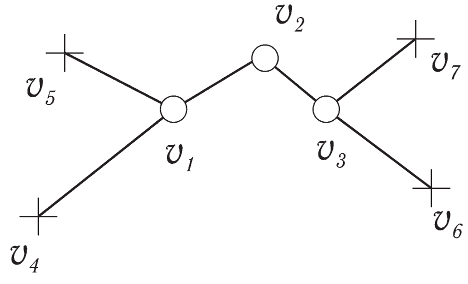


Рис. 2

из семейства C_2^2, отличающиеся только положениями закреплённых шарниров, для которых $k(Z) \neq k(Z')$. Пример такой ЗШС Z' мы получим, если у ЗШС, изображённой на рис. 2, предположим параллельность прямых p_4p_5 и p_6p_7. Тогда $k(Z') = 3$, хотя никакие три из точек p_4, p_5, p_6, p_7 не лежат на одной прямой.

Получим теперь необходимые для дальнейшего оценки числа $k(Z)$. Пусть s_i — число свободных шарниров в ЗШС, смежных ровно $i \geqslant 1$ закреплённым, $\sum\limits_{i\geqslant 1} s_i = s$. Пусть $w(i)$ — размерность линейной оболочки закреплённых шарниров, смежных свободному шарниру p_i (если p_i не смежен ни одному закреплённому шарниру, то $w(i) = 0$), а $w(i,j)$ — размерность линейной оболочки закреплённого шарнира p_j и закреплённых шарниров, смежных свободному шарниру p_i. Очевидно, что $w(i,j) \leqslant w(i)+1$, а для свободного шарнира p_i, смежного j-му закреплённому шарниру, $w(i,j) = w(i)$. Пусть t — целое неотрицательное число, а s'_t есть число свободных шарниров p_i ЗШС, для которых $w(i) = t$. Такие шарниры мы будем называть шарнирами класса t. Для заданной ЗШС рассмотрим два числа:

$$O_{\text{н}} = \sum_i w(i) = \sum_t t s'_t, \quad O_{\text{в}} = \min_j \sum_i w(i,j),$$

где суммирование происходит по всем свободным шарнирам, а минимум взят по всем закреплённым шарнирам.

Теорема 2. *Для ЗШС в $\mathbb{R}^d$ справедливы оценки*

$$O_{\text{н}} \leqslant k(Z) \leqslant O_{\text{в}}.$$

Доказательство. Установим сначала верхнюю оценку. Поместим все свободные шарниры в один из закреплённых, скажем p_j, при этом получим шарнирник $\mathbf{p}_j$. У шарнирника $\mathbf{p}_j$ лишь рычаги, исходящие из закреплённых шарниров, отличных от p_j, имеют ненулевую длину. Легко видеть, что свободному шарниру p_i отвечает $w(i,j)$ линейно независимых между собой строк матрицы $dF(\mathbf{p}_j)$. Более того, все такие совокупности строк, отвечающие различным свободным шарнирам, составляют линейно независимую систему строк. Таким образом,

$$k(Z) \leqslant \min_j dF(\mathbf{p}_j) = \min_j \sum_i w(i,j) = O_{\text{в}}.$$

Обоснуем нижнюю оценку. Рассмотрим для произвольного шарнирника $\mathbf{p}$ с нашей ЗШС Z строки матрицы $dF(\mathbf{p})$, отвечающие рычагам, исходящим из свободного шарнира p_i класса $t \geqslant 1$ в смежные закреплённые шарниры $p_{j_1}, \dots, p_{j_t}$. На d местах этих строк, отвечающих координатам шарнира p_i, стоят координаты векторов $p_ip_{j_l}$, $1 \leqslant l \leqslant t$. Среди этих векторов наверняка найдётся $w(i)$ линейно независимых, пусть это будут для определённости векторы $p_ip_{j_1}, \dots, p_ip_{j_{w(i)}}$, стоящие в строках, которые мы обозначим $C_{i1}, \dots, C_{iw(i)}$. Совокупность строк C_{il} матрицы $dF(\mathbf{p})$, где i отвечает всем свободным шарнирам положительных классов, а $1 \leqslant l \leqslant w(i)$, как легко видеть, линейно независима.

Число же этих строк равно $\sum\limits_i w(i) = O_{\text{н}}$. Поскольку рассматривался произвольный шарнирник $\mathbf{p}$, отсюда следует справедливость нижней оценки. $\square$

Заметим, что из неравенства $w(i,j) \leqslant w(i) + 1$ и равенства $w(i,j) = w(i)$ для свободных шарниров p_i, смежных j-му закреплённому шарниру, вытекает неравенство
$$O_{\text{в}} \leqslant O_{\text{н}} + s - v,$$
где s — число свободных шарниров в ЗШС, смежных хотя бы одному закреплённому, а $v \geqslant 1$ — наибольшее число свободных шарниров, смежных одному закреплённому. Если же каждая совокупность закреплённых шарниров, смежных одному свободному, находится в общем положении, то
$$O_{\text{н}} = \sum_{t=2}^{t=d} (t-1)s_t + \sum_{t \geqslant d+1} ds_t.$$
В частности, для произвольной ЗШС из семейства C_1^2 со свободными шарнирами, смежными не более чем двум закреплённым, имеем
$$O_{\text{н}} = s_2, \quad O_{\text{в}} \leqslant s_1 + 2s_2 - v = s + s_2 - v.$$

3. Свойство множеств минимального ранга

Пусть $N_l = N_l(F) \subset \mathbb{R}^{dm}$ есть множество, на котором $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) \leqslant l$. Будем называть шарнирник *сократимым*, если он обладает хотя бы одним рычагом нулевой длины, и *несократимым* в противном случае. Отметим, что в силу включения $N_l \supset M_Z$ из наличия сократимого шарнирника в M_Z следует наличие такового в произвольном множестве N_l. Заметим, что возможность наличия в множестве M_Z несократимых шарнирников видна на примере простейшей плоской фермы (см. рис. 1 *а*). Пусть $k_{\text{н}} = \min \operatorname{Rank} dF(\mathbf{p})$, где минимум берётся по несократимым шарнирникам $\mathbf{p}$ с данной ЗШС.

Лемма 2. *В случае произвольной размерности имеет место неравенство* $k_{\text{н}} \geqslant m$.

Доказательство. Действительно, в графе, полученном из $G(V, E)$ исключением всех, кроме одной, закреплённых вершин вместе с инцидентными им рёбрами, найдётся дерево, содержащее в качестве вершин все свободные шарниры. Если мы рассматриваем несократимый шарнирник, то всем m рёбрам этого дерева отвечают рычаги ненулевой длины. Совокупность m строк матрицы dF, отвечающих этим рычагам, как легко видеть, линейно независима. Это и доказывает лемму. $\square$

Лемма 3. *Для ЗШС Z в произвольной размерности d в случае $m \geqslant O_{\text{в}}$ в множестве M_Z непременно найдётся шарнирник, имеющий хотя бы один рычаг нулевой длины. Если же $m > O_{\text{в}}$, то любой шарнирник из M_Z имеет рычаг нулевой длины.*

Доказательство. Действительно, если $m \geqslant O_{\text{в}}$, то $k(Z) = k \leqslant m$. Если $k < m$, то каждый шарнирник из множества M_Z сократим. Если же $k = m = O_{\text{в}}$, то в множестве M_Z имеются сократимые шарнирники: это шарнирники, все свободные шарниры которых совпадают с одним из закреплённых и на которых достигается оценка $O_{\text{в}}$. □

Теорема 3. *Для* 1*-распрямлённой ЗШС в* $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, *множество* M_Z *содержит сократимый шарнирник.*

Доказательство. Согласно лемме 3 достаточно доказать существование сократимого шарнирника $\mathbf{q}$, у которого $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{q})$ не меньше чем $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p})$ для любого несократимого шарнирника $\mathbf{p}$. Если шарнирник $\mathbf{p}$ несократим, то в силу леммы 2 имеем $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) = m$. Для любого 1-распрямлённого шарнирника очевидным образом $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) \leqslant m$. Среди 1-распрямлённых шарнирников имеется хотя бы один сократимый $\mathbf{q}$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Для любой ЗШС на плоскости, у которой число* q *рычагов, инцидентных закреплённым шарнирам, не превосходит числа* m *свободных шарниров, множество* M_Z *состоит из сократимых шарнирников.*

Доказательство. Действительно, для такой ЗШС $O_{\text{в}} \leqslant q - v \leqslant q - 1 < m$, и утверждение теоремы вытекает из леммы 3. □

Утверждение предыдущей теоремы, в частности, верно для ЗШС, у которых каждый свободный шарнир смежен не более чем одному закреплённому.

Закреплённая шарнирная схема называется *правильной*, если для отвечающего её рычажного отображения

$$\max_{\mathbf{p}} \operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) = r.$$

Именно такие ЗШС наиболее востребованы инженерной механикой.

Теорема 5. *Для любой правильной ЗШС на плоскости в множестве* M_Z *непременно найдётся шарнирник, имеющий хотя бы один рычаг нулевой длины.*

Доказательство. Для правильной ЗШС в плоскости каждый свободный шарнир смежен не более чем двум закреплённым, и следовательно, справедлива оценка $O_{\text{в}} = 2s_2 + s_1 - v$. Согласно лемме 3 теорема будет доказана, если мы установим неравенство $2s_2 + s_1 - v \leqslant m$. Мы докажем более сильное неравенство

$$2s_2 + s_1 - 1 \leqslant m, \tag{3}$$

из которого в случае $v > 1$ следует сократимость каждого шарнирника из множества M_Z.

При $s_2 = 0$ неравенство (3), очевидно, становится строгим.

Рассмотрим случай $s_2 > 0$. Проведём доказательство, пользуясь индукцией по числу свободных шарниров. Для простейшей правильной ЗШС с $s_2 = 1$ (см. рис. 1 *а*) неравенство (3) верно. Допустим его справедливость для всех правильных плоских ЗШС с $m-1$ свободными шарнирами. Рассмотрим правильную плоскую ЗШС Z с m свободными шарнирами, у которой свободный шарнир a смежен двум закреплённым. Если от Z отбросить два рычага, соединяющие a со смежными ему закреплёнными шарнирами, и, возможно, один или оба из этих закреплённых шарниров, если они смежны лишь шарниру a, и начать считать a закреплённым шарниром, то мы получим правильную плоскую ЗШС Z^*. Действительно, условие правильности ЗШС из [1] очевидным образом выполняется для подграфа, получаемого удалением рёбер. Число свободных шарниров m^* у схемы Z^* равно $m-1$. Кроме того, пусть $r \geqslant 1$ — число рычагов, исходящих из шарнира a в свободные шарниры, а $r_1 \leqslant r$ — число рычагов, исходящих из шарнира a в свободные шарниры, смежные одному закреплённому (в силу правильности Z смежный a свободный шарнир не может быть смежен двум или более закреплённым шарнирам). Число свободных шарниров в ЗШС Z^*, смежных ровно одному закреплённому, равно $s_1^* = s_1 - r_1 + r$; смежных двум закреплённым — $s_2^* = s_2 - 1 + r_1$. По предположению индукции имеем

$$2s_2^* + s_1^* - 1 \leqslant m^* = m - 1.$$

Отсюда

$$2(s_2 - 1 + r_1) + s_1 - r_1 + r - 1 \leqslant m - 1,$$

следовательно,

$$2s_2 + s_1 - 1 + (r_1 + r - 1) \leqslant m.$$

Поскольку $r_1 + r - 1 \geqslant 0$, из последнего неравенства следует неравенство (3), доказывающее теорему. □

4. Неограниченность множеств постоянного ранга

Нам понадобится следующее почти очевидное свойство шарнирников: пространства внутренних напряжений шарнирника и его аффинного образа совпадают. Более интересно подобное свойство для проективных образов, его можно сформулировать в виде следующей леммы [7, 8].

Лемма 4. *Пусть $\mathbf{p}'$ — образ шарнирника $\mathbf{p}$ под действием проективного, не удаляющего его шарниров в бесконечность преобразования. Тогда пространства $W(\mathbf{p})$ и $W(\mathbf{p}')$ внутренних напряжений шарнирников $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ изоморфны.*

Согласно формуле (2) из сказанного вытекает равенство ранга рычажного отображения для шарнирника и его аффинного или проективного образа. Заметим, что рычагами проективного образа шарнирника являются отрезки прямых евклидовой плоскости, соединяющие образы соответствующих шарниров.

Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — 1-распрямлённые шарнирники с одной и той же ЗШС.

Лемма 5. *Если множества рычагов нулевой длины шарнирников $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ совпадают, то пространства их внутренних напряжений имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Действительно, размерность пространства внутренних напряжений 1-распрямлённого шарнирника $\mathbf{p}$ равна числу рычагов нулевой длины в нём плюс число независимых по модулю 2 циклов и псевдоциклов, составленных из рычагов ненулевой длины. □

Теорема 6. *Для* 1*-распрямлённой ЗШС каждое множество* M_l *положительной размерности неограниченно.*

Доказательство. Пусть Π — прямая, содержащая закреплённые шарниры, а A_Π — множество аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, оставляющих все точки прямой Π неподвижными. Если множество M_l имеет положительную размерность, то в нём найдётся шарнирник, у которого не все свободные шарниры совпадают с закреплёнными. Допустим, множество M_l содержит шарнирник $\mathbf{p}$, обладающий шарниром $p_v \notin \Pi$. Как уже отмечалось, образ $A(\mathbf{p})$ шарнирника $\mathbf{p}$ под действием аффинного преобразования $A \in A_\Pi$ также принадлежит множеству M_l. Поскольку образ $A(p_v)$, $A \in A_\Pi$, шарнира p_v может совпасть с любой точкой $\mathbb{R}^d \setminus \Pi$, то множество шарнирников $A(\mathbf{p})$, $A \in A_\Pi$, а значит, и множество M_l неограниченны.

Пусть теперь множество M_l содержит лишь распрямлённые шарнирники. Тогда можно выбрать шарнирник $\mathbf{p} \in M_l$, у которого хотя бы один свободный шарнир, скажем p_w, не совпадает ни с одним из закреплённых. Но тогда среди 1-распрямлённых шарнирников с тем же множеством рычагов нулевой длины, что и у шарнирника $\mathbf{p}$, имеется шарнирник $\mathbf{p}'$, у которого шарнир p'_w лежит в произвольной наперёд заданной точке прямой Π. Поскольку в силу леммы 5 $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) = \operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}')$, множество M_l неограниченно. □

Пусть P_N — множество проективных преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, оставляющих неподвижной каждую точку множества $N \in \mathbb{R}^d$. Назовём множество точек $N \subset \mathbb{R}^d$ *проективно нежёстким*, если P_N содержит нетождественное преобразование.

Лемма 6. *Для проективно нежёсткого множества точек* $N \subset \mathbb{R}^d$ *множество* P_N *содержит бесконечное однопараметрическое семейство* P_t *попарно не совпадающих проективных преобразований.*

Доказательство. Записывая условия совпадения точек с их образами при проективном преобразовании из P_N в декартовых координатах, получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов a_{ij}, $0 \leqslant i, j \leqslant d$, дробно-рациональных функций, задающих преобразование

$$x'_i = \frac{\sum a_{ij}x_j + a_{i0}}{\sum a_{0j}x_j + a_{00}}. \tag{4}$$

Поскольку множество P_N содержит тождественное преобразование, то множество решений этой системы не менее чем одномерно, причём в случае его одномерности P_N состоит из одного лишь тождественного преобразования. В противном случае в P_N имеется множество преобразований с коэффициентами

$$a_{ij} = ub_{ij} + vc_{ij} = u\left(b_{ij} + \frac{v}{u}c_{ij}\right) = u(b_{ij} + tc_{ij}), \quad t = \frac{v}{u} \in \mathbb{R},$$

и можно считать, что коэффициенты $b_{ij} = \delta_{ij}$ (где δ_{ij}, $0 \leqslant i, j \leqslant d$, — символ Кронекера) отвечают тождественному преобразованию, а коэффициенты c_{ij}, среди которых есть ненулевые, — нетождественному преобразованию. Получившееся однопараметрическое семейство преобразований P_t содержит бесконечно много попарно несовпадающих преобразований, поскольку при различных значениях t получаются различные преобразования. Отметим, что имеется лишь конечное число значений t, при которых определитель, составленный из коэффициентов формул (4), обращается в нуль, и эти формулы не задают проективного преобразования. Лемма доказана. □

Для бесконечного семейства P_N проективных преобразований множество неподвижных точек может содержать линейные подмногообразия различной размерности. Например, для плоскости оно может состоять из прямой и точки, не принадлежащей этой прямой. В трёхмерном пространстве оно может состоять из двух скрещивающихся прямых, содержащих в себе точки множества N. Назовём множество всех неподвижных точек семейства преобразований P_N *неподвижной оболочкой* множества N. Будем говорить, что точки некоторой совокупности находятся в общем положении в $\mathbb{R}^d$, если линейная оболочка каждых $k \leqslant d+1$ из них имеет размерность $k-1$. Неподвижная оболочка совокупности N не более чем $d+1$ точек общего положения в $\mathbb{R}^d$ совпадает с N. Следующее утверждение из [12] иногда называют основной теоремой проективной геометрии.

Теорема 7. *Для двух произвольных совокупностей, состоящих из $d+2$ точек общего положения пространства $\mathbb{R}^d$, существует, и притом единственное, проективное преобразование, переводящее одну из них в другую.*

В одномерном и двумерном случаях нетрудно установить в некотором смысле более сильное утверждение.

Теорема 8. *Если тождественное преобразование пространства $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, является единственным его проективным преобразованием, сохраняющим все точки совокупности N неподвижными, то в N найдутся $d+2$ точек, находящихся в общем положении.*

Уже в трёхмерном случае аналогичное утверждение неверно. Действительно, неподвижная оболочка совокупности семи точек (рис. 3), четыре из которых являются вершинами тетраэдра, а остальные три лежат внутри рёбер этого тетраэдра, исходящих из одной вершины, совпадает со всем пространством. Однако из этой совокупности нельзя выбрать пятёрку точек, находящуюся в общем положении.

Лемма 7. *Если точка p не принадлежит неподвижной оболочке множества N, то множество её образов $P_N(p)$ под действием семейства проективных преобразований, оставляющих точки множества N неподвижными, неограниченно и имеет положительную размерность.*

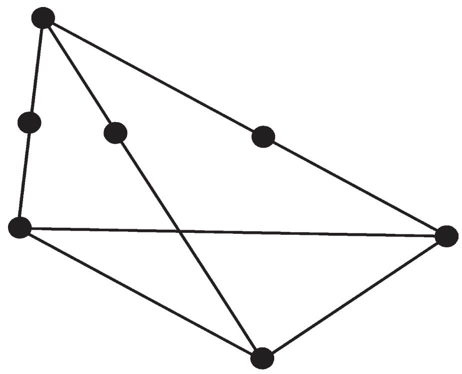


Рис. 3

Доказательство. Пусть точка p не принадлежит неподвижной оболочке точечного множества N, тогда в рассматриваемой декартовой системе найдётся координата x_i, не постоянная на точках множества $P_N(p)$. Мы докажем, что множество значений этой координаты на точках множества $P_N(p)$ неограниченно и одномерно. Действительно, в этом случае можно так выбрать однопараметрическое семейство преобразований $P_t \subset P_N$, что координата x_i точек множества $P_t(p)$ также не будет постоянной. Рассмотрим формулы, задающие координаты проективного образа точки p под действием преобразований семейства P_t. Правая часть формулы $x_i = \frac{At+B}{Ct+D}$ зависит от параметра t, следовательно, она является либо линейной, либо дробной функцией от t. В обоих случаях множество значений $x_i(t)$ неограниченно, одномерно и, более того, всюду плотно на числовой прямой. Этого достаточно для неограниченности и положительности размерности множеств $P_t(p)$ и $P_N(p)$. □

Теорема 9. *Если ЗШС в $\mathbb{R}^d$ имеет не более $d+1$ закреплённых шарниров, находящихся в общем положении, то множество M_l неограниченно тогда и только тогда, когда его размерность положительна.*

Доказательство. Достаточно установить, что множество M_l либо неограниченно, либо состоит из конечного числа шарнирников, все свободные шарниры которых совпадают с закреплёнными (и тогда M_l нульмерно). Действительно, поскольку в данном случае неподвижная оболочка множества закреплённых шарниров совпадает с самим этим множеством, то из леммы 7 вытекает, что либо все шарниры каждого из шарнирников множества M_l совпадают с закреплёнными шарнирами, либо хотя бы один шарнир хотя бы одного шарнирника из M_l не совпадает с закреплённым шарниром, и тогда множество M_l имеет положительную размерность и неограниченно. □

В плоском случае справедливо более сильное утверждение.

Теорема 10. *Если неподвижная оболочка O закреплённых шарниров ЗШС в $\mathbb{R}^2$ не совпадает с $\mathbb{R}^2$, то множество M_l неограниченно тогда и только тогда, когда оно имеет положительную размерность.*

Доказательство. Достаточно установить, что произвольное множество M_l либо неограниченно, либо состоит из конечного числа шарнирников, все свободные шарниры которых совпадают с закреплёнными. Если неподвижная оболочка O закреплённых шарниров не совпадает с плоскостью, то она может состоять из либо одной, либо двух, либо трёх точек, либо прямой, либо прямой и точки, ей не принадлежащей. В двух первых и предпоследнем случае мы имеем распрямлённую ЗШС и утверждение сводится к теореме 6. В третьем случае три точки находятся в общем положении и утверждение сводится к теореме 9. Остаётся последний случай. В нём закреплённый шарнир, скажем p_v, находится в некоторой точке $a \in O$, $a \notin \Pi$, и имеется не менее трёх закреплённых шарниров на прямой $\Pi \subset O$. Пусть $\mathbf{p} \in M_l$ — шарнирник, свободный шарнир p_s которого не совпадает ни с одним из закреплённых. Если $p_s \notin O$, то множество $P_O(\mathbf{p})$, где P_O — совокупность проективных преобразований, оставляющих все точки множества O неподвижными, неограниченно. Часть этого множества, для которой образы всех шарниров не лежат на абсолюте, также неограниченна и принадлежит множеству M_l согласно лемме 4.

Остаётся разобрать случай, когда у шарнирника $\mathbf{p} \in M_l$ нет свободных шарниров, не принадлежащих множеству O, однако имеется свободный шарнир p_s, не совпадающий ни с одним из закреплённых и лежащий на прямой Π. Имеем $\operatorname{Rank} dF(\mathbf{p}) = l$. С другой стороны, ранг этой матрицы равен числу её ненулевых строк минус число независимых циклов в шарнирнике $\mathbf{p}$. Ни один из циклов шарнирника $\mathbf{p}$ не может содержать рычага $p_v p_t$, исходящего из закреплённого шарнира p_v, поскольку сила, действующая на шарнир p_t со стороны рычага $p_v p_t$, не может быть уравновешена силами, действующими со стороны рычагов, лежащих на прямой Π. Таким образом, рычаги всех циклов лежат на прямой Π. Но тогда число независимых циклов при неизменности множества рычагов нулевой длины не зависит от положения шарнира $p_s \in \Pi$. Выбирая положение шарнира p_s сколь угодно далеко, получаем неограниченное множество шарнирников, лежащее в M_l. □

Литература

[1] Ковалёв М. Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН СССР. Сер. мат. — 1994. — Т. 58, № 1. — С. 45—70.

[2] Ковалёв М. Д. Квадратичные и рычажные отображения // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2002. — Т. 239. — С. 195—214.

[3] Ковалёв М. Д. О распрямлённых шарнирных конструкциях // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, №6. — С. 71—98.

[4] Ковалёв М. Д. Задача о минимальном ранге рычажного отображения // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. Сб. трудов научно-методи-

ческой конференции, посвящённой 40-летию НУК ФН МГТУ им. Н. Э. Баумана «Логос». — 2005. — С. 317—323.

[5] Alexandrov V. Sufficient conditions for the extendibility of an n-th order flex of polyhedra // Contrib. Algebra Geom. — 1998. — Vol. 39, no. 2. — P. 367—378.

[6] Connelly R., Demaine E. D., Rote G. Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles // Discrete Comput. Geom. — 2003. — Vol. 30, no. 2. — P. 205—239.

[7] Crapo H., Whiteley W. Statics of frameworks and motions of panel structures, a projective geometric introduction // Structural Topology. — 1982. — No. 6. — P. 43—82.

[8] Graver J., Servatius B., Servatius H. Combinatorial Rigidity. — Providence: Amer. Math. Soc., 1993.

[9] Kapovich M., Millson J. J. Universality theorems for configuration spaces of planar linkages. — Preprint. — March 23, 1998.

[10] Laman G. On graphs and rigidity of plane skeletal structures // J. Engrg. Math. — 1970. — Vol. 4. — P. 331—340.

[11] Pollaczek-Geiringer H. Über die Gliederung ebener Fuchwerke // Z. Angew. Math. Mech. — 1927. — Vol. 7, no. 1. — P. 58—72.

[12] Veblen O., Young J. W. Projective Geometry. Vol. 1, 2. — Boston, 1910—1918.

[13] White N., Whiteley W. The algebraic geometry of stresses in frameworks // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. — 1983. — Vol. 4, no. 4. — P. 481—511.