

# Неизгибаемые многогранники с малым числом вершин\*

И. Г. МАКСИМОВ

УДК 514.113.5

**Ключевые слова:** многогранники, вложения, погружения, изгибания, минимальное число вершин.

## Аннотация

В статье показывается, какие из вложенных и погружённых многогранников с числом вершин не больше восьми неизгибаемы. Все вложенные многогранники оказываются неизгибаемыми, за возможным исключением многогранников одного из комбинаторных типов, для которых вопрос пока остаётся открытым.

## Abstract

*I. G. Maksimov, Nonflexible polyhedra with small number of vertices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 143–165.*

The paper shows which embedded and immersed polyhedra with no more than eight vertices are nonflexible. It turns out that all embedded polyhedra are nonflexible, possibly, except for polyhedra of one of the combinatorial types, for which the problem remains still open.

## 1. Введение

Гипотеза о том, что замкнутая поверхность не может изгибаться, если она не допускает разрывов и растяжений и тем самым однозначно определяет тело, ограниченное этой поверхностью, возникла давно. В этой статье мы рассматриваем только полиэдральные замкнутые поверхности типа сферы. Для них эта гипотеза подтверждалась известным фактом однозначной определённости выпуклых многогранников (Коши, 1813 г.).

Сейчас известно, что почти все многогранники типа сферы неизгибаемы (см. [9]), однако были построены и контрпримеры. В 1897 г. Брикар [6] перечислил все изгибаемые октаэды (6 вершин), но все они имеют самопересечения и не являются даже погружёнными. Вопрос о поверхностях без самопересечений оставался открытым. И только в 1975 г. Р. Коннелли [7] удалось построить погружённый изгибаемый многогранник, имеющий 12 вершин, а в 1977 г. — вложенный (18 вершин). Наконец, в 1978 г. К. Штефен построил вложенный

---

\* Работа поддержана грантами РФФИ № 02-01-00101, 05-01-00204.

изгибаемый девятивершинник (см. [10], описания можно также найти в [4]). Однако остался открытым вопрос о минимальном числе вершин таких многогранников. В этой статье мы показываем, какие вложенные и погружённые многогранники с числом вершин, меньшим девяти, неизгибаемы. Для одного из комбинаторных типов вопрос остаётся открытым.

Указанные выше примеры показывают, в частности, что правильный ответ на вопрос о минимальном числе вершин изгибаемых многогранников зависит от того, какие самопересечения разрешены для поверхности многогранника в ходе её изгиба. Как правило, мы будем предполагать вложенность всех поверхностей.

## 2. Основные определения

Мы будем различать абстрактный многогранник  $K$  и его реализацию  $P(K)$  в трёхмерном евклидовом пространстве  $E^3$ .

Итак, пусть  $K$  — двумерный замкнутый симплициальный комплекс, тело которого гомеоморфно сфере  $S^2$ . Комплекс  $K$  описывает комбинаторное строение многогранника. В силу известной теоремы Штейница в качестве его модели можно выбрать некоторый выпуклый многогранник в  $E^3$ . Учитывая это, мы будем называть одномерные симплексы из  $K$  рёбрами, а двумерные — гранями.

**Определение 1.** Многогранником комбинаторного строения  $K$  называется непрерывное в целом, линейное на каждом симплексе отображение  $P: K \rightarrow E^3$ .

Заметим, что в силу линейности такие отображения полностью определяются своими значениями на вершинах комплекса  $K$ .

Образ  $P(K)$  — это замкнутая многогранная поверхность, вообще говоря невыпуклая и имеющая сколь угодно сложные самопересечения, самоналожения и вырождения. Нас интересует, возможна ли непрерывная изометрическая деформация этой поверхности с условием абсолютной жёсткости граней.

**Определение 2.** Изгибанием многогранника  $P$  называется непрерывное по параметру  $t$  семейство многогранников  $P_t: K \rightarrow E^3$ , такое что  $P_0 = P$  и все  $P_t(K)$  изометричны между собой в индуцированной из  $E^3$  метрике. Изгибание называется тривиальным, если оно сводится к движению  $P(K)$  в  $E^3$  как твёрдого тела.

**Определение 3.** Многогранник называется неизгибаемым, если любое его изгибание тривиально, и изгибаемым, если для него существует хотя бы одно нетривиальное изгибание.

Для исключения тривиальных изгибаний мы будем использовать следующую процедуру.

Выберем у исходного многогранника  $P(K)$  некоторую невырожденную грань  $P_1P_2P_3$ . Так как её вершины не лежат на одной прямой, то существует такое непрерывное семейство  $S_t$  собственных движений пространства  $E^3$ , что компо-

зиция  $R_t = S_t \circ P_t$  представляет собой изгибание многогранника  $P$ , при котором положение вершин  $P_1, P_2$  и  $P_3$  остаётся неизменным для всех  $t$ .

Исходное изгибание  $P_t$  тривиально тогда и только тогда, когда построенное изгибание  $R_t$  постоянно:  $R_t = R_0$  для всех  $t$ . Таким образом, многогранник  $P$  является неизгибаемым, если любое его изгибание, при котором одна из граней неподвижна, оставляет неподвижным весь многогранник.

Заметим, что использование только треугольных граней не ограничивает общности задачи доказательства неизгибаемости, но позволяет следить лишь за изгибанием каркаса из рёбер многогранника. В частности, добавление или удаление вершины индекса 3 (инцидентной ровно трём рёбрам) не изменяет изгибаемости или неизгибаемости многогранника.

Сложность задачи выяснения изгибаемости конкретных многогранников сильно зависит от того, какие самопересечения многогранной поверхности допускаются.

Обычно рассматривают следующие постепенно усиливающиеся ограничения:

- а) отображение  $P$  называется невырожденным, если образ каждого одномерного симплекса — отрезок в  $E^3$ , а образ двумерного симплекса — невырожденный треугольник. В остальном допустимы любые самопересечения. В этом случае  $P(K)$  называется невырожденным многогранником;
- б) отображение  $P$  называется погружением, если оно является локальным гомеоморфизмом на образ  $P(K)$ . Самопересечения могут быть, но они допускаются только между гранями, не имеющими общих вершин. В этом случае  $P(K)$  называется погружённым многогранником;
- в) отображение  $P$  называется вложением, если оно является полным гомеоморфизмом на образ  $P(K)$ . Самопересечений нет. Многогранник  $P(K)$  называется вложенным.

Заметим, что невырожденные, погружённые и вложенные многогранники остаются таковыми, если изгибание их достаточно мало. Поэтому мы будем говорить просто «изгибания невырожденных многогранников» вместо «изгибания невырожденных многогранников в классе невырожденных многогранников».

В заключение этого раздела приведём простой критерий погружённости многогранника.

Назовём звездой вершины  $A$  (обозначение  $St(A)$ ) объединение всех симплексов комплекса  $K$ , содержащих вершину  $A$ , вместе со всеми их гранями.

**Предложение 1.** *Многогранник является погружённым тогда и только тогда, когда звезда каждой его вершины вложена.*

**Доказательство.** Пусть пересечение образов двух граней из звезды некоторой вершины  $A$  содержит хотя бы одну точку  $M$ , отличную от  $A$ . Тогда это пересечение содержит целиком отрезок  $[AM]$ , и следовательно, отображение  $P$  не будет инъективным в любой окрестности точки  $A$ . Значит,  $P$  не погружение.

### 3. Комбинаторная классификация

В этом разделе мы перечислим возможные комбинаторные типы многогранников типа сферы с числом вершин не больше восьми, а затем проведём исследование неизгибаемости для каждого типа отдельно.

Мы выделим некоторые классы многогранников, для которых уже известны некоторые факты, касающиеся их неизгибаемости, и укажем способ, как можно получить новый комбинаторный тип многогранника с теми же свойствами изгибаемости.

Многогранник  $P(K)$  мы будем называть *пирамидой*, если в комплексе  $K$  найдётся хотя бы одна вершина, имеющая индекс, на единицу меньший числа всех вершин комплекса  $K$ . (Напомним, что индексом вершины называется число рёбер  $K$ , инцидентных ей.)

Многогранник называется *подвеской*, если комплекс  $K$  имеет вершины  $n, s, p_1, \dots, p_k$ , где каждая вершина  $p_j$  смежна с вершиной  $p_{j+1} \pmod{k}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , а каждая из вершин  $n$  и  $s$  смежна со всеми  $p_1, \dots, p_k$ . Образы вершин  $p_1, \dots, p_k$  образуют замкнутую ломанную, называемую экватором подвески, а образы  $P(n) = N$  и  $P(s) = S$  называются «полюсами» подвески. Грани подвески однозначно восстанавливаются по каркасу её рёбер.

Подвеска с пятью вершинами является одновременно пирамидой, а при большем числе вершин это уже не так.

Теперь определим операцию добавления к комплексу  $K$  вершины индекса 3. Для этого выберем в комплексе  $K$  некоторую грань с вершинами  $p_1, p_2, p_3$  и удалим её из  $K$ . Вместо этого добавим новую вершину  $p_0$  и три новые грани:  $p_0p_1p_2, p_0p_2p_3, p_0p_3p_1$ . В результате получим новый комплекс  $K_1$ , также гомеоморфный сфере.

Если рассмотреть какие-либо многогранники комбинаторного типа  $K$  и  $K_1$ , то, как правило, они либо оба изгибаемы, либо оба неизгибаемы.

Заметим, что подвески с числом вершин, большим пяти, не имеют вершин индекса 3, а пирамиды всегда имеют.

Теперь перейдём к перечислению многогранников с числом вершин, не большим восьми.

**Предложение 2.** Типы комбинаторного строения многогранников с числом вершин  $n < 9$  описываются следующим образом:

- 1) при  $n \leq 5$  имеем только пирамиды;
- 2) при  $n = 6$  имеем пирамиды и подвески;
- 3) при  $n = 7$  имеем пирамиды, подвески и многогранник, полученный из октаэдра добавлением вершины индекса 3;
- 4) при  $n = 8$  имеем:
  - а) пирамиды,
  - б) подвески,
  - в) многогранники, полученные из подвесок с  $n = 6$  и  $n = 7$  добавлением вершин индекса 3,

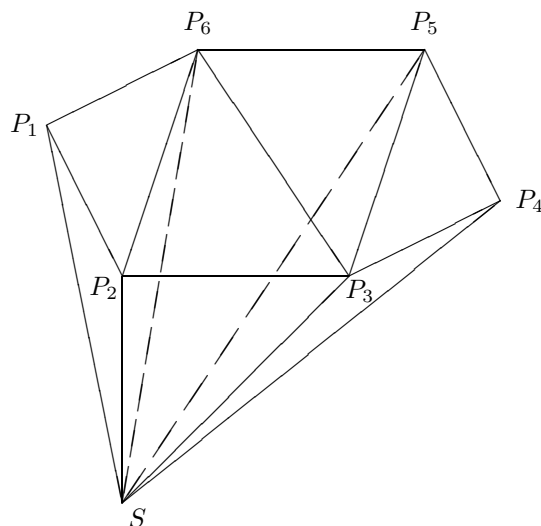


Рис. 1. Пирамида

- г) многогранники, полученные из пирамиды с семью вершинами, имеющей указанную на рис. 1 триангуляцию, добавлением вершины индекса 3,
- д) восьмивершинник с комбинаторным строением, показанным на рис. 2.

**Доказательство** проводится простым перебором (см., например, [5]). Схема такова.

Обозначим через  $n$  число вершин комплекса  $K$ , через  $e$  — число рёбер, через  $f$  — число граней и через  $v_k$  — число вершин индекса  $k$ .

В силу того что все грани треугольные, имеем  $2e = 3f$ . Учитывая формулу Эйлера  $n - e + f = 2$ , отсюда легко получаем, что  $e = 3n - 6$ ,  $f = 2n - 4$ .

Случаю  $n = 4$  отвечает тетраэдр — пирамида.

Пусть теперь  $n > 4$ . Тогда мы имеем такие соотношения:

$$n = \sum_{k=3}^{n-1} v_k, \quad 2e = \sum_{k=3}^{n-1} kv_k = \sum_{k=3}^{n-1} 3v_k + \sum_{k=3}^{n-1} (k-3)v_k = 3v + \sum_{k=3}^{n-1} (k-3)v_k.$$

Отсюда легко получить следующие уравнения:

$$v_4 + 2v_5 + 3v_6 + \dots + (n-4)v_{n-1} = 3n - 12,$$

$$v_3 + v_4 + \dots + v_{n-1} = n.$$

При  $n = 5$  сразу получаем, что  $v_3 = 2$ ,  $v_4 = 3$  — пирамида.

При  $n = 6$  имеем  $v_4 + 2v_5 = 6$ , т. е. это либо пирамида, либо октаэдр.

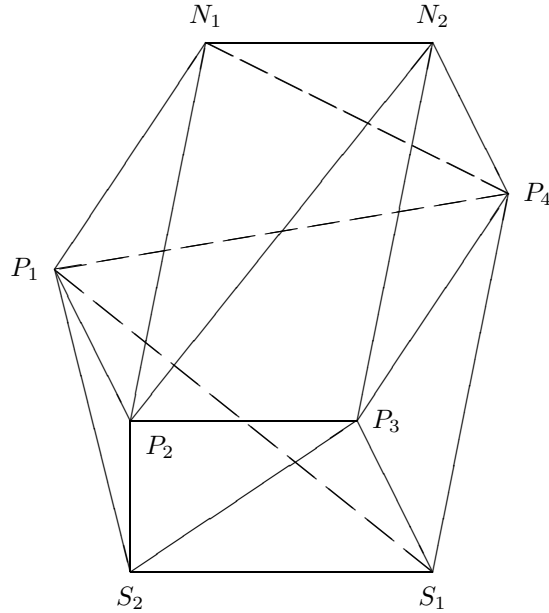


Рис. 2. Восьмивершинник

В случае  $n > 6$  сначала исключим пирамиды, предположив, что  $v_{n-1} = 0$ , и многогранники, имеющие вершины индекса 3:  $v_3 = 0$ .

При  $n = 7$  получим единственное решение  $v_4 = 5$ ,  $v_5 = 2$ , это подвеска.

При  $n = 8$  возможно несколько решений, а именно

$$v_7 = 0, \quad v_6 = 0, \quad v_5 = 4, \quad v_4 = 4, \quad v_3 = 0$$

и

$$v_7 = 0, \quad v_6 = 1, \quad v_5 = 2, \quad v_4 = 5, \quad v_3 = 0.$$

Первое решение даёт многогранник, показанный на рис. 2. Второму решению никакой многогранник не отвечает. Действительно, предположим, что мы имеем выпуклый многогранник  $P(K)$  с указанным набором вершин. Пусть  $A$  — вершина индекса 6, а  $B$  — вершина, не являющаяся смежной с  $A$ . Рассмотрим дополнение в  $P(K)$  к объединению звёзд вершин  $A$  и  $B$ . Эта область гомеоморфна либо четырёхугольнику, либо пятиугольнику, в зависимости от индекса вершины  $B$ . В каждом из этих случаев при любой триангуляции этой области в  $P(K)$  появится вершина индекса 3. Противоречие.

Осталось рассмотреть многогранники, полученные добавлением вершины индекса 3 к пирамидам и подвескам. При этом достаточно разобрать только случай пирамид, так как случай подвесок просто включён в классификацию.

Рассматривая различные триангуляции оснований пирамид, легко убедиться, что только пирамида с семью вершинами, показанная на рис. 1, позволяет получить новый комбинаторный тип.

Таким образом все комбинаторные типы перечислены.

Далее мы последовательно исследуем на изгибаемость многогранники каждого из перечисленных типов.

## 4. Пирамиды и подвески

О свойствах этих многогранников известны следующие факты.

**Теорема 1 ([4]).** *Любые погружённые пирамиды неизгибаемы.*

**Предложение 3 ([8]).** *Если подвеска изгибаема, то её обобщённый объём равен нулю.*

**Теорема 2 ([8]).** *Если подвеска вложена или погружена с условием, что она ограничивает погружённое трёхмерное многообразие, то она неизгибаема.*

В [8] Р. Коннелли предложил подход к исследованию изгибаемых многогранников, основанный на использовании аналитических функций комплексного переменного. Ниже мы также используем эту идею, но другим способом.

Для получения основного результата нам потребуются более сильные утверждения о пирамидах и подвесках, по крайней мере в рассматриваемом нами случае.

**Предложение 4.** *Пирамида топологического типа сферы неизгибаема, если любой цикл из трёх её рёбер (не обязательно принадлежащих одной грани) вложен.*

**Доказательство.** Рассмотрим основание пирамиды. Топологически это просто триангулированный многоугольник. Выберем некоторую грань  $P_0P_1P_2$ , лежащую в основании пирамиды, у которой два ребра  $P_0P_1$  и  $P_0P_2$  являются сторонами этого многоугольника.

Будем считать, что эта грань неподвижна в процессе изгибания. Тогда, как легко видеть, вершина  $O$  пирамиды тоже будет неподвижной при этом изгибании.

Теперь рассмотрим грань  $P_1P_2P_3$ , примыкающую к ребру  $P_1P_2$ . Тогда вершина  $P_3$  соединена рёбрами с неподвижными вершинами  $P_1, P_2, O$ , не лежащими на одной прямой по условию теоремы, и, следовательно, неподвижна при изгибании.

Продолжая этот процесс, заключаем, что все вершины пирамиды будут неподвижны при изгибании. Это означает, что пирамида неизгибаема.

**Теорема 3.** *Если погружённая подвеска имеет не более восьми вершин, то она неизгибаема.*

**Доказательство.** В [2] доказано, что погружённые подвески с числом вершин, меньшим восьми, являются на самом деле вложенными и, следовательно, неизгибаемыми в силу теоремы 2.

В [2] также исследован характер самопересечения поверхности погружённой подвески с восемью вершинами, не являющейся вложенной. Самопересечение сводится к зацеплению рёбер двух двухгранных углов, т. е. подвеска ограничивает погружённое трёхмерное многообразие и является неизгибаемой также в силу теоремы 2.

В заключение заметим, что изгибаемые октаэдр Брикара также являются подвесками, и приведённые выше факты означают, в частности, непогружённость таких октаэдров. Это можно проверить и непосредственно, исходя из описания октаэдров Брикара. (Описание можно найти, например, в [4].)

## 5. Многогранники, имеющие вершины индекса 3

В силу предложения 2 все такие многогранники с семью или восемью вершинами могут быть получены операцией добавления вершины индекса 3 только из пирамид и подвесок. Мы оставим открытым вопрос о многогранниках, полученных добавлением вершины индекса 3 из семивершинных подвесок.

**Теорема 4.** *Если погружённый многогранник, имеющий не более восьми вершин, получен из пирамиды или шестивершинной подвески с помощью операции добавления вершины (вершин) индекса 3, то такой многогранник неизгибаем.*

**Доказательство.** Итак, мы имеем многогранник  $P(K)$ , где комплекс  $K$  получен из некоторого комплекса  $K_1$  операцией добавления вершины индекса 3. Используя значения отображения  $P$  на вершинах комплекса  $K$ , мы естественным образом получим многогранник  $P_1: K_1 \rightarrow E^3$ .

В силу погружённости  $P(K)$  концы рёбер, выходящих из вершины индекса 3, не будут лежать на одной прямой. Поэтому знание длин этих рёбер позволяет однозначно продолжить любое изгибание многогранника  $P_1$  до изгибания  $P$ , причём если исходное изгибание было тривиальным, то и полученное также будет таковым. Таким образом, в условиях теоремы многогранники  $P$  и  $P_1$  изгибаемы или неизгибаемы одновременно.

Нам остаётся только проверить, что в условиях теоремы многогранник  $P_1$  будет неизгибаемым. В силу предложения 2 комплекс  $K_1$  может быть только пирамидой или подвеской. Разберём последовательно эти случаи.

Предположим, что комплекс  $K_1$  — это пирамида, показанная на рис. 1. Легко видеть, что есть только две комбинаторно неэквивалентные возможности добавить вершину индекса 3 к  $K_1$  так, чтобы комплекс  $K$  не стал пирамидой (напомним, что погружённые пирамиды неизгибаемы): для этого можно использовать либо грань  $P_1P_2P_6$ , либо грань  $P_2P_3P_6$ . Но в каждом из этих случаев с помощью предложения 1 легко проверить, что в случае погружённости  $P(K)$



все циклы из трёх рёбер комплекса  $K_1$  будут вложены. Следовательно, в силу предложения 4  $P_1$  и, значит,  $P$  неизгибаемы.

Пусть теперь  $K$  получен из подвески с шестью вершинами добавлением одной или двух вершин индекса 3. Мы проведём доказательство от противного: предположим, что многогранник  $P_1$  изгибаем, и докажем, что в этом случае многогранник  $P$  не является погружённым.

Изгибаемый многогранник  $P_1$  является либо октаэдром Брикара, либо получен из него добавлением одной вершины индекса 3. Октаэдры Брикара не являются погружёнными. Докажем, что при операции добавления вершин индекса 3, многогранники остаются непогружёнными.

Сначала изучим более подробно самопересечения изгибаемых октаэдров. Из их описания следует, что второй тип октаэдров Брикара имеет пересечения рёбер, это нельзя устранить добавлением вершин индекса 3. Октаэдры первого и третьего типа имеют по две вершины, звёзды которых не являются вложенными (рис. 3).

Пусть

$$P_1P_2S \cap P_1P_4N \neq \emptyset, \quad P_3P_4N \cap P_2P_3S \neq \emptyset, \\ P_2S \cap P_3P_4N \neq \emptyset, \quad P_4N \cap P_1P_2S \neq \emptyset,$$

причём пересечений других рёбер с неинцидентными им гранями нет.

Удалим грань  $P_1P_2S$  и добавим вместо неё вершину  $M$  индекса 3. (Другие варианты выбора грани комбинаторно эквивалентны этому).

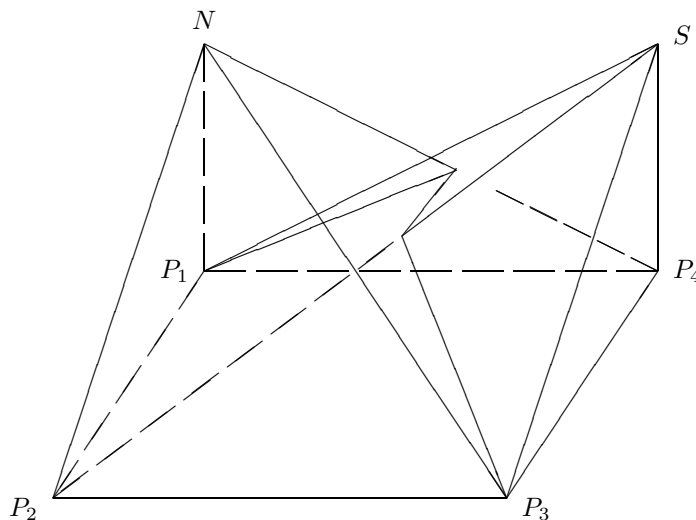


Рис. 3. Октаэдр Брикара

Итак,

$$P_2S \cap P_3P_4N \neq \emptyset.$$

Поэтому

$$P_2MS \cap P_3P_4N \neq \emptyset,$$

следовательно, либо

$$P_2M \cap P_3P_4N \neq \emptyset,$$

либо

$$MS \cap P_3P_4N \neq \emptyset,$$

либо одна из сторон треугольника  $P_3P_4N$  пересекает треугольник  $P_2MS$ .

В первом случае получаем, что

$$P_1P_2M \cap P_3P_4N \neq \emptyset.$$

Если при этом окажется, что

$$P_3N \cap P_1P_2M \neq \emptyset,$$

то звезда  $\text{St}(P_2)$  не является вложенной. Если

$$P_4N \cap P_1P_2M \neq \emptyset,$$

то звезда  $\text{St}(P_1)$  не является вложенной. Если

$$P_3P_4 \cap P_1P_2M \neq \emptyset,$$

то аналогичным образом получаем, что

$$P_3P_4S \cap P_1P_2M \neq \emptyset,$$

а отсюда следует, что звезда хотя бы одной из вершин  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $S$  не является вложенной. (Мы учли, что  $P_1P_2 \cap P_3P_4S = \emptyset$  по условию.)

Продолжая аналогичный перебор, мы установим, что звезда хотя бы одной из вершин  $P_1$ ,  $P_2$  или  $S$  не будет вложенной. Значит, в силу предложения 1 многогранник  $P$  не является погружённым. Более того, добавление ещё одной вершины индекса 3 не позволит получить погружённый многогранник, так как есть по крайней мере ещё одна невложенная звезда.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

## 6. Особый многогранник с восемью вершинами

Исследование последнего типа многогранника проведём по схеме, предложенной Р. Коннелли [8]. Этот метод основан на использовании теории аналитических функций. В самом общем виде он состоит из следующих шагов:

- 1) выбор параметра, описывающего изгибаия;
- 2) вывод уравнения изгибаемости;
- 3) выход в комплексную область;
- 4) исследование зависимости объёма многогранника от параметра изгибаия.

Для получения основного результата нам придётся модифицировать предложенный метод исследования. Для этого, сохранив идею использования аналитических функций, мы запишем уравнения изгибаемости в другом виде. Это позволит нам связать с каждым изгибаемым многогранником рассматриваемого типа риманову поверхность, на которой мы и будем исследовать функцию объёма.

Сначала, следуя [8], мы определим объём невложенного многогранника и получим исходные формулы для зависимости объёма от параметра изгибаения.

### 6.1. Обобщённый объём

Так как рассматриваемые нами многогранные поверхности могут иметь самопересечения, приходится специально оговаривать, что понимать под объёмом, который они ограничивают (см. [8]).

Сначала зафиксируем некоторую ориентацию комплекса  $K$ , затем выберем ориентацию евклидова пространства  $E^3$  и произвольную точку  $O$  в нём. Затем рассмотрим сумму смешанных произведений

$$V(P) = \frac{1}{6} \sum \langle \overline{OP_i} \overline{OP_j} \overline{OP_k} \rangle,$$

где  $P_i = P(p_i)$  и сумма берётся по всем граням  $p_i, p_j, p_k$ , ориентация которых согласована с ориентацией  $K$ . Число  $V(P)$  называется обобщённым объёмом многогранника  $P(K)$  (мы будем говорить просто «объём»). Обобщённый объём не зависит от выбора точки  $O$  и совпадает с обычным ориентированным объёмом, если многогранник  $P$  вложен. В частности, тогда он не равен нулю.

Ниже нам понадобится зависимость объёма «тетраэдра»  $P_1P_2NS$  от параметра изгибаения  $x = d_{NS}^2$  (рис. 4). При этом мы предполагаем, что известны длины всех рёбер тетраэдра, кроме  $NS$ .

Оказывается, что квадрат объёма будет квадратичным многочленом от  $x$ , обязательно имеющим два действительных корня:

$$\begin{aligned} 36V_{P_1P_2NS}^2 &= \langle \overline{P_1N} \overline{P_1S} \overline{P_1P_2} \rangle^2 = \begin{vmatrix} \overline{P_1N} \overline{P_1N} & \overline{P_1S} \overline{P_1N} & \overline{P_1P_2} \overline{P_1N} \\ \overline{P_1N} \overline{P_1S} & \overline{P_1S} \overline{P_1S} & \overline{P_1P_2} \overline{P_1S} \\ \overline{P_1N} \overline{P_1P_2} & \overline{P_1S} \overline{P_1P_2} & \overline{P_1P_2} \overline{P_1P_2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} d_{P_1N}^2 & \frac{d_{P_1S}^2 + d_{P_1N}^2 - x}{2} & \frac{d_{P_1N}^2 + d_{P_1P_2}^2 - d_{P_2N}^2}{2} \\ \frac{d_{P_1N}^2 + d_{P_1S}^2 - x}{2} & d_{P_1S}^2 & \frac{d_{P_1S}^2 + d_{P_1P_2}^2 - d_{P_2S}^2}{2} \\ \frac{d_{P_1N}^2 + d_{P_1P_2}^2 - d_{P_2N}^2}{2} & \frac{d_{P_1S}^2 + d_{P_1P_2}^2 - d_{P_2S}^2}{2} & d_{P_1P_2}^2 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{d_{P_1P_2}^2}{4} (x - v)(x - v'). \end{aligned}$$

Достаточно очевиден геометрический смысл корней  $0 \leq v \leq v'$  функции объёма: при  $x = v$  и  $x = v'$  треугольники  $P_1P_2N$  и  $P_1P_2S$  лежат в одной плоскости (рис. 5).

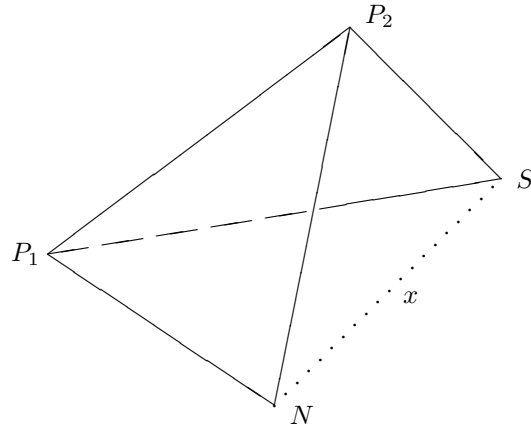


Рис. 4. Изменение объёма тетраэдра

Аналогично выводится вид зависимости для площади треугольников  $P_1NS$  и  $P_2NS$ :

$$4S_{P_1NS}^2 = [\overline{P_1N} \times \overline{P_1S}]^2 = \begin{vmatrix} \overline{P_1N} & \overline{P_1N} \\ \overline{P_1N} & \overline{P_1S} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{P_1S} & \overline{P_1N} \\ \overline{P_1S} & \overline{P_1S} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} d_{P_1N}^2 & \frac{d_{P_1S}^2 + d_{P_1N}^2 - x}{2} \\ \frac{d_{P_1N}^2 + d_{P_1S}^2 - x}{2} & d_{P_1S}^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(x - s)(x - s').$$

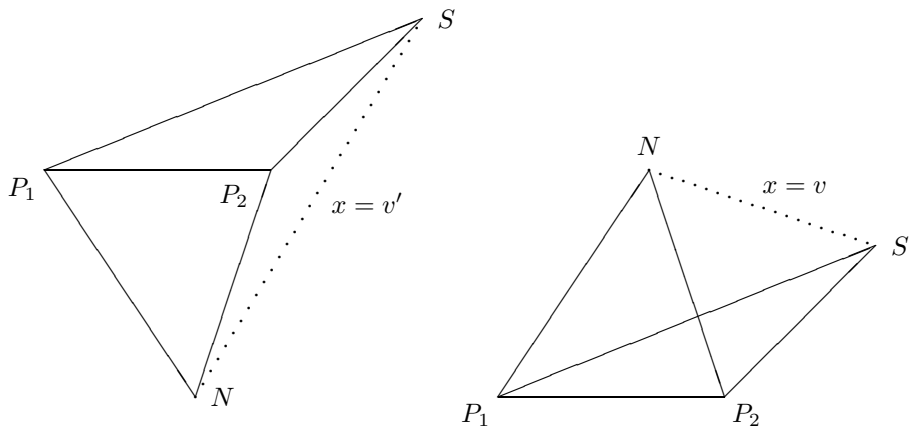


Рис. 5. Корни объёма

Здесь также очевиден геометрический смысл корней  $0 \leq s \leq s'$ : при  $x = s$  и  $x = s'$  рёбра  $P_1N$  и  $P_1S$  лежат на одной прямой. Легко видеть, что  $s = (d_{P_1N} - d_{P_1S})^2$ ,  $s' = (d_{P_1N} + d_{P_1S})^2$  и  $0 \leq s \leq v < v' \leq s'$ .

## 6.2. Векторные формулы

Для вычисления расстояний и объёмов нам потребуются следующие формулы для скалярного и смешанного произведений.

**Лемма 1.**  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \bar{n}^2 = \langle \bar{a} \times \bar{n}, \bar{b} \times \bar{n} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{n} \rangle \langle \bar{b}, \bar{n} \rangle$ .

**Доказательство.**

$$\langle \bar{a} \times \bar{n}, \bar{b} \times \bar{n} \rangle = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{n} \\ \bar{n}\bar{b} & \bar{n}\bar{n} \end{vmatrix} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \bar{n}^2 - \langle \bar{a}, \bar{n} \rangle \langle \bar{b}, \bar{n} \rangle.$$

**Лемма 2.**  $\langle \bar{a} \bar{b} \bar{c} \rangle |\bar{a} \times \bar{n}|^2 = \langle \bar{a} \times \bar{n}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle \langle \bar{a} \bar{n} \bar{c} \rangle - \langle \bar{a} \times \bar{n}, \bar{a} \times \bar{c} \rangle \langle \bar{a} \bar{n} \bar{b} \rangle$ .

**Доказательство.** Используя предыдущую лемму и известную формулу

$$\bar{a} \times [\bar{b} \times \bar{c}] = \bar{b} \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle - \bar{c} \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle,$$

получим

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}, \bar{b} \times \bar{c} \rangle |\bar{a} \times \bar{n}|^2 &= \\ &= \langle \bar{a} \times [\bar{a} \times \bar{n}], [\bar{b} \times \bar{c}] \times [\bar{a} \times \bar{n}] \rangle + \langle \bar{a}, [\bar{a} \times \bar{n}] \rangle \langle [\bar{b} \times \bar{c}], [\bar{a} \times \bar{n}] \rangle = \\ &= \langle \bar{a} \times [\bar{a} \times \bar{n}], \bar{c} \langle \bar{a} \bar{n} \bar{b} \rangle - \bar{b} \langle \bar{a} \bar{n} \bar{c} \rangle \rangle = \\ &= \langle [\bar{a} \times \bar{n}], [\bar{c} \times \bar{a}] \rangle \langle \bar{a} \bar{n} \bar{b} \rangle - \langle [\bar{a} \times \bar{n}], [\bar{b} \times \bar{a}] \rangle \langle \bar{a} \bar{n} \bar{c} \rangle. \end{aligned}$$

## 6.3. Параметр для описания изгибаний

Для того чтобы написать уравнения изгибаемости, сначала рассмотрим изгибания только части многогранника («половинки»), показанной на рис. 6.

В качестве параметра  $x$ , описывающего изгибания, будем использовать квадрат расстояния  $d_{P_2P_4}^2$  между вершинами  $P_2, P_4$ . Зная это расстояние и длины всех рёбер, мы можем восстановить расстояния между любыми двумя вершинами многогранника.

Такой подход был использован И. Х. Сабитовым [3] при исследовании изгибаний подвесок. Там же была приведена формула, позволяющая вычислить расстояние между двумя вершинами многогранника, не связанными ребром, по известным длинам рёбер многогранника и параметру. Нам понадобится итерация этой формулы.

**Предложение 5.** Зависимость пространственного расстояния между вершинами  $P_1, P_3$  от параметра изгибания  $x = d_{P_2P_4}^2$  выражается формулой

$$y(x) = d_{P_1P_3}^2(x) = \frac{R_0 + R_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sqrt{V_2 V_3} + R_2 \varepsilon_3 \varepsilon_1 \sqrt{V_3 V_1} + R_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{V_1 V_2}}{8S_1 S_2},$$

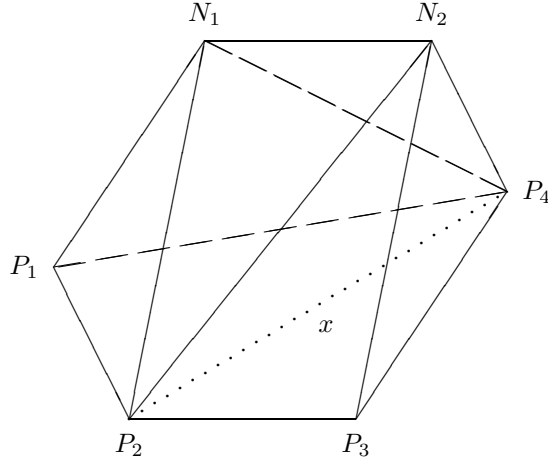


Рис. 6. Изгибание половинки многогранника

где

$$R_0(x) = \frac{d_{P_1 N_1}^2 + d_{N_1 N_2}^2 + d_{N_2 P_3}^2}{32} x^4 + k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0,$$

$$R_i(x) = -\frac{x^2}{4} + a_i x + b_i, \quad i = 1, 2, 3, -$$

многочлены по  $x$ . Коэффициенты  $k_j$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  вычисляются по известным длинам рёбер многогранника. Остальные члены формулы выражают зависимости от  $x$  квадратов объёмов и квадратов площадей (см. выше):

$$\varepsilon_1 \sqrt{V_1(x)} = \langle \overline{P_1 P_2} \overline{P_1 P_4} \overline{P_1 N_1} \rangle, \quad V_1(x) = -\frac{d_{P_1 N_1}^2}{4} (x - v_1)(x - v'_1),$$

$$\varepsilon_2 \sqrt{V_2(x)} = \langle \overline{N_1 P_2} \overline{N_1 P_4} \overline{N_1 N_2} \rangle, \quad V_2(x) = -\frac{d_{N_1 N_2}^2}{4} (x - v_2)(x - v'_2),$$

$$\varepsilon_3 \sqrt{V_3(x)} = \langle \overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} \overline{N_2 P_3} \rangle, \quad V_3(x) = -\frac{d_{N_2 P_3}^2}{4} (x - v_3)(x - v'_3),$$

где  $\varepsilon_i = \pm 1$  в зависимости от ориентации тройки векторов,

$$4S_1(x) = [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}]^2 = -\frac{1}{4} (x - s_1)(x - s'_1),$$

$$4S_2(x) = [\overline{N_2 P_2} \times \overline{N_2 P_4}]^2 = -\frac{1}{4} (x - s_2)(x - s'_2),$$

причём  $0 \leq s_i \leq v_i < v'_i \leq s'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и  $x$  заключено в пределах от  $x_0 = \max\{v_1, v_2, v_3\}$  до  $x_1 = \min\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ .

**Доказательство.** Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_1}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_1} \rangle, \\ R_2(x) &= \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_1}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2} \rangle, \\ R_3(x) &= \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_3} \rangle. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \left| \frac{\overline{P_2P_4} \overline{P_2P_4}}{\overline{P_2P_4} \overline{P_2N_1}} \frac{\overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1}}{\overline{P_2N_1} \overline{P_2P_1}} \right| = \\ &= \left| \frac{x}{\frac{x+d_{P_2N_1}^2-d_{P_4N_1}^2}{2}} \frac{\frac{x+d_{P_1P_2}^2-d_{P_1P_4}^2}{2}}{\overline{P_2N_1} \overline{P_2P_1}} \right| = -\frac{x^2}{4} + a_1x + b_1. \end{aligned}$$

Пользуясь выведенными векторными формулами, в силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} d_{P_1P_3}^2(x) &= (\overline{N_2P_1} - \overline{N_2P_3})^2 = d_{P_1N_2}^2 + d_{P_3N_2}^2 - 2\langle \overline{N_2P_1}, \overline{N_2P_3} \rangle = \\ &= d_{P_1N_2}^2 + d_{P_3N_2}^2 - \frac{2}{4S_2} \langle \overline{N_2P_1}, \overline{N_2P_3} \rangle [\overline{N_2P_2} \times \overline{N_2P_4}]^2 = \\ &= d_{P_1N_2}^2 + d_{P_3N_2}^2 - \frac{2}{4S_2} \{ \langle \overline{N_2P_1} \times [\overline{N_2P_2} \times \overline{N_2P_4}], \overline{N_2P_3} \times [\overline{N_2P_2} \times \overline{N_2P_4}] \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{N_2P_1} \overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4} \rangle \langle \overline{N_2P_3} \overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4} \rangle \}. \end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} & - \langle \overline{N_2P_1} \times [\overline{N_2P_2} \times \overline{N_2P_4}], \overline{N_2P_3} \times [\overline{N_2P_2} \times \overline{N_2P_4}] \rangle = \\ &= \frac{d_{P_1N_2}^2 + d_{P_2N_2}^2 - d_{P_1P_2}^2}{2} \left| \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}}{d_{P_4N_2}^2} \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_3}}{\overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3}} \right| - \\ & - \frac{d_{P_1N_2}^2 + d_{P_4N_2}^2 - d_{P_1P_4}^2}{2} \left| \frac{d_{P_2N_2}^2}{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}} \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_3}}{\overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3}} \right|. \end{aligned}$$

Теперь соберём вместе слагаемые, содержащие  $d_{N_2P_1}^2$ , и учтём, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d_{P_2N_2}^2}{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}} \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}}{d_{N_2P_4}^2} \right| - \left| \frac{d_{P_2N_2}^2}{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}} \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_3}}{\overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3}} \right| + \\ & + \left| \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}}{d_{P_4N_2}^2} \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_3}}{\overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3}} \right| = \left| \frac{\overline{P_2P_4} \overline{P_2P_4}}{\overline{P_2N_2} \overline{P_2P_4}} \frac{\overline{P_2P_4} \overline{P_2P_3}}{\overline{P_2N_2} \overline{P_2P_3}} \right| = R_3(x). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$d_{P_1P_3}^2 = d_{P_3N_2}^2 + \frac{d_{P_2N_2}^2 - d_{P_1P_2}^2}{4S_2} \left| \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4}}{d_{P_4N_2}^2} \frac{\overline{N_2P_2} \overline{N_2P_3}}{\overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3}} \right| -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d_{P_4 N_2}^2 - d_{P_1 P_4}^2}{4S_2} \left| \frac{d_{P_2 N_2}^2}{N_2 P_2 \overline{N_2 P_4}} \frac{\overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_3}}{N_2 P_4 \overline{N_2 P_3}} \right| + \frac{R_3}{4S_2} d_{P_1 N_2}^2 - \\
& - \frac{2}{4S_2} \langle \overline{N_2 P_1} \overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} \rangle \langle \overline{N_2 P_3} \overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} \rangle.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
d_{P_1 N_2}^2(x) &= d_{P_1 N_1}^2 + d_{N_1 N_2}^2 - 2 \langle \overline{N_1 P_1}, \overline{N_1 N_2} \rangle = d_{P_1 N_1}^2 + d_{N_1 N_2}^2 - \\
& - \frac{2}{4S_1} \{ \langle \overline{N_1 P_1} \times [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}], \overline{N_1 N_2} \times [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}] \rangle + \\
& + \langle \overline{N_1 P_1} \overline{N_1 P_2} \overline{N_1 P_4} \rangle \langle \overline{N_1 N_2} \overline{N_1 P_2} \overline{N_1 P_4} \rangle \},
\end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned}
\langle \overline{N_1 P_1} \overline{N_1 P_2} \overline{N_1 P_4} \rangle &= - \langle \overline{P_1 P_2} \overline{P_1 P_4} \overline{P_1 N_1} \rangle = -\varepsilon_1 \sqrt{V_1}, \\
\langle \overline{N_1 N_2} \overline{N_1 P_2} \overline{N_1 P_4} \rangle &= \varepsilon_2 \sqrt{V_2}, \\
\langle \overline{N_2 P_3} \overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} \rangle &= \varepsilon_3 \sqrt{V_3}.
\end{aligned}$$

Теперь обозначим

$$\begin{aligned}
R_0(x) &= 8S_1 S_2 d_{P_3 N_2}^2 + \frac{d_{P_2 N_2}^2 - d_{P_1 P_2}^2}{2} \left| \frac{\overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4}}{d_{P_4 N_2}^2} \frac{\overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_3}}{\overline{N_2 P_4} \overline{N_2 P_3}} \right| 2S_1 - \\
& - 2S_1 \frac{d_{P_4 N_2}^2 - d_{P_1 P_4}^2}{2} \left| \frac{d_{P_2 N_2}^2}{N_2 P_2 \overline{N_2 P_4}} \frac{\overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_3}}{N_2 P_4 \overline{N_2 P_3}} \right| + 2S_1 R_3 (d_{P_1 N_1}^2 + d_{N_1 N_2}^2) - \\
& - R_3 \langle \overline{N_1 P_1} \times [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}], \overline{N_1 N_2} \times [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}] \rangle.
\end{aligned}$$

Сразу вычислим старший член в  $R_0$ . Для этого заметим, что среди скалярных произведений от  $x$  зависит только произведение

$$\overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} = \frac{d_{P_2 N_2}^2 + d_{P_4 N_2}^2 - x}{2}.$$

Поэтому и

$$\begin{aligned}
& \langle \overline{N_1 P_1} \times [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}], \overline{N_1 N_2} \times [\overline{N_1 P_2} \times \overline{N_1 P_4}] \rangle = \\
& = -(\overline{N_1 P_1} \overline{N_1 P_2}) \left| \frac{\overline{N_1 P_2} \overline{N_1 P_4}}{d_{P_4 N_1}^2} \frac{\overline{N_1 P_2} \overline{N_1 N_2}}{\overline{N_1 P_4} \overline{N_1 N_2}} \right| + \\
& + (\overline{N_1 P_1} \overline{N_1 P_4}) \left| \frac{d_{P_2 N_1}^2}{N_1 P_2 \overline{N_1 P_4}} \frac{\overline{N_1 P_2} \overline{N_1 N_2}}{\overline{N_1 P_4} \overline{N_1 N_2}} \right|
\end{aligned}$$

линейно по  $x$ . Вид остальных зависимостей указан выше.

В итоге заключаем, что

$$R_0(x) = \frac{d_{P_1 N_1}^2 + d_{N_1 N_2}^2 + d_{N_2 P_3}^2}{32} x^4 + \dots$$



Имеем

$$d_{P_1 P_3}^2 = \frac{R_0 + R_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{V_1 V_2}}{8S_1 S_2} - \frac{\langle \overline{N_2 P_1} \overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} \rangle \varepsilon_3 \sqrt{V_3}}{2S_2}.$$

Наконец, вычислим объём, используя лемму 2:

$$\begin{aligned} \langle \overline{N_2 P_2} \overline{N_2 P_4} \overline{N_2 P_1} \rangle &= \langle \overline{P_2 P_4} \overline{P_2 N_2} \overline{P_2 P_1} \rangle = \\ &= \frac{1}{4S_1} \langle \overline{P_2 P_4} \overline{P_2 N_2} \overline{P_2 P_1} \rangle [\overline{P_2 P_4} \times \overline{P_2 N_1}]^2 = \\ &= \frac{1}{4S_1} \{ \langle \overline{P_2 P_4} \times \overline{P_2 N_1}, \overline{P_2 P_4} \times \overline{P_2 N_2} \rangle \langle \overline{P_2 P_4} \overline{P_2 N_1} \overline{P_2 P_1} \rangle - \\ &\quad - \langle \overline{P_2 P_4} \times \overline{P_2 N_1}, \overline{P_2 P_4} \times \overline{P_2 P_1} \rangle \langle \overline{P_2 P_4} \overline{P_2 N_1} \overline{P_2 N_2} \rangle \} = \\ &= \frac{-R_2 \varepsilon_1 \sqrt{V_1} - R_1 \varepsilon_2 \sqrt{V_2}}{4S_1}. \end{aligned}$$

Произведя подстановки, получим требуемую формулу.

Таким образом, мы можем рассматривать  $y(x)$  как аналитическую функцию от  $x$ , которая становится однозначной на некоторой римановой поверхности  $M$ . Свойства этой римановой поверхности, в конечном счёте, зависят от длин рёбер многогранника. В нашем случае это 1-, 2- или 4-листная риманова поверхность топологического рода не больше трёх.

Заметим, что мы можем дословно повторить проведённые вычисления и для нижней половинки, если будем использовать  $y = d_{P_1 P_3}^2$  как параметр изгиба. При этом мы получим точно такую же формулу, выражающую зависимость  $x = d_{P_2 P_4}^2$  от параметра изгиба  $y = d_{P_1 P_3}^2$ . Это можно сделать и чисто формально, установив следующее соответствие между вершинами:

$$P_1 - P_4, \quad P_2 - P_3, \quad N_1 - S_1, \quad N_2 - S_2.$$

При этом нижняя половинка в точности переходит в верхнюю и наоборот.

Теперь покажем, что параметр  $x$  можно использовать и для описания возможных изгибов исходного многогранника  $P$ .

#### 6.4. Уравнение изгибаемости

**Предложение 6.** *Если при изгибании погружённого многогранника рассматриваемого типа хотя бы одно из расстояний  $x = d_{P_2 P_4}^2$  или  $y = d_{P_1 P_3}^2$  не изменяется, то такое изгибание является тривиальным.*

**Доказательство.** Пусть расстояние  $d_{P_2 P_4}$  неизменно. Рассмотрим изгибание, при котором никакие три вершины многогранника (см. рис. 2) не лежат на одной прямой. Пусть вершины  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_4$  неподвижны при этом изгибании. Тогда, как легко видеть, все вершины будут неподвижны и, значит, любое изгибание многогранника тривиально.

Теперь разберём различные варианты нарушения этого условия, учитывая, что многие случаи разбираются одинаково с точностью до переобозначения вершин.

Предположим, что точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_4$  лежат на одной прямой. (Заметим, что это условие сохраняется в процессе изгибания.) Из погружённости многогранника в силу предложения 1 следует, что вершина  $P_1$  лежит между  $P_2$  и  $P_4$ . Тогда ни одна из точек  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $P_3$  не лежит на прямой  $P_1P_4$ . Поэтому в случае неподвижности вершин  $P_1$ ,  $P_4$  и  $P_3$  останутся неподвижными и все оставшиеся вершины многогранника. Значит, любое изгибание в этом случае будет тривиальным.

Пусть вершины  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  не лежат на одной прямой, а вершина  $N_1$  лежит на прямой  $P_2P_4$ . Тогда рассмотрим  $N_1$  как фальшивую вершину многогранника  $P_1P_2P_3P_4N_2S_1S_2$ , объединив грани  $P_1P_2N_1$  и  $P_1P_4N_1$  в одну грань нового многогранника  $P_1P_2P_4$ , а  $P_2N_1N_2$  и  $P_4N_1N_2$  — в  $P_2P_3P_4$ . Вершина  $N_2$  полученного многогранника имеет индекс 3. Легко проверить, что многогранник будет погружённым и, значит, неизгибаемым по теореме 4.

Этим заканчивается перебор существенно различных случаев. Предложение доказано.

Из предложений 5 и 6 следует, что для изгибаемого многогранника мы имеем две функции одного и того же вида:  $y = d_{P_1P_3}^2(x)$  и  $x = d_{P_2P_4}^2(y)$ . Их можно выписать, используя предложение 5 для верхней или нижней «половинки» многогранника соответственно.

Теперь напишем уравнения изгибаемости в следующей форме.

**Предложение 7.** *Погружённый многогранник рассматриваемого вида изгибаем в том и только в том случае, когда функции  $y = d_{P_1P_3}^2(x)$  и  $x = d_{P_2P_4}^2(y)$  взаимно-обратны при  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $y_0 \leq y \leq y_1$ .*

Рассматривая аналитические продолжения этих функций, заключаем, что они являются взаимно-обратными аналитическими функциями на единой римановой поверхности  $M$ . Это условие порождает целую серию необходимых условий изгибаемости. Например, полюса каждой из этих функций обязаны совпадать со значениями второй в бесконечно удалённой точке, точки ветвления — с критическими точками и т. д. Но мы, чтобы избежать перебора множества случаев, рассмотрим более интегральную характеристику многогранника — его объём.

## 6.5. Объём многогранника

Вычислим обобщённый объём многогранника. Для этого, наряду с обозначениями предложения 5, введём обозначения для нижней половинки многогранника (напомним, что для нижней половинки естественно использовать параметр  $y$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_1\sqrt{\tilde{V}_1(y)} &= \langle \overline{P_4P_3} \overline{P_4P_1} \overline{P_4S_1} \rangle, \\ \tilde{\varepsilon}_2\sqrt{\tilde{V}_2(y)} &= \langle \overline{S_1P_3} \overline{S_1P_1} \overline{S_1S_2} \rangle, \\ \tilde{\varepsilon}_3\sqrt{\tilde{V}_3(y)} &= \langle \overline{S_2P_3} \overline{S_2P_1} \overline{S_2P_2} \rangle,\end{aligned}$$

где  $\tilde{\varepsilon}_i = \pm 1$  в зависимости от ориентации тройки векторов.

**Предложение 8.** *Обобщённый объём  $V$  многогранника  $P$  равен*

$$\begin{aligned}V &= \varepsilon_1\sqrt{V_1(x)} + \varepsilon_2\sqrt{V_2(x)} + \varepsilon_3\sqrt{V_3(x)} + \\ &\quad + \tilde{\varepsilon}_1\sqrt{\tilde{V}_1(y)} + \tilde{\varepsilon}_2\sqrt{\tilde{V}_2(y)} + \tilde{\varepsilon}_3\sqrt{\tilde{V}_3(y)} - \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle.\end{aligned}$$

**Доказательство.** Выберем ориентацию граней многогранника следующим образом:  $P_1P_2N_1$ ,  $P_2N_2N_1$ ,  $P_2P_3N_2$ ,  $P_3P_4N_2$ ,  $P_4N_1N_2$ ,  $P_4P_1N_1$ ,  $P_2P_1S_2$ ,  $P_3P_2S_2$ ,  $P_3S_2S_1$ ,  $P_4P_3S_1$ ,  $P_1P_4S_1$ ,  $P_1S_1S_2$ .

Выбрав за начало отсчёта точку  $P_3$ , получим выражение для обобщённого объёма:

$$\begin{aligned}V &= \langle \overline{P_3P_1} \overline{P_3P_2} \overline{P_3N_1} \rangle + \langle \overline{P_3P_2} \overline{P_3N_2} \overline{P_3N_1} \rangle + \langle \overline{P_3P_4} \overline{P_3N_1} \overline{P_3N_2} \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{P_3P_4} \overline{P_3P_1} \overline{P_3N_1} \rangle + \langle \overline{P_3P_2} \overline{P_3P_1} \overline{P_3S_2} \rangle + \langle \overline{P_3P_1} \overline{P_3P_4} \overline{P_3S_1} \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{P_3P_1} \overline{P_3S_1} \overline{P_3S_2} \rangle.\end{aligned}$$

Последние три слагаемые легко привести к виду, использованному во введённых обозначениях. Первые четыре преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}V &= \langle \overline{P_3P_1} \overline{P_3N_1} (-\overline{P_3P_2} + \overline{P_3P_4}) \rangle + \langle \overline{P_3N_1} \overline{P_3N_2} (-\overline{P_3P_2} + \overline{P_3P_4}) \rangle + \dots = \\ &= \langle \overline{P_3P_1} (\overline{P_3P_2} + \overline{P_2N_1}) \overline{P_2P_4} \rangle + \langle (\overline{P_3P_2} + \overline{P_2N_1}) \overline{P_3N_2} \overline{P_2P_4} \rangle + \dots = \\ &= \langle \overline{P_3P_1} \overline{P_3P_2} \overline{P_2P_4} \rangle + \langle (\overline{P_3P_2} + \overline{P_2P_1}) \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_4} \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{P_3P_2} \overline{P_3N_2} \overline{P_2P_4} \rangle + \langle \overline{P_2N_1} \overline{P_3N_2} \overline{P_2P_4} \rangle + \dots = \\ &= -\langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle + \langle \overline{P_2P_1} \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_4} \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3} \rangle + \langle \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_4} (\overline{P_3P_2} - \overline{P_3N_2}) \rangle + \dots = \\ &= -\langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle + \langle \overline{P_1P_2} \overline{P_1P_4} \overline{P_1N_1} \rangle + \\ &\quad + \langle \overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3} \rangle + \langle \overline{N_1P_2} \overline{N_1P_4} \overline{N_1N_2} \rangle + \dots\end{aligned}$$

Остаётся только воспользоваться обозначениями предложения 5, и требуемое выражение получено.

В приведённой формуле подчёркнуты зависимости объёмов от естественных для каждой из половинок параметров. Объём же «зазора» между половинками естественным образом зависит от каждого из параметров. Но, учитывая связь между  $y$  и  $x$ , мы можем вычислить зависимость только через один из параметров. При этом вид зависимости как от  $x$ , так и от  $y$  будет одним и тем же.

**Предложение 9.** Зависимость смешанного произведения  $\langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle$  от параметра изгиба  $x$  выражается формулой

$$\langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle = \frac{\varepsilon_3 R_1 R_2 \sqrt{V_3} + \varepsilon_1 R_2 R_3 \sqrt{V_1} + \varepsilon_2 R_3 R_1 \sqrt{V_2} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 x \sqrt{V_1 V_2 V_3}}{16 S_1 S_2},$$

где  $x_0 \leq x \leq x_1$ .

**Доказательство.** В силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} & \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle | \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2} |^2 = \\ & = \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_1} \rangle \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \overline{P_2P_3} \rangle - \\ & - \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_3} \rangle \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \overline{P_2P_1} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь (см. предложение 5)

$$\begin{aligned} \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \overline{P_2P_3} \rangle & = \langle \overline{N_2P_2} \overline{N_2P_4} \overline{N_2P_3} \rangle = \varepsilon_3 \sqrt{V_3}, \\ \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_3} \rangle & = R_3. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_1} \rangle & = \left| \begin{array}{cc} \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_4} & \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \\ \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} & \overline{P_2P_1} \overline{P_2N_2} \end{array} \right| = \\ & = x \langle \overline{P_2P_1}, \overline{P_2N_2} \rangle - \langle \overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_1} \rangle \langle \overline{P_2P_4}, \overline{P_2N_2} \rangle = \\ & = \frac{1}{4S_1} \left\{ x \langle \overline{P_2P_1}, \overline{P_2N_2} \rangle | \overline{P_2N_1} \times \overline{P_2P_4} |^2 - \right. \\ & \left. - \langle \overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_1} \rangle \langle \overline{P_2P_4}, \overline{P_2N_2} \rangle \left| \begin{array}{cc} d_{P_2N_1}^2 & \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_4} \\ \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_1} & x \end{array} \right| \right\}. \end{aligned}$$

В силу леммы 1

$$\begin{aligned} & \langle \overline{P_2P_1}, \overline{P_2N_2} \rangle | \overline{P_2N_1} \times \overline{P_2P_4} |^2 = \\ & = \langle \overline{P_2P_1} \times [\overline{P_2N_1} \times \overline{P_2P_4}], \overline{P_2N_2} \times [\overline{P_2N_1} \times \overline{P_2P_4}] \rangle + \\ & + \langle \overline{P_2P_1} \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_4} \rangle \langle \overline{P_2N_2} \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_4} \rangle = \\ & = - \langle \overline{P_2P_1}, \overline{P_2N_1} \rangle \left| \begin{array}{cc} \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_1} & \overline{P_2N_1} \overline{P_2N_2} \\ x & \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \end{array} \right| + \\ & + \langle \overline{P_2P_1}, \overline{P_2P_4} \rangle \left| \begin{array}{cc} d_{P_2N_1}^2 & \overline{P_2N_1} \overline{P_2N_2} \\ \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_1} & \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \end{array} \right| - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{V_1 V_2}. \end{aligned}$$

Раскроем определители. После преобразований получим, что

$$\langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_1} \rangle = \frac{1}{4S_1} \{ R_1 R_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 x \sqrt{V_1 V_2} \}.$$

Теперь вычислим смешанное произведение:

$$\begin{aligned} & \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_2} \overline{P_2P_1} \mid \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_1} \rangle^2 = \\ & = \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_1}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_2} \rangle \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_1} \overline{P_2P_1} \rangle - \\ & - \langle \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2N_1}, \overline{P_2P_4} \times \overline{P_2P_1} \rangle \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2N_1} \overline{P_2N_2} \rangle = -R_2\varepsilon_1\sqrt{V_1} - R_1\varepsilon_2\sqrt{V_2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \langle \overline{P_2P_4} \overline{P_2P_1} \overline{P_2P_3} \rangle = \\ & = \frac{1}{16S_1S_2} \{ \varepsilon_3R_1R_2\sqrt{V_3} + \varepsilon_1R_2R_3\sqrt{V_1} + \varepsilon_2R_3R_1\sqrt{V_2} - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3x\sqrt{V_1V_2V_3} \}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Теперь рассмотрим аналитические продолжения исследуемых функций. Напомним, что для изгибаемых многогранников мы ввели риманову поверхность  $M$  для взаимно-обратных аналитических функций  $y = d_{P_1P_3}^2(x)$  и  $x = d_{P_2P_4}^2(y)$ . Рассмотрим на этой же римановой поверхности объём  $V(x, y)$ .

**Предложение 10.** *Обобщённый объём  $V$  как аналитическая функция на римановой поверхности  $M$  не имеет полюсов.*

**Доказательство.** Действительно, каждое слагаемое в выражении, полученном в предложении 8, является квадратным корнем из многочлена от переменных  $x$  и  $y$ . Поэтому функция  $V$  может иметь полюса только в бесконечно удалённых точках римановой поверхности  $M$ . Докажем, что предел функции  $V(x, y(x))$  при  $x \rightarrow \infty$  конечен вне зависимости от выбора пути и листа римановой поверхности (хотя числовое значение может быть своим для каждого листа  $M$ ).

Сначала заметим, что в силу предложения 5  $y$  будет всегда конечным при  $x \rightarrow \infty$ , так как и числитель, и знаменатель дроби имеют одинаковый порядок  $x^4$ . Поэтому три последних слагаемых не имеют особенностей в бесконечно удалённой точке.

Далее, используя предложение 9, запишем зависимость от  $x$  первых четырёх слагаемых в  $V$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(x, y(x)) = \frac{1}{16S_1S_2} \{ \varepsilon_3(16S_1S_2 - R_1R_2)\sqrt{V_3} + \varepsilon_1(16S_1S_2 - R_2R_3)\sqrt{V_1} + \\ + \varepsilon_2(16S_1S_2 - R_3R_1)\sqrt{V_2} + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3x\sqrt{V_1V_2V_3} \}. \end{aligned}$$

Из формул предложения 5 следует, что и числитель, и знаменатель имеют четвёртый порядок по  $x$ . Действительно, старшие члены многочленов  $16S_1S_2$  и  $R_iR_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , совпадают и их разность является многочленом третьей степени по  $x$ . А все  $V_i(x)$  — многочлены второй степени. Поэтому  $\lim V(x, y(x))$  при  $x \rightarrow \infty$  конечен вне зависимости от выбора пути.

**Следствие 1.** *Аналитическая функция  $V(x, y)$  постоянна.*

**Следствие 2.** *Обобщённый объём изгибаемого восьмивершинника рассматриваемого комбинаторного типа равен нулю.*

**Доказательство.** Возьмём точку  $x$  из отрезка  $[x_0, x_1]$ , отвечающего исходному многограннику, и выберем путь для аналитического продолжения функции  $V(x, y(x))$  таким образом, чтобы  $y(x)$  возвращалась к исходному значению, а  $V$  меняла знак. Чтобы увидеть возможность такого выбора, заметим, что выражение для функции  $y(x)$  в предложении 5 инвариантно относительно смены знака всех  $\sqrt{V_i(x)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в то время как  $V(x, y(x))$  — нет. Это соответствует тому, что риманова поверхность описывает и сам исходный многогранник, и многогранник с противоположной ориентацией. Обобщённые объёмы таких многогранников имеют противоположные знаки, совпадая по величине.

**Следствие 3.** *Вложенный многогранник рассматриваемого комбинаторного типа неизгибаем.*

## 7. Выводы

Мы завершили перебор комбинаторных типов многогранников, имеющих не более восьми вершин, и можем сформулировать следующие теоремы.

**Теорема 5.** *Погружённый многогранник, имеющий не более семи вершин, неизгибаем.*

**Теорема 6.** *Если погружённый многогранник с восемью вершинами удовлетворяет одному из следующих условий:*

- а) является пирамидой,
- б) является подвеской,
- в) получен из подвески с шестью вершинами операцией добавления вершины индекса 3,
- г) получен из пирамиды с семью вершинами операцией добавления вершины индекса 3,
- д) имеет комбинаторное строение, показанное на рис. 2, и является вложенным,

*то он неизгибаем.*

В заключение автор выражает свою благодарность И. Х. Сабитову за его постоянное внимание и сотрудничество.

## Литература

- [1] Исследования по метрической теории поверхностей. — М.: Мир, 1980.
- [2] Максимов И. Г. Подвески: объёмы, погружённость и неизгибаемость // Мат. заметки. — 1994. — Т. 56, № 6. — С. 56—63.

- [3] Сабитов И. Х. Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геом. сборник. — 1987. — Т. 30. — С. 109—112.
- [4] Сабитов И. Х. Локальная теория изгибаний // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 48. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 196—270.
- [5] Bowen R., Fisk S. Generation of triangulations of the sphere // Math. Compute. — 1967. — Vol. 21, no. 98. — P. 250—252.
- [6] Bricard R. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // J. Math. Pures Appl. — 1897. — Vol. 5, no. 3. — P. 113—148.
- [7] Connelly R. A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra // Publ. Math. IHES. — 1978. — Vol. 47. — P. 333—338.
- [8] Connelly R. An attack on rigidity. — Preprint. — Cornell Univ., 1974. — (Пер. на рус. яз.: [1], с. 164—209.)
- [9] Gluck H. Almost all simply connected closed surfaces are rigid // Geometric Topology, Proc. Geometric Topology Conf. held at Park City, Utah, 1974. — Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 438). — P. 225—238. — (Пер. на рус. яз.: [1], с. 148—163.)
- [10] Steffen K. A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices. — Preprint. — IHES, Bures-sur-Yvette.

