

Об одном методе решения задачи изометрической реализации развёрток*

С. Н. МИХАЛЁВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: mikhalev@bk.ru

УДК 514.113.5

Ключевые слова: развёртка, многогранник, изометрическая реализация, система полиномиальных уравнений, алгоритмы решения.

Аннотация

В работе предлагается новый алгоритмический метод решения задачи изометрической реализации развёртки в виде многогранника. Метод основан на составлении системы полиномиальных уравнений, такой что её решения в некотором смысле полностью описывают набор всех возможных изометрических реализаций данной развёртки. Достоинством метода является его практическая применимость к решению конкретных задач реализации.

Abstract

S. N. Mikhalev, A method for solving the problem of isometric realization of developments, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 167—203.

We suggest a new algorithmic solution for the problem of isometric realization of developments. For any development a system of polynomial equations is composed such that its solutions are in some sense in bijective correspondence with all possible isometric realizations of the development. An important advantage of the method is the fact that it can be applied in practical computation.

1. Задача изометрической реализации развёртки и методы её решения

Пусть K — конечный симплициальный комплекс, триангулирующий некоторое двумерное связное замкнутое ориентируемое многообразие M . Пусть, далее, каждому ребру комплекса K поставлено в соответствие некоторое положительное число — *длина* ребра. Если при этом для каждой грани длины рёбер, её ограничивающих, удовлетворяют неравенствам треугольника, то мы будем говорить, что на K задана метрика. Это определение оправдано тем, что естественным продолжением метрики с рёбер на грани мы превращаем K в метрическое пространство.

*Работа поддержана грантами РФФИ № 02-01-00101, 05-01-00204 и грантом Минобразования № РНП 2.1.1.7988.

ники, по разному расположенные в пространстве, с точки зрения системы (1) различны (им соответствуют разные решения системы (1)).

В [5] предлагается метод решения задачи изометрической реализации, основанный на вычислении длин всех *малых диагоналей* многогранников в общем положении, являющихся искомыми изометрическими реализациями данной развёртки. Малой диагональю называется отрезок, соединяющий две вершины смежных по ребру граней, не лежащие на общем ребре этих граней. Таким образом, задание малой диагонали, соответствующей некоторой паре смежных граней многогранника, равносильно заданию величины двугранного угла между этими гранями.

Алгоритм реализации из [5] опирается на доказанную там же теорему, позволяющую для каждой малой диагонали многогранника P в общем положении найти некоторый многочлен $R(d)$ с коэффициентами, зависящими только от комбинаторного строения и метрики многогранника P , такой что в $R(d)$ не все коэффициенты равны нулю и что длина данной малой диагонали является корнем многочлена $R(d)$. Из этой теоремы, в частности, следует, что длину малой диагонали любого изометричного P многогранника в общем положении (с таким же, как у P , комбинаторным строением) можно искать среди решений уравнения $R(d) = 0$. Это уравнение имеет лишь конечное число корней, поскольку многочлен $R(d)$ не равен тождественно нулю.

С точки зрения вычислительных затрат метод решения задачи реализации, предложенный в [5], является более приемлемым, чем метод, основанный на решении системы вида (1), однако сложность его всё же высока, и пока на практике этот алгоритм удаётся применять только к развёрткам, имеющим не более шести вершин.

Вместе с тем алгоритм из [5] имеет существенный недостаток, состоящий в том, что с его помощью можно найти только те реализации данной развёртки, которые находятся в общем положении. В частности, алгоритм не позволяет находить *изгибаемые* реализации данной развёртки. Дело в том, что для многогранника не в общем положении все коэффициенты многочлена $R(d)$ для некоторой его малой диагонали могут обратиться в нуль, и уравнение $R(d) = 0$, из которого мы должны были бы найти малую диагональ, станет тривиальным. (Для тех малых диагоналей изгибаемого многогранника, которые непрерывно меняются в ходе изгиба, это всегда так.)

В данной работе предлагается новый алгоритмический метод решения задачи изометрической реализации, не имеющий указанного недостатка. С помощью этого метода можно находить реализации независимо от того, находятся они в общем положении или нет. В частности, для развёрток, допускающих изгибаемые реализации, предлагаемый метод позволяет найти все изгибаемые реализации, а также определить число параметров, которыми определяется изгибание, и даже характер зависимости положения изгибаемого многогранника от этих параметров.

Основным ограничением метода является то, что он применим безусловно только к развёрткам, гомеоморфным сфере. Для развёрток других топологиче-

ских типов мы можем указать лишь достаточные условия применимости нашего метода.

Ещё одной положительной стороной предложенного метода является его *практическая* применимость даже к не слишком простым развёрткам. В разделе 5 с помощью этого метода мы решаем для различных развёрток задачу их изометрической реализации (в некоторых случаях вычисления проводились вручную, в некоторых — на компьютере).

Заметим, что нами также будет решена задача, поставленная ещё Лежандром в [6]: какими своими параметрами многогранник¹ с данным комбинаторным строением определяется однозначно? Сам Лежандр показал (см. [6]), что число таких параметров равно числу рёбер многогранника, но предположение, что в качестве этих параметров можно взять просто сами рёбра, неверно. (Последнее очевидно в силу существования изгибаемых многогранников: в ходе изгибания все рёбра остаются постоянными, а форма многогранника меняется.) Доказывая в разделе 3 теорему 1, мы попутно получим универсальный способ выбора параметров Лежандра для многогранников из довольно широкого класса. Именно, в качестве параметров Лежандра можно взять величины некоторых $n - 3$ двугранных углов и длины некоторых $2n - 3$ рёбер, способ выбора которых будет указан при доказательстве теоремы 2. Из доказательства теоремы 1 также будет очевидно, что эти $(n - 3) + (2n - 3) = 3n - 6$ параметров однозначно определяют многогранник, причём независимо от того, является ли этот многогранник выпуклым или нет. Заметим, что по формуле Эйлера число рёбер многогранника с треугольными гранями и с n вершинами равно $3n - 6$, таким образом, утверждение Лежандра о совпадении числа параметров, однозначно определяющих многогранник, с числом его рёбер оказывается верным и для невыпуклых многогранников.

2. Понятие S -комплекса и некоторые свойства S -комплексов

Основной целью этого раздела является введение понятия S -комплекса, исследование вопроса о существовании S -комплексов и доказательство некоторых необходимых в дальнейшем утверждений об S -комплексах.

Следует помнить, что все утверждения данного раздела носят чисто комбинаторный характер, несмотря на то, что большинство из них допускает простую геометрическую интерпретацию.

Пусть K — произвольный симплициальный комплекс с носителем, гомеоморфным некоторому двумерному связному ориентируемому многообразию M^2 . Комплекс K можно представлять себе как некоторое множество евклидовых треугольников с заданным законом отождествления сторон и вершин, при этом

¹Лежандр неявно предполагал многогранник выпуклым, но не обязательно с треугольными гранями.

после отождествления должно получиться многообразие, гомеоморфное M^2 . Симплексы размерностей 0, 1 и 2 комплекса K нам будет удобно называть соответственно *вершинами*, *рёбрами* и *гранями* комплекса K . Множество вершин, множество рёбер и множество граней комплекса K мы будем обозначать $V(K)$, $E(K)$ и $F(K)$ соответственно.

Поскольку $\text{supp } K \sim M^2$, где M^2 — двумерное многообразие (в общем случае с краем), можно утверждать, что всякое ребро комплекса K принадлежит либо ровно одной грани, либо ровно двум граням комплекса K . Те рёбра комплекса K , которые принадлежат только одной грани комплекса K , мы будем называть *граничными*, остальные рёбра — *внутренними*. Одномерный симплициальный комплекс, который образуют граничные рёбра комплекса K , мы будем обозначать ∂K и будем его называть *граничным* комплексом. Наконец, мы скажем, что две грани комплекса K , имеющие общее (внутреннее) ребро, являются *смежными* по этому ребру.

Определение 2. Симплициальный комплекс K называется S -диском, если он обладает следующими свойствами:

- 1) $\text{supp } K \sim D^2$ (D^2 — двумерный диск);
- 2) $V(K) \subset \partial K$.

Таким образом, носитель $\text{supp } K$ всякого S -диска K представляет собой многоугольник, триангулированный без введения дополнительных вершин.

Определение 3. Симплициальный комплекс K называется S -комплексом, если в K имеется подкомплекс $K_1 \subset K$, обладающий следующими свойствами:

- 1) комплекс K_1 является S -диском;
- 2) $V(K_1) = V(K)$.

При этом комплекс K_1 мы будем называть S -диском S -комплекса K .

Пример 1. Любой S -диск является S -комплексом.

Пример 2. Пусть K — комплекс, задающий комбинаторное строение октаэдра (см. рис. 1). Легко видеть, что изображённый на рис. 1 комплекс $K_1 \subset K$ является S -диском, и, так как $V(K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = V(K)$, можно сделать вывод, что K является S -комплексом. Каждый из изображённых на рис. 1 комплексов K_2 , K_3 и K_4 также является S -диском S -комплекса K .

Пример 2 показывает, что S -диск данного S -комплекса может быть не единственным. Более того, оказывается, что для любого S -комплекса с носителем, гомеоморфным двумерной сфере S^2 , всегда можно указать по крайней мере два S -диска.

Лемма 1. Пусть дан S -комплекс K , такой что $\text{supp } K \sim S^2$. Пусть $K_1 \subset K$ — его S -диск. Тогда у K имеется ещё по крайней мере один S -диск $K_2 \neq K_1$.

Доказательство. В самом деле, поскольку границей диска D^2 является окружность S^1 , то из того, что $\text{supp } K_1 \sim D^2$, следует, что $\text{supp } \partial K_1 \sim S^1$. Окружность S^1 разбивает сферу S^2 на два диска D^2 , следовательно, граница

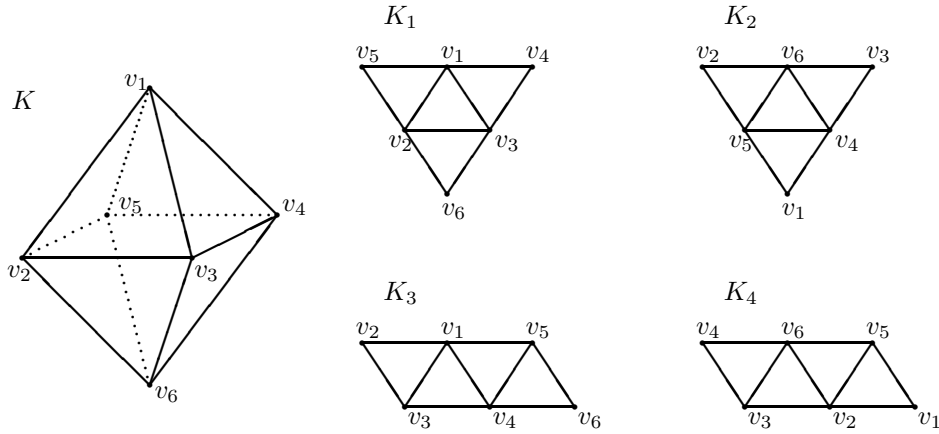


Рис. 1

∂K_1 S -диска $K_1 \subset K$ разбивает комплекс K на два комплекса, носитель каждого из которых гомеоморфен диску D^2 . Одним из этих комплексов является комплекс K_1 . Докажем, что второй комплекс K_2 — S -диск для S -комплекса K . Действительно, во-первых, по доказанному $\text{supp } K_2 \sim D^2$, а во-вторых,

$$V(K_2) \subseteq V(K) = V(K_1) \subset \partial V(K_1) = \partial V(K_2).$$

Лемма доказана. □

Заметим, что в примере 1 $\partial K_1 = \partial K_2$ и $\partial K_3 = \partial K_4$.

Напомним теперь определение гамильтонова цикла.

Определение 4. Пусть K — некоторый двумерный симплициальный комплекс. Мы будем говорить, что одномерный симплициальный комплекс $H \subset K$ является *гамильтоновым циклом* в K , если он обладает следующими свойствами:

- 1) $\text{supp } H \sim S^1$;
- 2) $V(H) = V(K)$.

Иными словами, гамильтонов цикл — простой цикл из рёбер, проходящий через все вершины.

Пример 3. Комплекс K из примера 2 (см. рис. 1) имеет по крайней мере два гамильтоновых цикла:

$$H_1 = (v_1, v_5, v_2, v_6, v_3, v_4), \quad H_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5).$$

Лемма 2. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс. Тогда если K является S -комплексом, то в K имеется по крайней мере один гамильтонов цикл.

Доказательство. Пусть $K_1 \subset K$ — некоторый S -диск S -комплекса K . Тогда комплекс $H = \partial K_1$ является гамильтоновым циклом в K . □

Лемма 3. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, такой что $\text{supp } K \sim S^2$. Тогда если в K имеется гамильтонов цикл, то K является S -комплексом.

Доказательство. Пусть $H \subset K$ — гамильтонов цикл. Подобно тому, как это было сделано в доказательстве леммы 1, рассмотрим комплекс $K_1 \subset K$ — один из двух комплексов, на которые цикл H разбивает комплекс K , и сделаем вывод, что K является S -комплексом, а K_1 является S -диском S -комплекса K . Лемма доказана. \square

Следуя [4], мы будем говорить, что трёхзвенный цикл из рёбер комплекса K является *пустым*, если он не является границей ни для какой грани комплекса K . Так, например, комплекс K , изображённый на рис. 1, не имеет ни одного пустого трёхзвенного цикла, а комплекс, изображённый на рис. 2, имеет пустой трёхзвенный цикл (v_2, v_3, v_4) .

Доказанная в [7] теорема о существовании гамильтонова цикла у комплекса, обладающего некоторыми свойствами (см. ниже), позволяет нам получить условия, выполнения которых достаточно для того, чтобы данный симплициальный комплекс K являлся S -комплексом. Эти условия даются следующей леммой.

Лемма 4. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс с носителем, гомеоморфным сфере S^2 . Тогда если в K нет пустых трёхзвенных циклов из рёбер, то K является S -комплексом.

Доказательство. Комплекс K удовлетворяет условиям теоремы 1 из [7], следовательно, по этой теореме в K имеется некоторый гамильтонов цикл H . Применяя лемму 3, получаем, что K является S -комплексом. Лемма доказана. \square

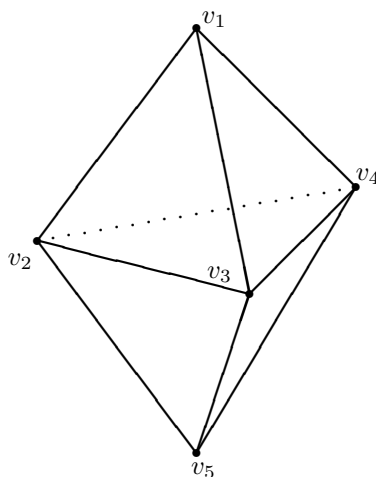


Рис. 2

Лемма 4 позволяет для данного комплекса K установить существование S -диска с требуемыми свойствами, но не даёт практического способа отыскания этого S -диска. Однако, поскольку комплекс K конечен, задача нахождения S -диска всегда решается за конечное число шагов (например, полным перебором всех возможных вариантов; а вообще сложность решения задачи нахождения гамильтонова цикла в графе с n вершинами имеет экспоненциальный рост по n). Кроме того, в случае, когда число вершин комплекса мало, S -диск можно просто «угадать» или найти из каких-либо элементарных соображений; именно так мы и будем поступать в дальнейшем.

Введём теперь одно вспомогательное понятие.

Определение 5. Пусть дан некоторый S -диск K . Пусть некоторая грань $f \subset K$ такова, что два её ребра принадлежат граничному комплексу ∂K . Мы будем говорить, что грань f является *крайней* (по отношению к S -диску K).

Пример 4. Рассмотрим комплекс K из примера 2 (см. рис. 1). Для S -диска K_1 крайними являются грани (v_1, v_3, v_4) , (v_6, v_3, v_2) и (v_1, v_5, v_2) , а для S -диска K_3 — грани (v_1, v_2, v_3) и (v_6, v_5, v_4) .

Лемма 5. Пусть K — некоторый S -диск. Тогда в K по крайней мере одна грань является крайней.

Доказательство. Если в K имеется только одна грань, то эта грань очевидным образом является крайней. Предположим, что в K более одной грани. Докажем индукцией по числу n граней в K , что тогда в K имеется по крайней мере две крайние грани. Основание индукции: $n = 2$, т. е. K состоит из двух граней, смежных по ребру. Обе эти грани очевидно являются крайними. Предположим, что для $n = 2, 3, \dots, m - 1$ требуемый факт установлен. Пусть теперь $n = m$. Рассмотрим некоторое ребро (v_i, v_j) комплекса K , не принадлежащее граничному комплексу ∂K . (Если бы каждое ребро было граничным, то всё было бы доказано.) Так как K является S -диском, то $v_i, v_j \in V(K) \in \partial K$, и ребро (v_i, v_j) разбивает K на два комплекса K_1 и K_2 . Заметим, что каждый из комплексов K_1 и K_2 является S -диском с числом граней, меньшим m , поэтому в случае, если в K_1 (K_2) более одной грани, K_1 (K_2) содержит по крайней мере две крайние грани. «Склейка» комплексов K_1 и K_2 происходит по единственному ребру (а именно по (v_i, v_j)), следовательно, если S -диск K_1 (K_2) содержал две крайние грани, то по крайней мере одна из них будет крайней для S -диска K , а если в K_1 (K_2) была только одна грань, то она также будет крайней для K . Из сказанного следует, что в любом случае S -диск K содержит не менее двух крайних граней. Тем самым лемма доказана. \square

Замечание 1. На самом деле лемму 5 можно было и не доказывать. Под названием «лемма об ушах» она известна из школьной математики.

Лемма 6. Для данного S -диска K с n гранями существует такая нумерация его граней, что их последовательность f_1, f_2, \dots, f_n обладает следующими свойствами:

- 1) комплекс K_m , составленный из граней $\{f_1, \dots, f_m\}$, является S -диском при любом $m = 1, 2, \dots, n$;
- 2) грань f_m является крайней для K_m , $m = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, всякий S -диск K может быть получен из единственной грани $f_1 \subset K$ последовательным «приклеиванием» граней $f_2, \dots, f_n \subset K$. Можно утверждать, что очередная грань f_m «подклеивается» к комплексу K_{m-1} , полученному на предыдущем шаге, по единственному ребру (так как в результате каждого такого приклеивания получается S -диск, для которого приклеенная грань является крайней).

Пример 5. Рассмотрим комплекс K_3 из примера 2 (см. рис. 1). Условиям леммы 6 удовлетворяет, например, следующая последовательность его граней:

$$\{(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_4), (v_1, v_5, v_2), (v_6, v_3, v_2)\}.$$

Доказательство леммы 6. Докажем лемму индукцией по числу n граней в K . При $n = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что лемма доказана для $n = m - 1$. Пусть теперь $n = m$. По лемме 5 в K имеется крайняя грань f . Комплекс \tilde{K} , составленный из всех граней комплекса K , кроме грани f , является S -диском, число граней в котором равно $m - 1$. Следовательно, по предположению индукции грани, входящие в комплекс \tilde{K} , можно перенумеровать так, что их последовательность f_1, f_2, \dots, f_{m-1} обладает требуемыми свойствами. Тогда $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f$ — искомая последовательность граней, входящих в комплекс K . Лемма доказана. \square

Завершая обсуждение понятия S -диска, сделаем следующее замечание. Пусть K — некоторый S -диск с n вершинами. Тогда легко проверить (например, с использованием леммы 6), что K содержит $n - 2$ грани и $2n - 3$ ребра, из которых $n - 3$ внутренних и n граничных.

Пример 6. Рассмотрим S -диск K_1 из примера 2 (см. рис. 1). В этом случае $n = 6$, в K_1 четыре грани и девять рёбер: три внутренних $((v_1, v_2), (v_2, v_3)$ и $(v_1, v_3))$ и шесть внешних.

3. Системы уравнений для решения задачи изометрической реализации

В данном разделе мы покажем, что для произвольной развёртки из довольно широкого класса можно составить некоторую систему уравнений, решения которой будут описывать все изометрические реализации данной развёртки K_l в \mathbb{R}^3 в виде многогранника. Вначале мы, с использованием комбинаторных понятий и утверждений предыдущего раздела, укажем способ выбора параметров, описывающих изометрические реализации развёртки K_l . Следует обратить внимание на то, что эти параметры выбираются исходя только из комбинаторного строения данной развёртки. После этого мы покажем, как уже с использованием заданной

метрики (т. е. длин рёбер) развёртки K_l составить такую систему уравнений, связывающих введённые параметры, чтобы между множеством решений этой системы и всеми изометрическими реализациями развёртки K_l в виде многогранника в \mathbb{R}^3 существовало естественное взаимно-однозначное соответствие. Составленная система не будет алгебраической, но мы покажем, как системы такого рода можно сводить к системам *полиномиальных* уравнений.

Все построения этого раздела проводятся в предположении, что данная развёртка такова, что её комбинаторное строение задаётся некоторым *S-комплексом*, в частности, это так, когда развёртка имеет топологический тип сферы, а симплициальный комплекс, задающий её комбинаторное строение, не имеет пустых трёхзвенных циклов из рёбер (см. лемму 4).

На протяжении этого раздела мы будем предполагать, что задана некоторая развёртка K_l с n вершинами, такая что её комбинаторное строение задаётся *S-комплексом* K , носитель $\text{supp } K$ которого гомеоморфен двумерному связному ориентируемому многообразию без края. Кроме того, мы будем предполагать, что задан некоторый *S-диск* L комплекса K , $L \subset K$.

Сделаем теперь следующее замечание. В разделе 1 в определении развёртки предполагалось, что после отождествления соответствующих сторон и вершин треугольников развёртки должно получиться многообразие без края. Однако в принципе ничто не мешает опустить это требование и рассматривать наряду с *замкнутыми* развёртками *развёртки с краем*, а также их изометрические реализации в \mathbb{R}^3 в виде *многогранников с краем*.

Введём следующее обозначение: L_l — метрический симплициальный комплекс, получаемый из симплициального комплекса $L \subset K$ приписыванием его рёбрам тех же длин, что имеют соответствующие рёбра развёртки K_l . Так как L — *S-диск*, то $\text{supp } L \sim D^2$, следовательно, L_l — развёртка с краем (гомеоморфным окружности). Развёртка L_l составлена из некоторого количества треугольников развёртки K_l , $L_l \subset K_l$.

Пусть $P: K_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ — некоторая изометрическая реализация развёртки K_l в виде (замкнутого) многогранника в \mathbb{R}^3 . Тогда ограничение P_L отображения P на развёртку $L_l \subset K_l$, $P_L: L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$, является изометрической реализацией развёртки L_l в виде многогранника (с краем) в \mathbb{R}^3 .

Рассмотрим теперь произвольное отображение $P_L: L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$, являющееся изометрической реализацией в \mathbb{R}^3 комплекса L_l (без предположения, что P_L является ограничением на L_l некоторой изометрической реализации $P: K_l \rightarrow \mathbb{R}^3$). Вопрос о том, при каких условиях отображение $P_L: L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ может быть продолжено до некоторой изометрической реализации $P: K_l \rightarrow \mathbb{R}^3$, является ключевым и позже будет подробно изучен.

Заметим, что незамкнутый многогранник $P_L(L_l) \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой пространственный многоугольник, триангулированный без введения дополнительных вершин.

В K_l (а значит, и в L_l) n вершин, поэтому в соответствии с замечанием в конце предыдущего раздела в L_l имеется ровно $n - 3$ внутренних рёбер, к каждому из которых примыкает в точности две грани; общее число граней

в L_l равно $n - 2$. Пусть l_1, \dots, l_{n-3} — внутренние рёбра комплекса L_l . Для каждого внутреннего ребра l_k рассмотрим примыкающие к нему грани f_{i_k} и f_{j_k} , а также образы в \mathbb{R}^3 этих граней при отображении P_L — некоторые треугольники T_{i_k} и T_{j_k} , смежные по стороне (по отрезку, являющемуся образом ребра l_k при отображении P_L). Обозначим φ_k величину двугранного угла между плоскостями треугольников T_{i_k} и T_{j_k} (ниже будет указано, какое именно из двух взаимно дополнительных до 2π значений следует выбирать в каждом конкретном случае). Допуская некоторую вольность речи, мы будем говорить, что φ_k — величина (двугранного) угла при ребре l_k незамкнутого многогранника $P_L(L_l)$.

Поскольку $\text{supp } L \sim D^2$, а диск D^2 является двусторонней поверхностью, мы можем зафиксировать одну из сторон поверхности этого диска и рассматривать двугранные углы незамкнутого многогранника $P_L(L_l)$ при рёбрах l_1, \dots, l_{n-3} с учётом ориентации, выбирая в качестве параметра величину двугранного угла между *внешними* сторонами соответствующих треугольников (образов граней развёртки L_l). Таким образом, каждый из углов φ_i , $i = 1, \dots, n - 3$, может принимать значения из промежутка $[0, 2\pi)$, и задание величины угла между смежными по ребру гранями однозначно определяет положение этих граней друг относительно друга.

Итак, каждой изометрической реализации $P_L: L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ однозначно соответствует некоторый набор чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, \dots, n - 3$. С другой стороны, справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. Для любого набора чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, $k = 1, \dots, n-3$, существует такая изометрическая реализация P_L развёртки L_l в \mathbb{R}^3 , что двугранный угол при ребре l_k многогранника $P_L(L_l)$ с краем равен φ_k для всех $k = 1, 2, \dots, n - 3$.

Для доказательства нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 8. Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 имеются невырожденные треугольники ABC и ABD , смежные по ребру AB (рис. 3). Ориентируем эти два треугольни-

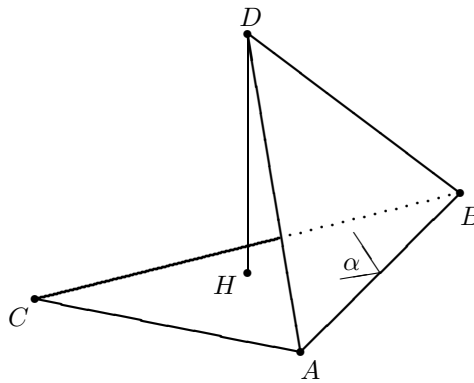


Рис. 3

ка согласованным образом; у каждого из них теперь появилась «положительная сторона». Пусть даны расстояния $AD = d_{AD}$ и $BD = d_{BD}$, координаты вершин $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ и величина $\alpha \in [0, 2\pi)$ двугранного угла между положительными сторонами треугольников ABC и ABD . Тогда координаты (x_D, y_D, z_D) точки D определяются однозначно. Если обозначить d_{AB} , d_{AC} , d_{BC} известные расстояния AB , AC , BC соответственно, а S_{ABC} , S_{ABD} — известные площади треугольников ABC и ABD соответственно, то для x_D , y_D , z_D имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} x_D &= x_0 + \frac{1}{d_{AB}} \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} ((y_B - y_A)(z_C - z_A) - (z_B - z_A)(y_C - y_A)) \sin \alpha, \\ y_D &= y_0 + \frac{1}{d_{AB}} \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} ((z_B - z_A)(x_C - x_A) - (x_B - x_A)(z_C - z_A)) \sin \alpha, \\ z_D &= z_0 + \frac{1}{d_{AB}} \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} ((x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты проекции H точки D на плоскость ABC ,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(x_A + x_B)}{2} + \frac{(x_B - x_A)}{2} \frac{(d_{AD}^2 - d_{BD}^2)}{d_{AB}^2} + \\ &+ \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} \left(x_C - \frac{(x_A + x_B)}{2} - \frac{(x_B - x_A)}{2} \frac{(d_{AC}^2 - d_{BC}^2)}{d_{AB}^2} \right) \cos \alpha, \\ y_0 &= \frac{(y_A + y_B)}{2} + \frac{(y_B - y_A)}{2} \frac{(d_{AD}^2 - d_{BD}^2)}{d_{AB}^2} + \\ &+ \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} \left(y_C - \frac{(y_A + y_B)}{2} - \frac{(y_B - y_A)}{2} \frac{(d_{AC}^2 - d_{BC}^2)}{d_{AB}^2} \right) \cos \alpha, \\ z_0 &= \frac{(z_A + z_B)}{2} + \frac{(z_B - z_A)}{2} \frac{(d_{AD}^2 - d_{BD}^2)}{d_{AB}^2} + \\ &+ \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} \left(z_C - \frac{(z_A + z_B)}{2} - \frac{(z_B - z_A)}{2} \frac{(d_{AC}^2 - d_{BC}^2)}{d_{AB}^2} \right) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении координат точки D средствами аналитической геометрии.

Доказательство леммы 7. Пусть грани S -диска L занумерованы так, что их последовательность f_1, \dots, f_{n-2} удовлетворяет условиям леммы 6. Тогда комплекс L можно получить из грани f_1 последовательным «приклеиванием» граней f_2, \dots, f_{n-2} . При этом на каждом этапе имеем комплекс с носителем, гомеоморфным диску, а очередная грань приклеивается к этому комплексу по единственному ребру.

Отображение P_L можно построить следующим образом. На начальном этапе как угодно расположим в \mathbb{R}^3 треугольник T_1 , изометричный грани f_1 . Грани f_1 и f_2 смежны по (единственному) ребру, поэтому двугранный угол между

их образами должен иметь заданное значение. Треугольник T_2 , изометричный грани f_2 , «подклеим» к соответствующему ребру треугольника T_1 так, чтобы двугранный угол между T_1 и T_2 имел заданную величину. При этом две вершины треугольника T_2 совпадают с соответствующими вершинами треугольника T_1 (их координаты известны), а координаты третьей вычисляются по формулам (2). Пусть теперь в \mathbb{R}^3 уже размещены (с выполнением необходимых условий) треугольники T_1, \dots, T_{k-1} , изометричные граням f_1, \dots, f_{k-1} ; координаты вершин этих треугольников, таким образом, уже известны. Грань f_k примыкает по ребру ровно к одной из граней f_1, \dots, f_{k-1} , пусть это грань f_i . Тогда двугранный угол между образами граней f_k и f_i должен иметь заданное значение. Расположим треугольник T_k , изометричный грани f_k , в \mathbb{R}^3 необходимым образом (две его вершины совпадают с соответствующими вершинами треугольника T_i (их координаты известны), а координаты третьей вычисляются по формулам (2)). Повторяя это построение $n - 3$ раз, мы в конце концов вычислим координаты образов всех вершин комплекса L_l . Требуемое отображение $P_L: L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ будет тем самым построено. Лемма доказана. \square

Неформально можно сказать, что осуществимость указанного построения для любого набора углов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ следует из того, что пространственный многоугольник, триангулированный без введения дополнительных вершин, можно, не меняя формы треугольников триангуляции, перегибать по каждому внутреннему ребру триангуляции независимо от других (придавая каждому из углов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ произвольное значение, не меняя величин остальных углов); самопересечения при этом допускаются.

Замечание 2. Из доказательства леммы 7 следует, что величины двугранных углов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ вместе с длинами рёбер S -комплекса L однозначно определяют форму соответствующего многогранника. Всего имеем $(n - 3) + (2n - 3) = 3n - 6$ параметров, эти величины можно выбрать в качестве параметров Лежандра, о которых шла речь в разделе 1.

Соответствующее набору углов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ отображение P_L , существование которого устанавливается леммой 7, определено неоднозначно, поскольку на начальном этапе треугольник T_1 — изометрический образ грани $f_1 \in S$ — мы можем расположить в \mathbb{R}^3 произвольным образом. Однако если зафиксировать в \mathbb{R}^3 положение образа грани f_1 и искать P_L только среди таких изометрических реализаций развёртки L_l , при которых образом грани f_1 служит некоторый фиксированный треугольник $T_1 \subset \mathbb{R}^3$, то из доказательства леммы 7 следует, что по набору параметров $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ отображение P_L восстанавливается однозначно.

Предположим, что треугольник $T_1 = A_1A_2A_3$ расположен в пространстве так, что вершина A_1 лежит в начале координат, вершина A_2 лежит на оси OX (на полупрямой $x > 0$), а вершина A_3 лежит на плоскости OXY (в полуплоскости $y > 0$). Тогда отображение P_L определено однозначно. В дальнейшем это отображение мы будем обозначать $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$.

Замечание 3. Отображение $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ задаётся следующим образом: выписываются явные формулы для координат образов в \mathbb{R}^3 вершин раз-

вёртки L_l . Для каждой из вершин эти формулы — результат нескольких последовательных применений (суперпозиции) формул (2). Так как правые части формул (2) представляют собой функции, линейные относительно $\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1), \dots, \cos(\varphi_{n-3}), \sin(\varphi_{n-3})$ и полиномиальные относительно переменных x_A, y_A, \dots, z_D , то итоговые выражения для координат образов в \mathbb{R}^3 вершин развёртки L_l представляют собой многочлены относительно $\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1), \dots, \cos(\varphi_{n-3}), \sin(\varphi_{n-3})$.

Итак, каждому набору углов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ соответствует однозначным образом определённое отображение $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}): L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Поставим вопрос следующим образом: при каких значениях $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ изометрическая реализация $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}): L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ может быть продолжена до изометрической реализации $P: K_l \rightarrow \mathbb{R}^3$?

Лемма 9. Существует система уравнений вида

$$\begin{cases} \Phi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_m(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

такая что изометрическая реализация $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}): L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ может быть продолжена до некоторой изометрической реализации $P: K_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда числа $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}, \varphi_i \in [0, 2\pi), i = 1, \dots, n - 3$, удовлетворяют системе уравнений (3).

Доказательство. Напомним, что n — число вершин развёртки K_l (или, что то же самое, развёртки L_l). Пусть v_1, \dots, v_n — все вершины развёртки L_l , а $A_1(x_1, y_1, z_1), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ — их образы в \mathbb{R}^3 при отображении $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$. Координаты точек A_1, \dots, A_n зависят от параметров $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}), \\ y_1 &= y_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n &= z_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}). \end{aligned}$$

Точки A_1, \dots, A_n служат вершинами изометрической реализации развёртки L_l (задаваемой отображением $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$) в виде многогранника с краем. При каких значениях $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$ точки A_1, \dots, A_n могут служить вершинами некоторой изометрической реализации всей развёртки K_l в виде (замкнутого) многогранника?

Очевидно, что точки A_1, \dots, A_n могут служить вершинами некоторой изометрической реализации развёртки K_l в том и только в том случае, когда для всякой пары вершин v_i, v_j комплекса K_l , соединённых ребром, расстояние между их образами A_i и A_j в \mathbb{R}^3 равно длине этого ребра.

Пусть некоторые вершины v_i и v_j комплекса K_l соединены ребром $(v_i, v_j) \in E(K_l)$ длины d_{ij} . Вычислим квадрат расстояния между точками A_i и A_j :

$$A_i A_j^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

Нам нужно, чтобы выполнялось равенство

$$A_i A_j^2 = d_{ij}^2. \quad (4)$$

Если ребро (v_i, v_j) комплекса K_l принадлежит также комплексу $L_l \subset K_l$, то равенство (4) выполняется автоматически, в силу того что $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ — изометрическая реализация комплекса L_l .

Если ребро $(v_i, v_j) \in K_l$ не входит в комплекс L_l , то, вообще говоря, равенство (4) не выполняется.

Наша задача состоит в том, чтобы найти все такие наборы углов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}$, для которых равенство (4) выполняется для *любой* пары вершин v_i и v_j комплекса K_l , соединённых ребром.

Пусть $(v_{i_1}, v_{j_1}), \dots, (v_{i_m}, v_{j_m})$ — все рёбра комплекса K_l , не входящие в комплекс L_l . Тогда из сказанного выше следует, что в качестве системы (3) можно взять следующую систему:

$$\begin{cases} (x_{i_1} - x_{j_1})^2 + (y_{i_1} - y_{j_1})^2 + (z_{i_1} - z_{j_1})^2 = d_{i_1 j_1}^2, \\ \dots \dots \dots \\ (x_{i_m} - x_{j_m})^2 + (y_{i_m} - y_{j_m})^2 + (z_{i_m} - z_{j_m})^2 = d_{i_m j_m}^2. \end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. □

Замечание 4. Если комплекс K_l таков, что $\text{supp } K_l \sim S^2$ и в K_l n вершин, то число рёбер в K_l равно $3n - 6$, а в $L_l - 2n - 3$. Таким образом, число рёбер комплекса K_l , не входящих в комплекс L_l , равно $m = (3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$, поэтому для разверток с носителем, гомеоморфным сфере, в системе (5) число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Лемма 10. Задача изометрической реализации комплекса K_l в \mathbb{R}^3 в виде многогранника сводится к нахождению всех таких решений $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ системы (5), что $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, \dots, n - 3$.

Доказательство. Рассмотрим некоторое решение $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ системы (5), такое что $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, \dots, n - 3$. Рассмотрим отображение $P_L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3}): L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$. Это отображение задаётся явными формулами для координат образов A_1, \dots, A_n вершин развертки L_l (см. замечание 3), а по лемме 9 точки A_1, \dots, A_n являются также вершинами некоторой изометрической реализации развертки K_l в \mathbb{R}^3 . Таким образом, по набору чисел $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ изометрическая реализация однозначно и явно восстанавливается.

Далее, разным решениям системы (5) (с условием $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, \dots, n - 3$) соответствуют разные многогранники (они отличаются величиной по крайней мере одного двугранного угла).

Наконец, очевидно, что набор $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ величин двугранных углов при соответствующих рёбрах всякого многогранника в \mathbb{R}^3 , являющегося изометрической реализацией комплекса K_l , удовлетворяет системе (5). Тем самым лемма доказана. □

Из замечания 3 следует, что левые части уравнений системы (5) представляют собой многочлены от $\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1), \dots, \cos(\varphi_{n-3}), \sin(\varphi_{n-3})$. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы показать, что решение системы (5) сводится к решению некоторой системы полиномиальных уравнений.

Соответствующую систему полиномиальных уравнений можно составить двумя известными способами.

СПОСОБ 1. Введём новые переменные

$$c_1 = \cos(\varphi_1), s_1 = \sin(\varphi_1), \dots, c_{n-3} = \cos(\varphi_{n-3}), s_{n-3} = \sin(\varphi_{n-3})$$

и рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_1(l, c_1, s_1, \dots, c_{n-3}, s_{n-3}) = 0, \\ \dots \\ Q_m(l, c_1, s_1, \dots, c_{n-3}, s_{n-3}) = 0, \\ c_1^2 + s_1^2 - 1 = 0, \\ \dots \\ c_{n-3}^2 + s_{n-3}^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где Q_1, \dots, Q_m — многочлены от $c_1, s_1, \dots, c_{n-3}, s_{n-3}$, получаемые в результате указанной замены переменных в левых частях уравнений системы (5).

Лемма 11. Любому решению

$$(\varphi_1^0, \dots, \varphi_{n-3}^0), \quad \varphi_i^0 \in [0, 2\pi), \quad i = 1, \dots, n-3,$$

системы (5) соответствует решение $(c_1^0, s_1^0, \dots, c_{n-3}^0, s_{n-3}^0)$ системы (6), такое что

$$c_1^0 = \cos(\varphi_1^0), \quad s_1^0 = \sin(\varphi_1^0), \dots, \quad c_{n-3}^0 = \cos(\varphi_{n-3}^0), \quad s_{n-3}^0 = \sin(\varphi_{n-3}^0).$$

Это соответствие является взаимно-однозначным.

Доказательство. Справедливость леммы следует из основного тригонометрического тождества и факта, что для любых действительных чисел a и b , таких что $a^2 + b^2 = 1$, существует единственное число $x \in [0, 2\pi)$, такое что $\sin x = a$ и $\cos x = b$. □

СПОСОБ 2. Сделаем в системе (5) следующую замену переменных:

$$\cos \varphi_1 = \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{2t_1}{1 + t_1^2}, \dots, \quad \cos \varphi_{n-3} = \frac{1 - t_{n-3}^2}{1 + t_{n-3}^2}, \quad \sin \varphi_{n-3} = \frac{2t_{n-3}}{1 + t_{n-3}^2}.$$

Система (5) при этом примет вид

$$\begin{cases} \tilde{R}_1(l, t_1, \dots, t_{n-3}) = 0, \\ \dots \\ \tilde{R}_m(l, t_1, \dots, t_{n-3}) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m$ — рациональные функции от t_1, \dots, t_{n-3} , знаменатели которых не обращаются в нуль ни при каких значениях аргументов. Избавившись от

Сформулируем теперь основной вывод этого раздела в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть дана некоторая развёртка K_l , такая что её комбинаторное строение задаётся некоторым S -комплексом K . Тогда решение задачи изометрической реализации развёртки K_l в виде многогранника в \mathbb{R}^3 сводится к нахождению всех решений некоторой системы полиномиальных уравнений или к решению нескольких таких систем.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из лемм 10—12. \square

Замечание 5. Следует обратить внимание на то, что все построения этого раздела носят *конструктивный* характер, т. е. имеется явный *алгоритм*, следуя которому, по данной развёртке и некоторому её S -диску за конечное число шагов можно составить системы полиномиальных уравнений, указанные в теореме 1.

4. Об алгоритмическом решении задачи изометрической реализации

Сформулируем и докажем теперь следующую теорему (основной результат данной работы).

Теорема 2. Пусть дана некоторая развёртка K_l , такая что $\text{supp } K_l \sim S^2$. Тогда решение задачи изометрической реализации развёртки K_l в виде многогранника в \mathbb{R}^3 сводится к нахождению всех решений некоторой системы полиномиальных уравнений или к решению нескольких таких систем.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по числу вершин k комплекса K_l .

Основание индукции: если $k = 4$, то комплекс K_l комбинаторно изоморфен тетраэдру. Тетраэдр, очевидно, является S -комплексом, и к K_l , таким образом, применима теорема 1.

Предположим теперь, что утверждение доказано для всех комплексов с числом вершин $k < n$. Пусть дан комплекс K_l с n вершинами. Докажем, что решение задачи изометрической реализации развёртки K_l в виде многогранника в \mathbb{R}^3 сводится к нахождению всех решений некоторой системы полиномиальных уравнений или к решению нескольких таких систем.

Рассмотрим два случая.

Случай А. В K_l имеется пустой трёхзвенный цикл (v_j, v_k, v_l) из рёбер. Разрежем K_l по этому циклу. Получим два комплекса K_l^1 и K_l^2 , такие что $\text{supp } K_l^i = D^2$, $i = 1, 2$, и $\partial K_l^i = (v_j, v_k, v_l)$, $i = 1, 2$. В каждом из комплексов K_l^1 и K_l^2 заклеим имеющуюся треугольную дырку, добавив грань (v_j, v_k, v_l) ; получим комплексы \bar{K}_l^1 и \bar{K}_l^2 , такие что $\text{supp } \bar{K}_l^i = S^2$, $i = 1, 2$. Число вершин каждого из метрических комплексов \bar{K}_l^1 и \bar{K}_l^2 меньше n , поэтому для каждого из них по предположению индукции решение задачи изометрической реализации в виде

многогранника в \mathbb{R}^3 сводится к нахождению всех решений некоторой системы полиномиальных уравнений или к решению нескольких таких систем.

Рассмотрим некоторые изометрические реализации P_1 и P_2 комплексов \bar{K}_l^1 и \bar{K}_l^2 в \mathbb{R}^3 в виде многогранников $P_1(\bar{K}_l^1)$ и $P_2(\bar{K}_l^2)$ соответственно. «Склеив» многогранники $P_1(\bar{K}_l^1)$ и $P_2(\bar{K}_l^2)$ по их изометричным граням $P_1((v_j, v_k, v_l))$ и $P_2((v_j, v_k, v_l))$, мы, очевидно, получим некоторую изометрическую реализацию исходного комплекса K_l . Очевидно также, что *любая* изометрическая реализация комплекса K_l может быть получена «склеивкой» некоторых изометрических реализаций комплексов \bar{K}_l^1 и \bar{K}_l^2 . Тем самым доказано, что решение задачи изометрической реализации развёртки K_l в виде многогранника в \mathbb{R}^3 сводится к решению систем уравнений для комплексов \bar{K}_l^1 и \bar{K}_l^2 , и шаг индукции в случае А сделан.

Случай Б. В K_l нет ни одного пустого трёхзвенного цикла из рёбер. Тогда к K_l применима лемма 4, согласно которой K_l является S -комплексом.

По теореме 1 решение задачи изометрической реализации S -комплекса K_l сводится к решению некоторой системы полиномиальных уравнений (вида (6) или (8)) или нескольких таких систем. Шаг индукции в случае Б сделан.

Теорема тем самым доказана. \square

Доказательство теоремы 2 даёт рекурсивное описание алгоритма сведения задачи изометрической реализации данной развёртки K_l в виде многогранника в \mathbb{R}^3 к решению некоторой системы полиномиальных уравнений или нескольких таких систем.

1. Если в данной развёртке имеется пустой цикл, то, разрезав развёртку по этому циклу и заклеив в каждом из полученных кусков образовавшиеся при этом треугольные дыры, мы получим две развёртки с носителем, гомеоморфным S^2 , в каждой из которых вершин меньше, чем в исходной развёртке. К каждой из полученных развёрток применить данный алгоритм.
2. Если в данной развёртке нет ни одного пустого трёхзвенного цикла, то методом перебора найти некоторый S -диск, содержащий все вершины развёртки K_l (по лемме 4 такой S -диск существует).
3. В качестве параметров выбрать величины двугранных углов при рёбрах искомого многогранника, соответствующих внутренним рёбрам найденного S -диска.
4. В соответствии со схемой, предложенной в доказательствах лемм 7 и 9, составить систему уравнений относительно введённых параметров.
5. Свести составленную систему уравнений к системе полиномиальных уравнений или к нескольким таким системам (см. леммы 11 и 12).

Таким образом, нахождение изометрических реализаций данной развёртки сводится к нахождению реализаций некоторых других развёрток, в каждой из которых вершин меньше, чем в исходной развёртке, до тех пор, пока каждая из новых развёрток не станет S -комплексом. Ко всякому S -комплексу уже

применим метод решения задачи изометрической реализации, основанный на составлении систем полиномиальных уравнений, предложенный в разделе 3.

На неформальном уровне предложенный алгоритм можно представлять себе следующим образом: пустые трёхзвенные циклы разбивают данную развёртку типа сферы на несколько кусков, каждый из которых (после заклейки дырок) уже не имеет пустых трёхзвенных циклов, а потому является S -комплексом, задача изометрической реализации которого сводится к решению систем полиномиальных уравнений методом, предложенным в разделе 3. Всякая реализация исходной развёртки — результат склейки по пустым трёхзвенным циклам некоторых реализаций её фрагментов, являющихся S -комплексами.

Отметим, что несмотря на то, что теорема 2 доказана только для развёрток топологического рода $g = 0$, предложенная методика в принципе позволяет работать и с развёртками высших топологических родов ($g > 0$). В частности, каков бы ни был род развёртки K_l , при условии, что её комбинаторная структура задаётся S -комплексом K (т. е. в K имеется некоторый S -диск, содержащий все вершины комплекса), к задаче изометрической реализации развёртки K_l применим метод раздела 3. При $g > 0$ в системе (3) число уравнений больше числа неизвестных (см. также замечание 4).

Вопрос о том, как устроен класс S -комплексов с носителем, гомеоморфным многообразию произвольного топологического рода $g > 0$, нами не изучался.

Предложенный выше метод позволяет свести решение задачи изометрической реализации к решению системы полиномиальных уравнений или нескольких таких систем, однако не даёт никакого способа решения найденных с его помощью систем уравнений.

Вопрос о решении систем полиномиальных уравнений остаётся за рамками данной статьи; по этой теме существует обширная литература (см., например, [1, 2]). Необходимо отметить, что во многих случаях задача нахождения всех решений системы полиномиальных уравнений с любой наперёд заданной точностью является *алгоритмически разрешимой*. Однако всё же следует признать, что универсального алгоритма нахождения *всех* решений данной системы полиномиальных уравнений не существует. Сложность решения таких систем связана с тем, что, помимо изолированных решений, системы алгебраических уравнений могут иметь целые *многообразия* решений, каждое из которых, в свою очередь, описывается некоторой системой алгебраических уравнений. Однако для многих систем полиномиальных уравнений может быть получен полный список решений. Для решения систем полиномиальных уравнений можно использовать как общую теорию, основанную на составлении так называемого базиса Грёбнера (см. [1, 2]), так и какие-либо специальные методы. В следующем разделе будет продемонстрировано, что предложенный в разделе 3 метод сведения решения задачи изометрической реализации к решению систем полиномиальных уравнений во многих случаях приводит к таким системам, для которых можно получить полный список их решений.

Заметим, что большинство задач, решённых в следующем разделе, не удаётся решить ни методом, основанным на составлении системы вида (1), ни с помощью алгоритма Сабитова.

5. Примеры применения предложенного метода решения задачи изометрической реализации

В этом разделе демонстрируется применение предложенной общей методики к ряду конкретных метрических комплексов $K_l = \{K, l\}$ с комбинаторным строением K и метрикой l .

Метрически правильный октаэдр

Пусть K_l — метрически правильный октаэдр. Это означает, что симплициальный комплекс K комбинаторно изоморфен октаэдру (рис. 4), а метрика l такова, что все рёбра имеют единичную длину (неравенства треугольника на гранях при этом, очевидно, выполнены).

Комплекс K является S -комплексом, в качестве S -диска возьмём комплекс $L \subset K$ (см. рис. 4).

Введём параметры $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — величины двугранных углов при рёбрах (v_1, v_2) , (v_1, v_3) , (v_2, v_3) соответственно. Эти рёбра, и только они, являются внутренними рёбрами комплекса L (см. рис. 4). Зададим отображение $P_L(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3): L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$, разместив должным образом в \mathbb{R}^3 треугольники, изометричные граням комплекса L_l . Укажем координаты образов $A_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ вершин v_i комплекса L_l при отображении $P_L(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ для всех $i = 1, \dots, 6$. Сделаем это следующим образом.

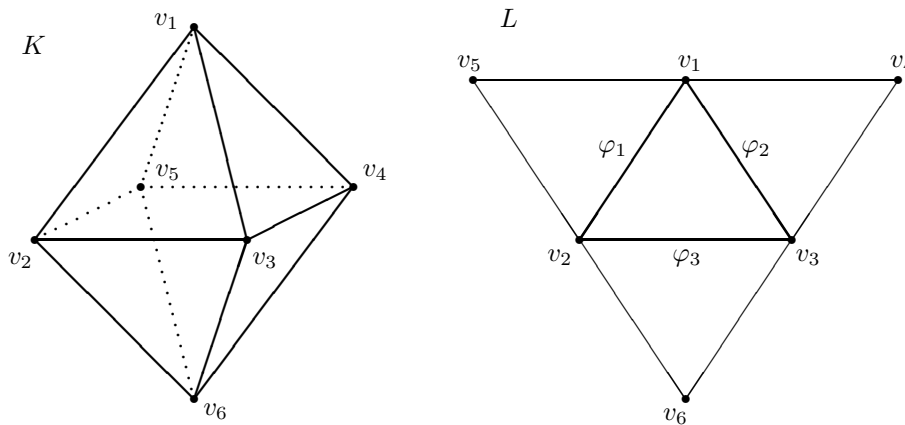


Рис. 4

Разместим треугольник $A_1A_2A_3$, изометричный грани (v_1, v_2, v_3) развёртки K_l , в \mathbb{R}^3 так, чтобы его вершины имели следующие координаты:

$$A_1(1/2, \sqrt{3}/2, 0), \quad A_2(0, 0, 0), \quad A_3(1, 0, 0).$$

Вычислим с использованием формул (2) координаты точек A_4, A_5, A_6 :

$$\begin{aligned} (x_4, y_4, z_4) &= \left(\frac{1}{4}(3 - 3 \cos \varphi_2), \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos \varphi_2), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_2 \right), \\ (x_5, y_5, z_5) &= \left(\frac{1}{4}(1 + 3 \cos \varphi_2), \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos \varphi_1), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_1 \right), \\ (x_6, y_6, z_6) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_3, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_3 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Требуемое отображение $P_L(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3): L_l \rightarrow \mathbb{R}^3$ построено.

При каких $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ это отображение продолжается до некоторой изометрической реализации $P: K_l \rightarrow \mathbb{R}^3$? Для ответа на этот вопрос рассмотрим рёбра комплекса K , не входящие в комплекс L , — рёбра $(v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_4, v_5)$ — и вычислим квадраты расстояний A_4A_6, A_5A_6, A_4A_5 . После преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} A_4A_6^2 &= (x_6 - x_4)^2 + (y_6 - y_4)^2 + (z_6 - z_4)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(6 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - 3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + 3 \cos \varphi_2 + 3 \cos \varphi_3 - 7), \\ A_5A_6^2 &= (x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 + (z_6 - z_5)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(6 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - 3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + 3 \cos \varphi_1 + 3 \cos \varphi_3 - 7), \\ A_4A_5^2 &= (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(6 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + 3 \cos \varphi_1 + 3 \cos \varphi_2 - 7). \end{aligned}$$

Согласно лемме 9 точки A_1, \dots, A_6 являются вершинами некоторой изометрической реализации комплекса K_l в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases} (x_6 - x_4)^2 + (y_6 - y_4)^2 + (z_6 - z_4)^2 = 1, \\ (x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 + (z_6 - z_5)^2 = 1, \\ (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2 = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Подставим (9) в (10) и придём к выводу, что основная система уравнений (5) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 - 1 = 0, \\ 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_3 - 1 = 0, \\ 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Сведём эту систему к системе полиномиальных уравнений.

СПОСОБ 1. Сделаем замену $c_i = \cos \varphi_i$, $s_i = \sin \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$, и перейдём к системе (12), эквивалентной системе (11) в смысле леммы 11:

$$\begin{cases} 2s_2s_3 - c_2c_3 + c_2 + c_3 - 1 = 0, \\ 2s_1s_3 - c_1c_3 + c_1 + c_3 - 1 = 0, \\ 2s_1s_2 - c_1c_2 + c_1 + c_2 - 1 = 0, \\ c_1^2 + s_1^2 = 1, \\ c_2^2 + s_2^2 = 1, \\ c_3^2 + s_3^2 = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Эту систему можно решить на компьютере (с использованием теории базисов Грёбнера)¹. Далее мы приводим полный список решений системы, выданных компьютером, и в каждом случае даём некоторое описание соответствующей изометрической реализации комплекса K_l . Для решений системы и многогранников, им соответствующих, мы будем использовать одинаковые обозначения (\mathbf{P}_1) , (\mathbf{P}_2) и т. д.

- (\mathbf{P}_1) $c_1 = c_2 = c_3 = -1/3$, $s_1 = s_2 = s_3 = 2\sqrt{2}/3$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \arccos(-1/3)$. Этому решению соответствует реализация комплекса K_l в виде правильного октаэдра (рис. 5).
- (\mathbf{P}'_1) $c_1 = c_2 = c_3 = -1/3$, $s_1 = s_2 = s_3 = -2\sqrt{2}/3$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 2\pi - \arccos(-1/3)$. Этому решению также соответствует реализация в виде правильного октаэдра (являющегося зеркальным образом правильного октаэдра (\mathbf{P}_1)). Заметим, что свойство иметь наряду со всяким решением (\mathbf{P}) $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_{n-3}^0)$ симметричное решение (\mathbf{P}') $(2\pi - \varphi_1^0, \dots, 2\pi - \varphi_{n-3}^0)$ является, очевидно, общим для всех систем вида (5). Симметричным решениям соответствуют зеркально симметричные многогранники.
- (\mathbf{P}_2) Бесконечная серия решений, зависящих от параметра x : $c_1 = x$, $s_1 = \sqrt{1-x^2}$, $c_2 = -(5x+3)/(3x+5)$, $s_2 = 4\sqrt{1-x^2}/(3x+5)$, $c_3 = 1$, $s_3 = 0$, $x \in [-1, 1]$. Таким образом, в этом случае φ_1 может принимать любое значение из промежутка $[0, \pi]$, φ_2 однозначно выражается через φ_1 , а φ_3 равно 0. Мы получили семейство реализаций комплекса K_l , непрерывно зависящих от параметра x . Поскольку хотя бы один из двугранных углов (например, φ_1) при варьировании x непрерывно меняется, мы имеем нетривиальное изгибание. Комплекс K_l реализован в виде *дважды покрытого четырёхгранного угла* (см. рис. 5; положения вершин A_1 и A_6 при любом значении параметра x совпадают), который изгибается очевидным образом.
- (\mathbf{P}'_2) $c_1 = x$, $s_1 = -\sqrt{1-x^2}$, $c_2 = -(5x+3)/(3x+5)$, $s_2 = -4\sqrt{1-x^2}/(3x+5)$, $c_3 = 1$, $s_3 = 0$, $x \in [-1, 1]$. Имеем $\varphi_1 \in [\pi, 2\pi]$. Решения этой серии симметричны решениям серии (\mathbf{P}_2) .

¹Здесь и в дальнейшем под «решением на компьютере» подразумевается вычисление с использованием некоторой системы компьютерной алгебры (автор пользовался системой Maple).

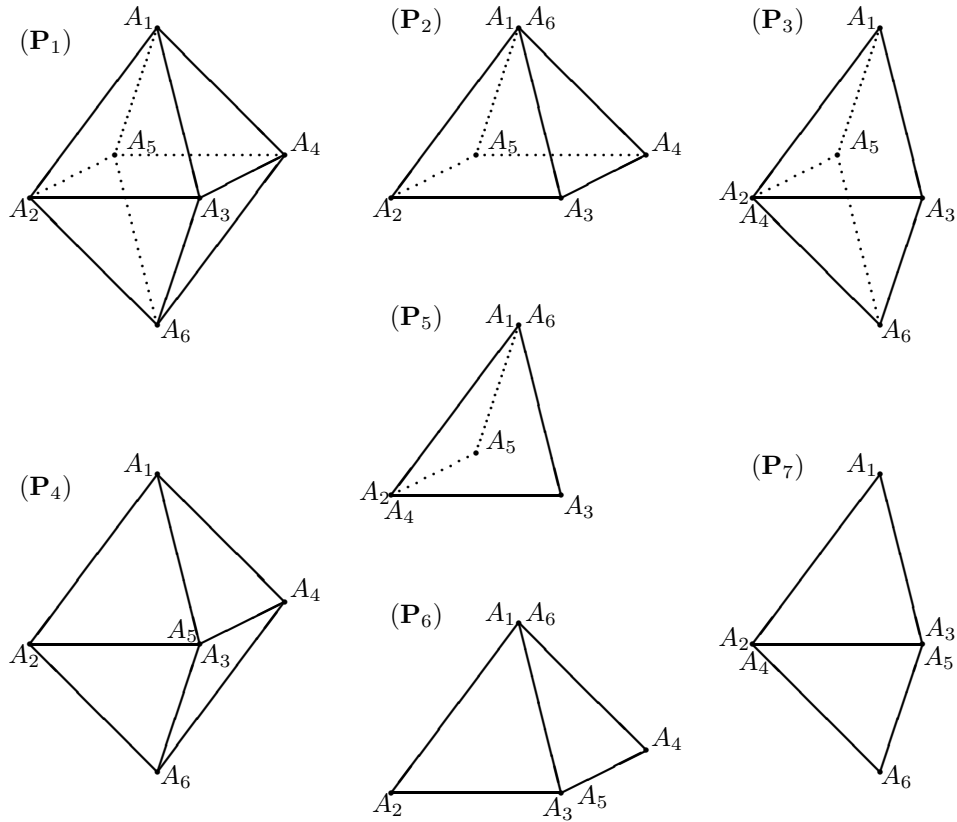


Рис. 5

Кроме (\mathbf{P}_2) и (\mathbf{P}'_2) , система (12) имеет ещё две пары аналогичных семейств решений, непрерывно зависящих от параметра x :

$$(\mathbf{P}_3) \quad c_1 = x, \quad s_1 = \sqrt{1-x^2}, \quad c_3 = -(5x+3)/(3x+5), \quad s_3 = 4\sqrt{1-x^2}/(3x+5), \\ c_2 = 1, \quad s_2 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}'_3) \quad c_1 = x, \quad s_1 = -\sqrt{1-x^2}, \quad c_3 = -(5x+3)/(3x+5), \quad s_3 = -4\sqrt{1-x^2}/(3x+5), \\ c_2 = 1, \quad s_2 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}_4) \quad c_2 = x, \quad s_2 = \sqrt{1-x^2}, \quad c_3 = -(5x+3)/(3x+5), \quad s_3 = 4\sqrt{1-x^2}/(3x+5), \\ c_1 = 1, \quad s_1 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}'_4) \quad c_2 = x, \quad s_2 = -\sqrt{1-x^2}, \quad c_3 = -(5x+3)/(3x+5), \quad s_3 = -4\sqrt{1-x^2}/(3x+5), \\ c_1 = 1, \quad s_1 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Решениям (\mathbf{P}_3) , (\mathbf{P}'_3) , (\mathbf{P}_4) и (\mathbf{P}'_4) также соответствуют реализации в виде изгибаемых дважды покрытых четырёхгранных углов (см. рис. 5).

Система (12) имеет ещё шесть серий решений, непрерывно зависящих от параметра. Каждой из серий (\mathbf{P}_5) , (\mathbf{P}'_5) , (\mathbf{P}_6) , (\mathbf{P}'_6) , (\mathbf{P}_7) и (\mathbf{P}'_7) соответствует изгибаемая реализация в виде четырёхжды покрытой пары треугольников, смежных по ребру (см. рис. 5).

$$(\mathbf{P}_5) \quad c_1 = x, \quad s_1 = \sqrt{1-x^2}, \quad c_2 = c_3 = 1, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}'_5) \quad c_1 = x, \quad s_1 = -\sqrt{1-x^2}, \quad c_2 = c_3 = 1, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}_6) \quad c_2 = x, \quad s_2 = \sqrt{1-x^2}, \quad c_1 = c_3 = 1, \quad s_1 = s_3 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}'_6) \quad c_2 = x, \quad s_2 = -\sqrt{1-x^2}, \quad c_1 = c_3 = 1, \quad s_1 = s_3 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}_7) \quad c_3 = x, \quad s_3 = \sqrt{1-x^2}, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$(\mathbf{P}'_7) \quad c_3 = x, \quad s_3 = -\sqrt{1-x^2}, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Решений, отличных от $(\mathbf{P}_1), \dots, (\mathbf{P}'_7)$, система (12) не имеет. Таким образом, на рис. 5 представлены все возможные изометрические реализации комплекса K_l (с точностью до собственного движения и изгибания). Задача изометрической реализации комплекса K_l полностью решена (с помощью компьютера).

Заметим, что компьютер нам пришлось применить только на заключительном этапе — для решения системы полиномиальных уравнений (в нашем случае это была система (12)). Оказывается, и на этом этапе можно обойтись без компьютера, если сводить систему (11) к системе полиномиальных уравнений способом 2 (см. раздел 3), а не способом 1, как поступили мы (получив тем самым систему (12)).

СПОСОБ 2. Сделаем в (11) замену

$$\cos \varphi_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}, \quad \sin \varphi_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

и избавимся от знаменателей в полученных рациональных уравнениях. Мы получим систему (13), эквивалентную системе (11) в смысле леммы 12:

$$\begin{cases} t_2 t_3 (t_2 t_3 - 2) = 0, \\ t_1 t_3 (t_1 t_3 - 2) = 0, \\ t_1 t_2 (t_1 t_2 - 2) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Эту систему уже можно легко решить вручную. Оказывается, она имеет следующие решения.

$$(\mathbf{P}_1) \quad t_1 = t_2 = t_3 = \sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}'_1) \quad t_1 = t_2 = t_3 = -\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_2) \quad t_1 = y, \quad t_2 = 2/y, \quad t_3 = 0 \quad \text{для любых } y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0.$$

$$(\mathbf{P}_3) \quad t_1 = y, \quad t_3 = 2/y, \quad t_2 = 0 \quad \text{для любых } y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0.$$

$$(\mathbf{P}_4) \quad t_2 = y, \quad t_3 = 2/y, \quad t_1 = 0 \quad \text{для любых } y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0.$$

$$(\mathbf{P}_5) \quad t_1 = y, \quad t_2 = t_3 = 0 \quad \text{для любых } y \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathbf{P}_6) \quad t_2 = y, \quad t_1 = t_3 = 0 \quad \text{для любых } y \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathbf{P}_7) \quad t_3 = y, \quad t_1 = t_2 = 0 \quad \text{для любых } y \in \mathbb{R}.$$

Решениям системы (13), очевидно, соответствуют те же реализации комплекса K_l , что и решениям системы (12) (см. рис. 5). При этом, например, решениям

системы (13) серии (\mathbf{P}_2) соответствуют решения системы (12) серий (\mathbf{P}_2) и (\mathbf{P}'_2) . Однако система (13), в отличие от системы (11), не позволяет находить такие реализации, при которых хотя бы один из параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ принимает значение π . На неформальном уровне их можно представлять себе как предельные положения соответствующих реализаций при $y \rightarrow \infty$. «Законным образом» их можно получить так, как предлагалось в конце раздела 3. А именно, положим в (11) $\varphi_1 = \pi$. Система (11) примет вид

$$\begin{cases} 2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 - 1 = 0, \\ 2 \cos \varphi_3 - 2 = 0, \\ 2 \cos \varphi_2 - 2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Эта система имеет единственное решение (с учётом того обстоятельства, что $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, 3$): $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Следовательно, тройка $(\pi, 0, 0)$ является единственным решением системы (11) вида $(\pi, \varphi_2, \varphi_3)$. Этому решению соответствует реализация, представляющую собой такое положение фигуры (\mathbf{P}_5) (см. рис. 5), при котором величина двугранного угла между плоскостями смежных по ребру треугольников равна π .

Аналогичным образом решениями системы (11) являются тройки $(0, \pi, 0)$ и $(0, 0, \pi)$, им соответствуют «плоские положения» фигур (\mathbf{P}_6) и (\mathbf{P}_7) . Других решений вида $(\varphi_1, \pi, \varphi_3)$ или $(\varphi_1, \varphi_2, \pi)$ система (11) не имеет. Легко проверить также, что если в уравнениях системы (11) положить равными π две или три переменные, то система станет несовместной.

Вывод: система (11) имеет следующие решения: $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$, $(0, 0, \pi)$, а также все тройки $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, соответствующие решениям системы (13). Других решений система (11) не имеет. Задача изометрической реализации развёртки K_l полностью решена (без применения компьютера).

Замечание 6. Недавно И. Х. Сабитовым была высказана гипотеза, состоящая в том, что кратность неотрицательного корня V_0 многочлена для объёма в том или ином смысле должна соответствовать числу реализаций в виде многогранников с объёмом V_0 . То обстоятельство, что среди реализаций могут быть изгибаемые многогранники, несколько усложняет корректное определение такого соответствия. Найденный выше список реализаций $(\mathbf{P}_1), \dots, (\mathbf{P}_7)$ развёртки правильного октаэдра может служить подтверждением гипотезы Сабитова, если к нему добавить реализацию в виде восьмикратно покрытого правильного треугольника (хотя такая реализация и является, например, одним из положений реализации (\mathbf{P}_7) , с топологической точки зрения она отличается от реализации (\mathbf{P}_7) «в общем положении»). Как, однако, понять, являются ли два многогранника «различными» реализациями или они представляют собой два положения «одной и той же» реализации? Корректное определение понятия «одинаковые реализации» данной развёртки и исследование высказанной гипотезы является интересной задачей на стыке алгебры, геометрии и топологии.

Переходим к решению задачи изометрической реализации следующей развёртки $K_l = \{K, l\}$.

Метрический октаэдр Брикара

Пусть симплициальный комплекс K комбинаторно изоморфен октаэдру (см. рис. 4), а метрика l такова, что рёбра комплекса имеют следующие длины: $d_{12} = d_{64} = 3$, $d_{13} = d_{15} = d_{63} = d_{65} = 5$, $d_{14} = d_{62} = \sqrt{41}$, $d_{23} = d_{34} = d_{45} = d_{52} = 4$ (d_{ij} — длина ребра (v_i, v_j)). Неравенства треугольника на гранях очевидным образом выполнены. Название «метрический октаэдр Брикара» оправдано тем, что одной из реализаций метрического октаэдра K_l с такими длинами рёбер, как мы покажем, является изгибаемый октаэдр Брикара (об изгибаемых октаэдрах Брикара можно прочитать, например, в [3]).

Действуя так же, как и при решении задачи изометрической реализации метрически правильного октаэдра, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} 4 + 4 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - 5 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 = 0, \\ 4 - 4 \cos \varphi_1 - 5 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 = 0, \\ 5 - 5 \cos \varphi_1 - 3 \cos \varphi_2 + 3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 5 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Смысл параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ остался прежним (см. рис. 4).

Сведём систему (15) к полиномиальной системе способом 2 (см. раздел 3). Получим следующую систему:

$$\begin{cases} (t_2 t_3 - 2)(2t_2 t_3 - 1) = 0, \\ t_1(2t_1 t_3^2 + 2t_1 - 5t_3) = 0, \\ t_1(4t_1 t_2^2 + t_1 - 5t_2) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Можно показать¹ (это проверяется без помощи компьютера), что система (16) имеет следующие решения.

(\mathbf{P}_1) $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 2$. Этому решению соответствует реализация комплекса K_l в виде выпуклого октаэдра (рис. 6).

(\mathbf{P}'_1) $t_1 = t_2 = -1, t_3 = -2$. Это решение симметрично решению (\mathbf{P}_1).

(\mathbf{P}_2) $t_1 = 5x/(2x^2 + 2), t_2 = 1/2x, t_3 = x$ для любых $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Это реализация в виде изгибаемого октаэдра Брикара первого типа; вершины A_1 и A_6 являются полюсами (см. рис. 6). Заметим, что эту реализацию можно рассматривать также и как изгибаемый октаэдр Брикара второго типа (с теми же полюсами).

¹Эту систему можно решить, исходя, например, из следующих соображений: из первого уравнения следует, что либо $t_3 = 2/t_1$, либо $t_3 = 1/(2t_2)$; какую бы из этих двух подстановок мы ни сделали во втором и третьем уравнениях, мы получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, которая легко решается. Несмотря на то, что в левых частях уравнений системы (16) есть неприводимые многочлены выше второй степени, что, казалось бы, затрудняет алгебраическое решение системы, то обстоятельство, что первое уравнение разлагается на множители, позволяет свести решение системы (16) к решению нескольких более простых систем. Заметим, что таким свойством обладают все встречающиеся в данном разделе системы алгебраических уравнений, поэтому в дальнейшем мы будем позволять себе не останавливаться на деталях решения такого рода систем и просто приводить полный список решений, подразумевая, что он был получен тем же способом, что был только что предложен для решения системы (16).

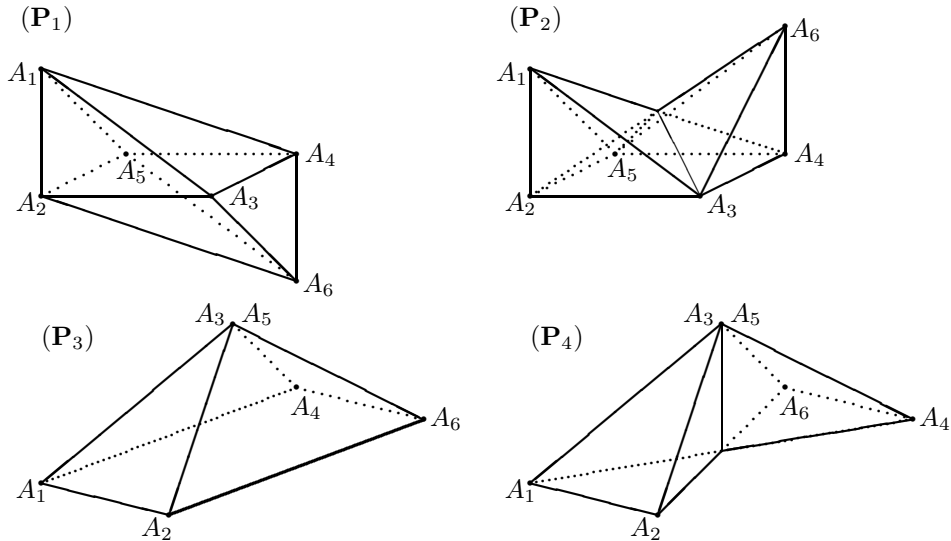


Рис. 6

- (\mathbf{P}_3) $t_1 = 0$, $t_2 = 2/x$, $t_3 = x$ для любых $x \in R$, $x \neq 0$. Это изгибаемая реализация в виде дважды покрытого четырёхгранного угла (см. рис. 6).
- (\mathbf{P}_4) $t_1 = 0$, $t_2 = 1/2x$, $t_3 = x$ для любых $x \in R$, $x \neq 0$. Это изгибаемая реализация в виде дважды покрытого самопересекающегося четырёхгранного угла (см. рис. 6).

Найдём теперь все такие решения системы (15), что хотя бы одно неизвестное равно π . Оказывается, такими решениями являются тройки $(0, \pi, 0)$ и $(0, 0, \pi)$ и только они. (Напомним, что мы предполагаем, что $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, 3$.) Этим решениям системы (15) соответствуют изометрические реализации, представляющие собой такие положения многогранника (\mathbf{P}_3) (см. рис. 6), при которых он целиком лежит в одной плоскости (очевидно, эти положения неконгруэнтны). Таким образом, на рис. 6 представлены все возможные реализации комплекса K_l (с точностью до собственного движения и изгиба). Задача изометрической реализации комплекса K_l полностью решена (без применения компьютера).

Нереализуемый метрический октаэдр

Пусть симплициальный комплекс K комбинаторно изоморфен октаэдру (см. рис. 4), а метрика l такова, что рёбра комплекса имеют следующие длины: $d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{15} = d_{26} = d_{36} = d_{46} = d_{56} = d_{25} = 1$, $d_{23} = d_{34} = d_{45} = 2/7$. Неравенства треугольника на гранях очевидным образом выполнены.

Действуя так же, как и при решении задач изометрической реализации метрически правильного октаэдра, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} 7 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 - 1 = 0, \\ 7 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 + 4 \cos \varphi_3 - 4 = 0, \\ 392 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 376 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + 376 \cos \varphi_1 + 64 \cos \varphi_2 - 799 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Смысл параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ остался прежним (см. рис. 4).

Сведём систему (17) к полиномиальной системе способом 2 (см. раздел 3). Получим следующую систему:

$$\begin{cases} t_2 t_3 (t_2 t_3 - 7) = 0, \\ t_3 (5 t_1^2 t_3 + 3 t_3 - 14 t_1) = 0, \\ 1615 t_1^2 t_2^2 + 735 t_1^2 + 111 t_2^2 - 1568 t_1 t_2 + 735 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Можно проверить (без использования компьютера, см. сноску на с. 193), что система (18) не имеет действительных решений. Кроме того, легко убедиться в том, что система (17) не имеет таких решений, что значение хотя бы одной из переменных равно π . Следовательно, система (17) не имеет действительных решений, из чего мы делаем вывод, что рассматриваемый метрический комплекс K_l не допускает ни одной изометрической реализации в \mathbb{R}^3 .

Заметим, что для решения задачи изометрической реализации в данном случае можно было и не прибегать к каким бы то ни было вычислениям: нереализуемость метрического октаэдра K_l при данных длинах рёбер с очевидностью следует из того, что длина одного из рёбер цикла (v_2, v_3, v_4, v_5) больше суммы остальных трёх рёбер этого цикла:

$$1 > \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Переходим к решению задачи изометрической реализации следующего комплекса K_l .

Метрически правильная семивершинная подвеска

Пусть комбинаторная структура K комплекса K_l такая, как на рис. 7, т. е. развёртка комбинаторно изоморфна семивершинной подвеске, и пусть длина каждого ребра развёртки равна 1. Найдём все изометрические реализации развёртки K_l .

В качестве S -диска комплекса K выберем его подкомплекс $L \subset K$, изображённый на рис. 7. Введём параметры $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — величины двугранных углов при рёбрах $v_1 v_3, v_1 v_4, v_1 v_5, v_3 v_4$ соответственно. (Эти, и только эти, рёбра являются внутренними рёбрами комплекса L .) Составим систему из четырёх уравнений, связывающих введённые параметры. В этой системе сделаем замену $t_i = \operatorname{tg}(\varphi_i/2)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Получим систему

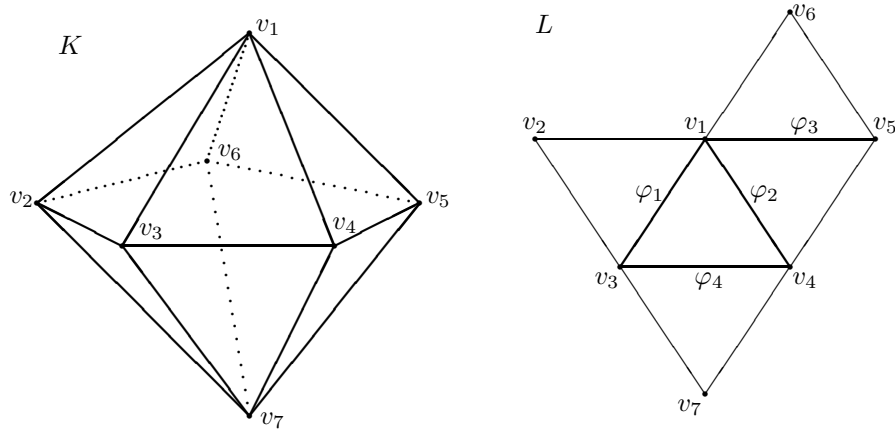


Рис. 7

$$\begin{cases} t_1 t_4 (t_1 t_4 - 2) = 0, \\ t_2 t_4 (t_2 t_4 - 2) = 0, \\ 48 t_3 t_4 (2 t_3 t_4 t_2^2 - 2 t_3 t_2 + t_3 t_4 + 2 - 2 t_2^2 - 2 t_2 t_4) = 0, \\ 2 t_3^2 t_2^2 t_1^2 + 2 t_3^2 t_2^2 - 6 t_3^2 t_2 t_1 - t_3^2 t_1^2 - 6 t_3 t_2^2 t_1 - \\ - 6 t_3 t_2 t_1^2 + 2 t_2^2 t_1^2 + 2 t_3^2 + 6 t_3 t_1 - t_2^2 + 2 t_1^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Эту систему легко решить вручную (см. сноску на с. 193). Приведём полный список решений системы (19) и реализаций комплекса L_l , им соответствующих.

- (\mathbf{P}_1) $t_1 = 1/\sqrt{2}$, $t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 2\sqrt{2}$.
 (\mathbf{P}_2) $t_1 = t_2 = 1/\sqrt{2}$, $t_3 = 0$, $t_4 = 2\sqrt{2}$.
 (\mathbf{P}_3) $t_1 = 0$, $t_2 = t_3 = 1/\sqrt{2}$, $t_4 = 2\sqrt{2}$.
 (\mathbf{P}_4) $t_1 = t_2 = t_3 = 1/\sqrt{2}$, $t_4 = 2\sqrt{2}$.
 (\mathbf{P}_5) $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = -1/\sqrt{2}$, $t_4 = 2\sqrt{2}$.

Каждому из этих решений соответствует реализация в виде подвески с трёхзвенным экватором (*пятивершинника*, рис. 8). В каждом из пяти случаев реализация такова, что некоторые две грани этого пятивершинника трижды покрываются образами граней комплекса L_l , а остальные грани покрываются один раз.

- (\mathbf{P}_6) $t_1 = t_2 = t_3 = (3 + \sqrt{5})/2$, $t_4 = 3 - \sqrt{5}$.
 (\mathbf{P}_7) $t_1 = t_2 = t_3 = (3 - \sqrt{5})/2$, $t_4 = 3 + \sqrt{5}$.

Реализации, соответствующие этим решениям изображены на рис. 8. При реализации (\mathbf{P}_7) экватор представляет из себя правильный пятиугольник, а при реализации (\mathbf{P}_6) — правильную пятиконечную звезду.

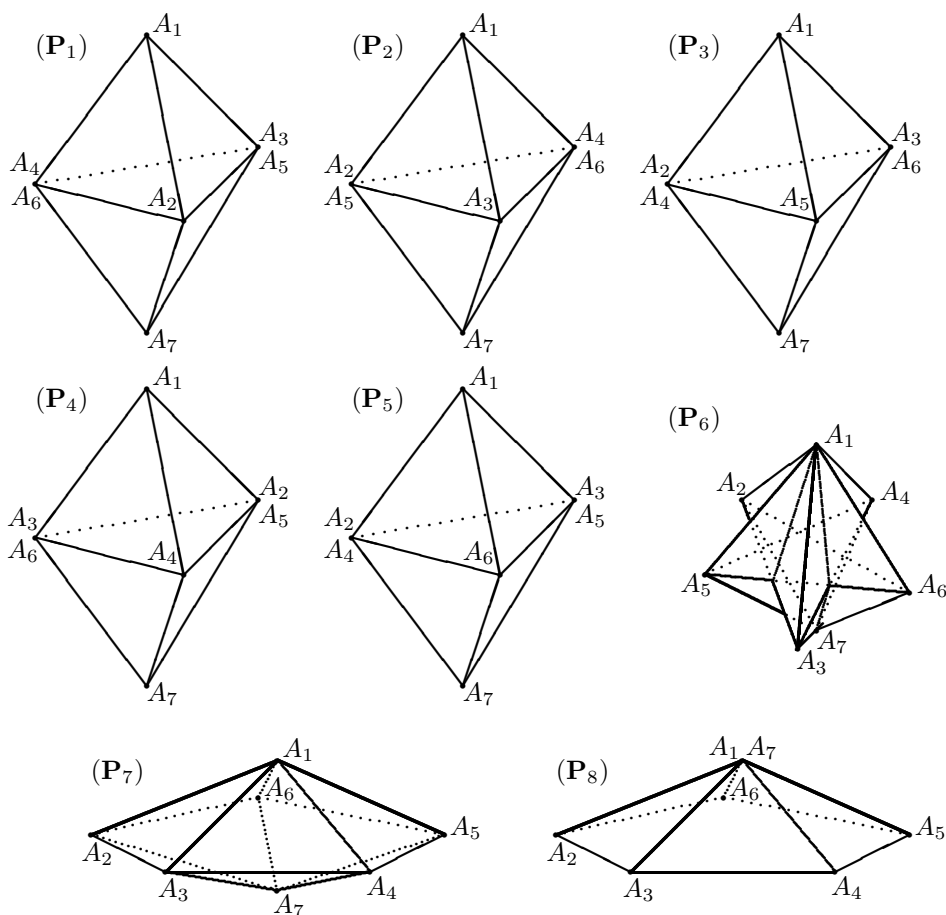


Рис. 8

Кроме того, для каждого из решений $(P_1), \dots, (P_7)$ система (19) имеет двойственное решение.

Наконец, система (19) имеет бесконечную серию решений.

(P_8) В эту серию входят все наборы чисел $(t_1, t_2, t_3, 0)$, такие что

$$2t_3^2 t_2^2 t_1^2 + 2t_3^2 t_2^2 - 6t_3^2 t_2 t_1 - t_3^2 t_1^2 - 6t_3 t_2^2 t_1 - 6t_3 t_2 t_1^2 + 2t_2^2 t_1^2 + 2t_3^2 + 6t_3 t_1 - t_2^2 + 2t_1^2 - 1 = 0. \quad (20)$$

Параметры t_1, t_2, t_3 связаны единственным соотношением. Легко проверить, что каждому значению параметра t_1 (из некоторого интервала) соответствует некоторое (вообще говоря, бесконечное) множество значений параметров t_2 и t_3 .

Каждому решению серии (\mathbf{P}_8) соответствует реализация в виде изгибаемого дважды покрытого пятигранного угла (см. рис. 8).

Теперь необходимо найти такие реализации, что некоторые параметры принимают значения π . В данном случае легко убедиться в том, что какие бы $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}$ в системе ни положить равными π , получаемая система либо не имеет решения, либо все её решения таковы, что $\varphi_4 = 0$. Таким образом, любая реализация рассматриваемого комплекса, такая что хотя бы один параметр равен π , представляет собой какое-то положение изгибаемого дважды покрытого пятигранного угла (\mathbf{P}_8) .

Восьмивершинник

Рассмотрим теперь метрический комплекс K_l , комбинаторная структура K которого задаётся симплицальным комплексом на рис. 9, а все рёбра имеют единичную длину.

В качестве S -диска комплекса K выберем его подкомплекс $L \subset K$, изображённый на рис. 9. Введём параметры $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ — величины двугранных углов при рёбрах $v_5v_8, v_5v_7, v_4v_8, v_4v_6, v_4v_5$ соответственно. (Эти, и только эти, рёбра являются внутренними рёбрами комплекса L .) Составим систему из пяти уравнений, связывающих введённые параметры. В этой системе сделаем замену $t_i = \text{tg}(\varphi_i/2)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (t_1t_3 - 2)t_1t_3 = 0, \\ (2t_1^2t_2t_3 - 2t_1^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + t_2t_3 + 2)t_2t_3 = 0, \\ 8t_1^2t_2^2t_3^2t_4^2 + 2t_1^2t_2^2t_3^2 - 12t_1^2t_2^2t_3t_4 + 2t_1^2t_2^2t_4^2 - 6t_1^2t_2t_3^2t_4 - 6t_1^2t_2t_3t_4^2 + 2t_1^2t_3^2t_4^2 - \\ - 6t_1t_2^2t_3^2t_4 - 6t_1t_2^2t_3t_4^2 - 12t_1t_2t_3^2t_4^2 + 2t_2^2t_3^2t_4^2 + 2t_1^2t_2^2 + 6t_1^2t_2t_4 - t_1^2t_3^2 + \\ + 2t_1^2t_4^2 + 6t_1t_2^2t_4 + 12t_1t_2t_3t_4 - 6t_1t_2t_4^2 + 2t_2^2t_3^2 - 6t_2^2t_3t_4 - t_2^2t_4^2 + 6t_2t_3^2t_4 + \\ + 6t_2t_3t_4^2 + 2t_3^2t_4^2 - t_1^2 + 2t_2^2 - 6t_2t_4 - t_3^2 + 2t_4^2 - 1 = 0, \\ 2t_1^2t_2^2t_5^2 + 2t_1^2t_2^2 - 6t_1^2t_2t_5 + 2t_1^2t_5^2 - 6t_1t_2^2t_5 - 6t_1t_2t_5^2 - t_2^2t_5^2 - t_1^2 + 2t_2^2 + 6t_2t_5 + \\ + 2t_5^2 - 1 = 0, \\ 2t_3^2t_4^2t_5^2 + 2t_3^2t_4^2 - 6t_3^2t_4t_5 + 2t_3^2t_5^2 - 6t_3t_4^2t_5 - 6t_3t_4t_5^2 - t_4^2t_5^2 - t_3^2 + 2t_4^2 + 6t_4t_5 + \\ + 2t_5^2 - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Система (21) была получена с помощью компьютера, однако её можно было найти и вручную (объём вычислений не слишком велик). Эта система решалась вручную элементарными средствами (см. сноску на с. 193), без составления базиса Грёбнера, компьютер применялся лишь для осуществления некоторых громоздких преобразований, которые также в принципе могли быть сделаны без компьютера. Перейдём к перечислению решений и изометрических реализаций, им соответствующих.

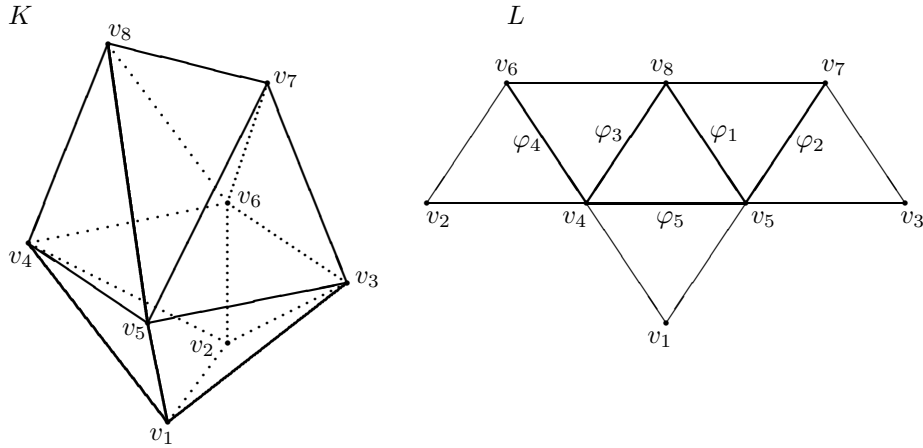


Рис. 9

(**P**₁) $t_1 = t_2 = 0, t_3 = t_4 = t_5 = 1/\sqrt{2}$. Этому решению соответствует реализация в виде правильного тетраэдра, каждая грань которого трижды покрыта образами граней метрического комплекса K_l (рис. 10).

(**P**₂) $t_1 = t_2 = 2\sqrt{2}, t_3 = t_4 = t_5 = 1/\sqrt{2}$.

(**P**₃) $t_1 = t_2 = 0, t_3 = -5/\sqrt{2}, t_4 = t_5 = 1/\sqrt{2}$.

Решениям (**P**₂) и (**P**₃) соответствуют реализации в виде шестивершинников (рис. 10).

(**P**₄) $t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1/\sqrt{2}, t_4 = 1/\sqrt{2}, t_5 = -1/\sqrt{2}$.

(**P**₅) $t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1/\sqrt{2}, t_4 = 1/\sqrt{2}, t_5 = -1/\sqrt{2}$.

(**P**₆) $t_1 = 2\sqrt{2}, t_2 = 0, t_3 = 1/\sqrt{2}, t_4 = 1/\sqrt{2}, t_5 = 1/\sqrt{2}$.

(**P**₇) $t_1 = 0, t_2 = -2\sqrt{2}, t_3 = 1/\sqrt{2}, t_4 = 1/\sqrt{2}, t_5 = 1/\sqrt{2}$.

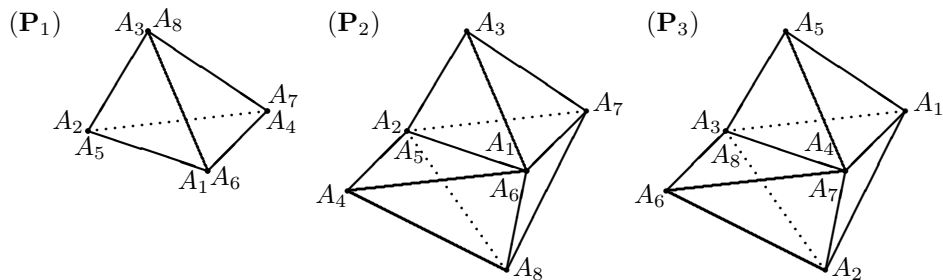


Рис. 10

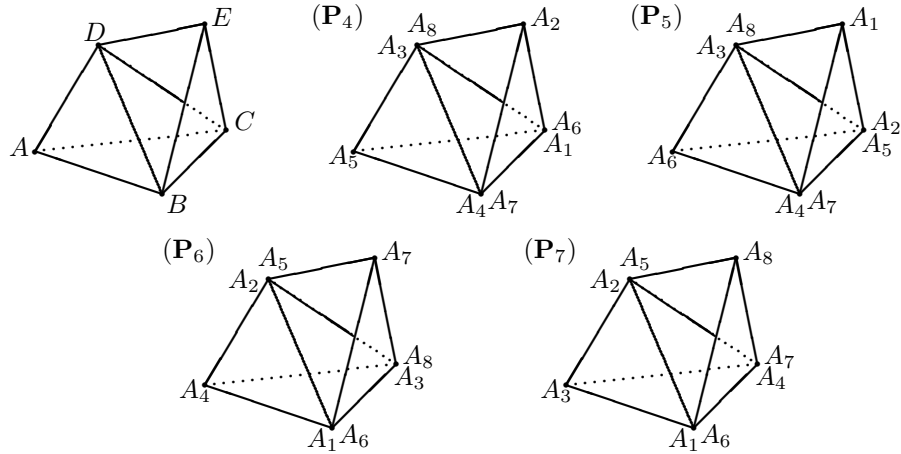


Рис. 11

Каждому из решений $(\mathbf{P}_4), \dots, (\mathbf{P}_7)$ соответствует реализация в виде фигуры $ABCDE$ (рис. 11). Эта фигура не является многогранником; приведём список треугольников («граней»), из которых она состоит: ABC, BCD, ACD, CDE, BCE .

$$(\mathbf{P}_8) \quad t_1 = -2\sqrt{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = -1/\sqrt{2}, \quad t_4 = 1/\sqrt{2}, \quad t_5 = -1/\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_9) \quad t_1 = 2\sqrt{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1/\sqrt{2}, \quad t_4 = 1/\sqrt{2}, \quad t_5 = -1/\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_{10}) \quad t_1 = 0, \quad t_2 = -2\sqrt{2}, \quad t_3 = 1/\sqrt{2}, \quad t_4 = -5/\sqrt{2}, \quad t_5 = 1/\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_{11}) \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\sqrt{2}, \quad t_3 = -1/\sqrt{2}, \quad t_4 = -1/\sqrt{2}, \quad t_5 = 5/\sqrt{2}.$$

Каждому из решений $(\mathbf{P}_8), \dots, (\mathbf{P}_{11})$ соответствует реализация в виде фигуры $ABCDEF$ (рис. 12). Эта фигура не является многогранником; приведём список треугольников («граней»), из которых она состоит: $AEC, AED, CED, BCE, BCF, CDF, DEF, CEF$.

$$(\mathbf{P}_{12}) \quad t_1 = -2\sqrt{2}/5, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = -5/\sqrt{2}, \quad t_4 = 1/\sqrt{2}, \quad t_5 = 1/\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_{13}) \quad t_1 = 0, \quad t_2 = -2\sqrt{2}/5, \quad t_3 = 5/\sqrt{2}, \quad t_4 = 3/\sqrt{2}, \quad t_5 = 3/\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_{14}) \quad t_1 = 2\sqrt{2}, \quad t_2 = 2\sqrt{2}/5, \quad t_3 = 1/\sqrt{2}, \quad t_4 = 1/\sqrt{2}, \quad t_5 = 3/\sqrt{2}.$$

$$(\mathbf{P}_{15}) \quad t_1 = 2\sqrt{2}, \quad t_2 = 2\sqrt{2}/5, \quad t_3 = 1/\sqrt{2}, \quad t_4 = 3/\sqrt{2}, \quad t_5 = 1/\sqrt{2}.$$

В случаях $(\mathbf{P}_{12}), \dots, (\mathbf{P}_{15})$ комплекс реализуется в виде фигуры, представляющей собой шестивершинник, аналогичный многогранникам (\mathbf{P}_2) и (\mathbf{P}_3) , с двумя дополнительными гранями (рис. 13).

(\mathbf{P}_{16}) Бесконечная серия решений следующего вида: $t_1 = 1/\sqrt{2}, t_2 = 1/\sqrt{2}, t_3 = 2\sqrt{2}; t_4, t_5$ — произвольные действительные числа, удовлетворяющие уравнению

$$6t_4^2 + 5t_4^2t_5^2 - 4\sqrt{2}t_4^2t_5 - 14t_4t_5 - 4\sqrt{2}t_4t_5^2 - 3 + 6t_5^2 = 0.$$

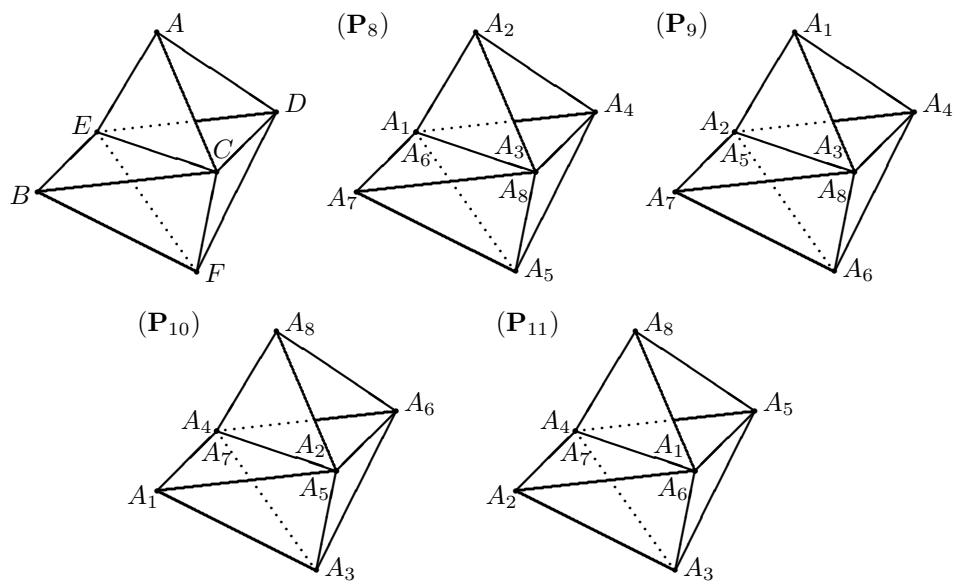


Рис. 12

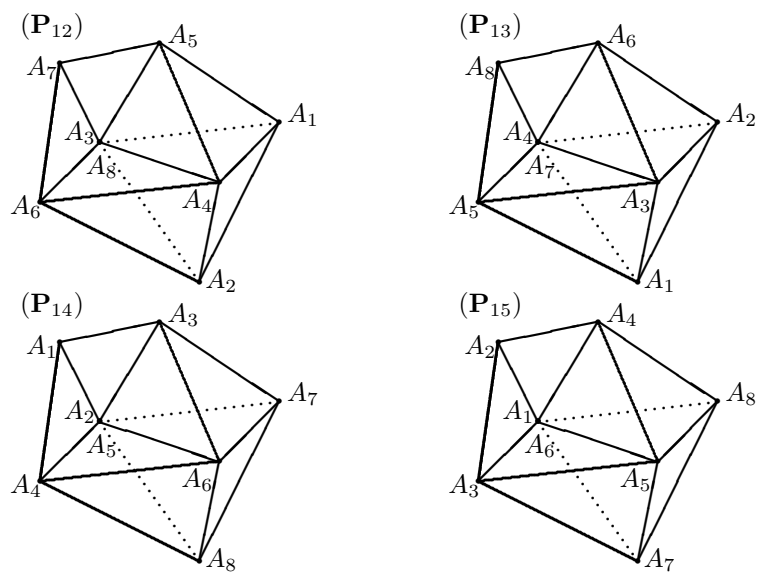


Рис. 13

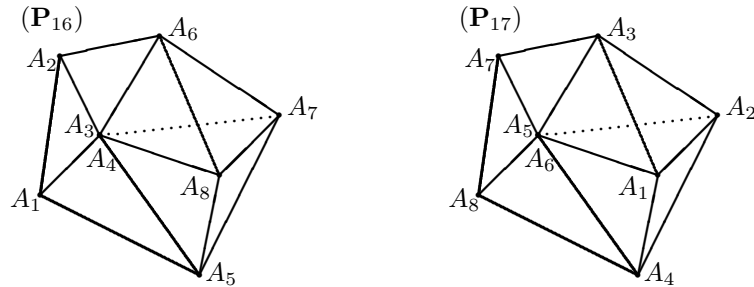


Рис. 14

Можно проверить, что решения последнего уравнения заполняют многообразие, гомеоморфное окружности. Решениям серии (\mathbf{P}_{16}) соответствует изгибаемая реализация (рис. 14); её конфигурационное пространство — окружность.

- (\mathbf{P}_{17}) Бесконечная серия решений, таких что $t_3 = 0$. Остальные параметры в этом случае связаны некоторыми соотношениями (уравнениями, которые получаются, если в уравнениях исходной системы (21) сделать подстановку $t_3 = 0$).

Можно проверить, что решения системы этих уравнений заполняют многообразие, гомеоморфное окружности. Решениям серии (\mathbf{P}_{17}) соответствует изгибаемая реализация (см. рис. 14); её конфигурационное пространство — окружность.

- (\mathbf{P}_{18}) $t_1 = -1/(3 + \sqrt{11})$, $t_2 = -1/(3 + \sqrt{11})$, $t_3 = -2(3 + \sqrt{11})$, $t_4 = 1$, $t_5 = 1$. Реализация в виде самопересекающегося неизгибаемого многогранника с восемью вершинами (рис. 15).
- (\mathbf{P}_{19}) $t_1 = -1/(3 - \sqrt{11})$, $t_2 = -1/(3 - \sqrt{11})$, $t_3 = -2(3 - \sqrt{11})$, $t_4 = 1$, $t_5 = 1$.
- (\mathbf{P}_{20}) Решением системы (21) является также набор чисел t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , в котором:

$$t_3 = x_0, \text{ где } x_0 \text{ — единственный положительный корень уравнения } 2x^6 + 39x^4 - 64 = 0;$$

$$t_4 = t_5 = y_0, \text{ где } y_0 \text{ — больший из корней уравнения } (2x_0^2 - 4)y^2 + 12x_0y - x_0^2 - 4 = 0;$$

$$t_1 = t_2 = 2/x_0.$$

Этому решению соответствует реализация в виде выпуклого многогранника (рис. 15).

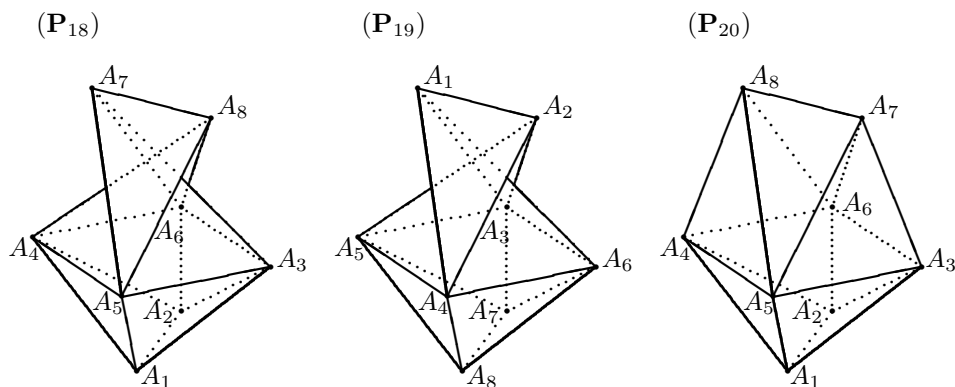


Рис. 15

Литература

- [1] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000.
- [2] Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [3] Сабитов И. Х. Локальная теория изгибаний поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 48. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 196—270.
- [4] Сабитов И. Х. Обобщённая формула Герона—Тарталья и некоторые её следствия // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 10. — С. 105—134.
- [5] Сабитов И. Х. Алгоритмическое решение проблемы изометрических реализаций двумерных многогранных метрик // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 2. — С. 159—172.
- [6] Legendre A. Elements de geometrie. — 1806.
- [7] Whitney H. A theorem on graphs // Ann. Math. — 1931. — Vol. 32. — P. 378—390.

