Аппроксимация решений уравнений Монжа—Ампера поверхностями, сводящимися к развёртывающимся

Л. Б. ПЕРЕЯСЛАВСКАЯ
Московский государственный университет сервиса

УДК 517.956

Ключевые слова: параболическое уравнение Монжа—Ампера, задача Коши, аппроксимация решений, развёртывающиеся поверхности.

Аннотация

В статье идёт речь о приближённом построении поверхности S, которая служит графиком C^2-гладкого решения параболического уравнения Монжа—Ампера специального вида

$$(z_{xx} + a)(z_{yy} + b) - z_{xy}^2 = 0$$

с начальными условиями

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad q(x, 0) = \psi(x),$$

где $a = a(y)$, $b = b(y)$ — заданные функции. В предлагаемом методе искомое решение аппроксимируется последовательностью C^1-гладких поверхностей $\{S_n\}$, каждая из которых состоит из частей поверхностей, сводящихся к развёртывающимся. При этом проекции характеристик поверхности S, в общем случае представляющие собой кривые линии, аппроксимируются характеристическими проекциями поверхностей S_n — ломаными, состоящими из n звеньев. Результаты этих построений сформулированы в теореме. Приводятся условия, достаточные для сходимости при $n \to \infty$ семейства поверхностей S_n к поверхности S, что позволяет построить численное решение этой задачи с любой наперёд заданной точностью.

Abstract

L. B. Pereyaslavskaya, Approximation of solutions of the Monge–Ampère equations by surfaces reduced to developable surfaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 205—236.

We consider an approximate construction of the surface S being the graph of a C^2-smooth solution $z = z(x, y)$ of the parabolic Monge–Ampère equation

$$(z_{xx} + a)(z_{yy} + b) - z_{xy}^2 = 0$$

of a special form with the initial conditions

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad q(x, 0) = \psi(x),$$

where $a = a(y)$ and $b = b(y)$ are given functions. In the method proposed, the desired solution is approximated by a sequence of C^1-smooth surfaces $\{S_n\}$ each of which consists of parts of surfaces reduced to developable surfaces. In this case, the projections of

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 1, с. 205—236.

characteristics of the surface S being curved lines in general are approximated by characteristic projections of the surfaces S_n being polygonal lines composed of n links. The results of these constructions are formulated in the theorem. Sufficient conditions for the convergence of the family of surfaces S_n to the surface S as $n \to \infty$ are presented; this allows one to construct a numerical solution of the problem with any accuracy given in advance.

1. Параметрическое представление решения в характеристических координатах

В этом разделе решение параболического уравнения Монжа—Ампера специального вида

$$(z_{xx} + a)(z_{yy} + b) - z_{xy}^2 = 0 \tag{$*$}$$

с начальными условиями

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad q(x, 0) = \psi(x), \tag{$**$}$$

где $a = a(y)$, $b = b(y)$ — заданные функции, представляется в виде вектор-функции $\{x, y, z\}$ двух аргументов ξ, η, связанных с характеристиками уравнения, и вспомогательной функции $k = k(\xi, \eta)$, представляющей угловой коэффициент проекций характеристик уравнения на плоскость XY. В теореме 1 приведены достаточные условия, при которых такое представление возможно, и уравнения для вспомогательных функций. В теореме 2, названной условной теоремой существования решения, приведены условия, достаточные для выражения C^2-гладкого решения z уравнения ($*$), ($**$) через угловой коэффициент k.

Рассмотрим частные случаи параболического уравнения Монжа—Ампера. В случае, когда $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, уравнение ($*$) превращается в уравнение развёртывающихся поверхностей

$$rt - s^2 = 0, \tag{1.1}$$

решения которого можно представить как огибающие однопараметрического семейства плоскостей [2]. Здесь и далее, согласно общепринятым обозначениям,

$$p = z_x, \quad q = z_y, \quad r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy}.$$

Начальные условия ($**$) задают семейство плоскостей, каждая из которых определяется точкой $(\xi, 0, \varphi(\xi))$ и нормальным вектором $\{\varphi'(\xi), \psi(\xi), -1\}$. Огибающая рассматриваемого семейства плоскостей для

$$\varphi(x) \in C^3(I), \quad \psi(x) \in C^2(I), \quad \text{где} \quad I = (\xi_1, \xi_2), \quad -\infty \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant \infty, \tag{1.2}$$

определяется системой [2]

$$\begin{cases} z - (x - \xi)\varphi'(\xi) - y\psi(\xi) = \varphi(\xi), \\ (x - \xi)\varphi''(\xi) + y\psi'(\xi) = 0, \end{cases}$$

решение которой при

$$\varphi''(\xi) \neq 0 \tag{1.3}$$

определяется как вектор-функция

$$\begin{cases} x = \xi + \kappa(\xi)\eta, \\ y = \eta, \\ z = \varphi(\xi) + [\varphi'(\xi)\kappa(\xi) + \psi(\xi)]\eta, \end{cases} \quad \text{где} \quad \kappa(\xi) = -\frac{\psi'(\xi)}{\varphi''(\xi)}. \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что развёртывающаяся поверхность (1.1) при выполнении условий $(**)$, (1.2), (1.3) является C^2-гладкой, так как

$$p = \varphi', \quad q = \psi, \quad r = \frac{\varphi''}{J}, \quad s = \frac{\psi'}{J}, \quad t = -\frac{\kappa\psi'}{J}, \quad \text{где} \quad J = J(\xi, \eta) = 1 + \kappa'(\xi)\eta,$$

и в области $D = \{(\xi, \eta) \mid \xi \in I, \ J > 0\}$ может быть представлена единственным образом в виде функции $\zeta = \zeta(x, y)$.

При постоянной ξ система (1.4) задаёт прямолинейные образующие развёртывающейся поверхности, проекции которых на плоскость XY удовлетворяют уравнению $x = \xi + \kappa(\xi)y$, и значит, $\kappa(\xi)$ — котангенс угла между проекциями прямолинейных образующих и осью Ox. Поскольку уравнение развёртывающихся поверхностей является частным случаем параболического уравнения Монжа—Ампера, его характеристики задаются системой [1]

$$\begin{cases} dp = 0, \\ dq = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Нетрудно проверить, что прямолинейные образующие развёртывающихся поверхностей являются характеристиками (1.5) решений уравнения (1.1).

Рассмотрим уравнение $(*)$ с постоянными коэффициентами $a = \alpha$, $b = \beta$:

$$(r + \alpha)(t + \beta) - s^2 = 0. \tag{1.6}$$

Характеристики уравнения (1.6), определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} dp + \alpha dx = 0, \\ dq + \beta dy = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

в общем случае криволинейны, но их проекции на плоскость XY, задаваемые первыми двумя уравнениями системы (1.7), являются прямыми линиями.

В дальнейшем проекции характеристик уравнения $(*)$ на плоскость XY для краткости будем называть характеристическими проекциями.

Проинтегрировав каждое уравнение системы (1.7) вдоль характеристики от точки $(\xi, 0)$ до точки (ξ, η) с учётом начальных условий $(**)$, (1.2) и предположив, что

$$\varphi''(\xi) + \alpha \neq 0, \tag{1.8}$$

представим решение уравнения (1.6) в виде вектор-функции двух аргументов ξ и η:

$$\begin{cases} x = \xi + k_0(\xi)\eta, \\ y = \eta, \\ z = \varphi(\xi) + [\varphi'(\xi)k_0(\xi) + \psi(\xi)]\eta - (\alpha k_0^2 + \beta)\dfrac{\eta^2}{2}, \end{cases} \quad \text{где} \quad k_0(\xi) = -\frac{\psi'(\xi)}{\varphi''(\xi) + \alpha}. \tag{1.9}$$

Заметим, что в декартовых координатах решение уравнения (1.6) с начальными условиями (∗∗), (1.2) может быть представлено единственным образом C^2-гладкой в области $D = \{(\xi, \eta) \mid \xi \in I,\ 1 + k_0'(\xi)\eta > 0\}$ функцией

$$z = z(x, y) = \zeta(x, y) - \alpha\frac{x^2}{2} - \beta\frac{y^2}{2}, \tag{1.10}$$

здесь $\zeta(x, y)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\zeta(x, 0) = \varphi(x) + \alpha\frac{x^2}{2}, \quad \zeta_y(x, 0) = \psi(x). \tag{1.11}$$

Из сказанного следуют леммы 1.1, 1.2.

Лемма 1.1. *Характеристические проекции уравнения* (1.6) *с начальными условиями* (∗∗), (1.2) *и уравнения развёртывающихся поверхностей* (1.1) *с начальными условиями* (1.11), (1.8), *имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают.*

Лемма 1.2. *Достаточным условием существования решения задачи* (1.6), (∗∗), (1.2) *в области, ограниченной характеристическими проекциями* $x = \xi_1 + k_0(\xi_1)y$, $x = \xi_2 + k_0(\xi_2)y$ *и прямыми* $y = h$, $y = -h$, *является выполнение неравенства* $|k_0'(\xi)| < \frac{1}{h}$ *для любого* ξ *из* I.

Рассмотрим уравнение (∗) с коэффициентами $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$. Характеристики этого уравнения задаются системой

$$\begin{cases} dp + a(x, y)\,dx = 0, \\ dq + b(x, y)\,dy = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Через $k = k(x, y)$ обозначим угловой коэффициент проекций характеристик на плоскость XY:

$$k = \frac{dx}{dy}. \tag{1.13}$$

Так как $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, то из (1.1), (1.12) следует, что

$$k = -\frac{s}{r + a} = -\frac{t + b}{s}. \tag{1.14}$$

Пусть U — область определения решения $z(x, y)$ уравнения (∗), (∗∗). Предположим, что характеристическая проекция решения z, проведённая через произвольную точку $(x, y) \in U$, пересекает ось Ox в точке $(\xi, 0) \in I$. В этом случае точке (x, y) можно поставить в соответствие пару чисел (ξ, η), где $\eta = y$.

Если соответствие $(x, y) \to (\xi, \eta)$ взаимно-однозначно для любой точки из U, то будем говорить, что в области U определены характеристические координаты (ξ, η).

Лемма 1.3. *Если $z \in C^2(U)$, $z_{xxy}, z_{xyy} \in C(U)$, $a, b, b'_x \in C(U)$ и $r + a \neq 0$ на U, то через любую точку области U проходит единственная характеристическая проекция решения уравнения $(*)$, $(**)$, однозначно проектирующаяся на ось Oy. Более того, найдётся область $U_0 \subseteq U$, $U_0 \cap Ox = I$, в которой определены непрерывные характеристические координаты.*

Доказательство. Рассмотрим равенство (1.13) как дифференциальное уравнение
$$x' = k(x, y) \tag{1.15}$$
относительно неизвестной функции $x = x(y)$ с начальным условием
$$x(0) = \xi. \tag{1.16}$$
Поскольку в силу условий леммы 1.3 функция k определена и непрерывна вместе с производной k_x в области U, из теоремы существования и единственности обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [5] следует, что через любую точку области U проходит единственная характеристическая проекция, соответствующая решению z, которая однозначно проектируется на ось Oy. Обозначим эти решения через $\chi_\xi(y)$. Продолжим каждое из этих решений до непродолжаемого в области U, что можно сделать единственным способом [5], и обозначим через U_0 ($U_0 \subseteq U$) множество точек (x, y), где $x = \chi_\xi(y)$ — непродолжаемые в U решения уравнения (1.15), (1.16).

Через любую точку из U_0 проходит характеристическая проекция решения z, пересекающая ось Ox в некоторой точке $(\xi, 0)$, $\xi \in I$. Определим V_0 как множество всех пар (ξ, η), где $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = y$. Тогда V_0 — открытое множество [5], а функция $x = \chi_\xi(y) = x(\xi, \eta)$ есть непрерывная функция пары переменных ξ и η из V_0.

Определим отображение $\chi\colon V_0 \to U_0$ следующим образом:
$$\chi\colon \quad \begin{cases} x = \chi_\xi(y) = x(\xi, \eta), \\ y = \eta. \end{cases} \tag{1.17}$$
Поскольку χ непрерывно и взаимно-однозначно отображает открытое множество V_0 на U_0, то множество U_0 открыто и обратное отображение χ^{-1} непрерывно на U_0. Лемма 1.3 доказана.

Будем теперь рассматривать угловой коэффициент k как функцию характеристических координат ξ и η, определённую на V_0: $k = k(\xi, \eta)$.

Лемма 1.4. *Отображение $\chi\colon V_0 \to U_0$, представимое в виде*
$$\chi\colon \quad \begin{cases} x = \xi + \displaystyle\int_0^\eta k(\xi, \zeta)\, d\zeta, \\ y = \eta, \end{cases} \tag{1.18}$$
в условиях леммы 1.3 непрерывно дифференцируемо в области V_0, причём

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = k, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \int\limits_0^\eta k'_\xi(\xi,\zeta)\,d\zeta, \tag{1.19}$$

и, кроме того, существуют не зависящие от порядка дифференцирования смешанные производные

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial \eta} = \frac{\partial k}{\partial \xi}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Из теорем о дифференцировании решения дифференциального уравнения по начальным значениям [5] следует существование для решения уравнения (1.15), (1.16) на V_0 непрерывной частной производной

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\chi_\xi(\eta) = \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi}$$

и непрерывной, не зависящей от порядка дифференцирования, смешанной производной

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\chi_\xi(\eta) = \frac{\partial^2 x(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Проинтегрировав уравнение

$$dx = k(\xi,\eta)\,d\eta$$

вдоль характеристики от точки $(\xi,0)$ до (ξ,η), получаем равенство

$$x(\xi,\eta) - x(\xi,0) = \int\limits_0^\eta k_\xi(\xi,\zeta)\,d\zeta,$$

откуда непосредственно следуют формулы (1.18)—(1.20). Лемма 1.4 доказана.

Через $J = J(\xi,\eta)$ обозначим якобиан перехода от координат (x,y) к характеристическим координатам (ξ,η). Заметим, что $J > 0$ в области V_0.

Лемма 1.5. *В условиях леммы* 1.3 *якобиан* J *может быть представлен в виде*

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + \int\limits_0^\eta k'_\xi(\xi,\zeta)\,d\zeta. \tag{1.21}$$

Частные производные $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ *связаны с частными производными в характеристических координатах* $\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ *следующими соотношениями:*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = J\frac{\partial}{dx}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = k\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{k}{J}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{1.23}$$

Лемма 1.6. *В условиях леммы* 1.3 *при* $a'_y \in C(U_0)$ *имеют место равенства*

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{b'_x - ka'_y}{r+a}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(J(r+a)) = Ja'_y, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(Js) = -Jb'_x. \tag{1.25}$$

Доказательство. Поскольку частные производные

$$k_x = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{z_{yy}+b}{z_{xy}} = -\frac{z_{xyy}+b'_y}{z_{xy}} - k\frac{z_{xxy}}{z_{xy}},$$

$$k_y = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{z_{xy}}{z_{xx}+a} = -\frac{z_{xyy}}{z_{xx}+a} - k\frac{z_{xxy}+a'_y}{z_{xx}+a}$$

непрерывны, то из (1.22) следует, что производная

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = kk_x + k_y = \frac{b'_x - ka'_y}{z_{xx}+a}$$

определена и непрерывна в области V_0.

Для доказательства формул (1.25) будем исходить из тождеств $r_y = s_x$, $s_y = t_x$. Исключим при помощи (1.14) s из первого и t из второго тождества,

$$(r+a)_y = (-k(r+a))_x + a'_y, \quad s_y = -(ks)_x - b'_x,$$

и перейдём к характеристическим координатам по (1.23):

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(r+a) + \frac{r+a}{J}\frac{\partial k}{\partial \xi} = a'_y, \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{s}{J}\frac{\partial k}{\partial \xi} = -b'_x.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{\partial J}{\partial \eta},$$

из (1.21) получаем формулы (1.25).

Теорема 1. *Предположим, что уравнение* $(*)$, $(**)$, (1.2) *с непрерывными коэффициентами* $a = a(x,y)$, $b = b(x,y)$ *и их производными* a'_y, b'_x *имеет* C^2*-гладкое решение с непрерывными смешанными производными* z_{xxy}, z_{xyy} *в области* U_0 *и* $r + a \neq 0$ *в* U_0. *Тогда решение* z *можно представить как вектор-функцию* $\{x,y,z\}$ *характеристических координат* (ξ,η), *где* x, y *определяются отображением* (1.18), *а* z — *формулой*

$$z = \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)\int_0^\eta k(\xi,\zeta)\,d\zeta + \psi(\xi)\eta -$$
$$- \int_0^\eta k(\xi,\zeta)\,d\zeta \int_0^\zeta a(x(\xi,\mu),\mu)k(\xi,\mu)\,d\mu - \int_0^\eta d\zeta \int_0^\zeta b(x(\xi,\mu),\mu)\,d\mu, \tag{1.26}$$

где угловой коэффициент k вместе с якобианом J могут быть определены из интегродифференциальной системы уравнений

$$\begin{cases} k(\xi,\eta)\Big[\varphi''(\xi)+a_0(\xi)+\int\limits_0^\eta a'_y(\xi,\zeta)J(\xi,\zeta)\,d\zeta\Big] = -\psi'(\xi)+\int\limits_0^\eta b'_x(\xi,\zeta)J(\xi,\zeta)\,d\zeta, \\ J(\xi,\eta)=1+\int\limits_0^\eta \dfrac{\partial k(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\,d\zeta, \end{cases} \tag{1.27}$$

здесь $a_0(\xi)=a(\xi,0)$.

Доказательство. Проинтегрируем каждое уравнение системы (1.12) вдоль характеристики χ_ξ от точки $(\xi,0)$ до (ξ,η), учитывая начальные данные $(**)$, (1.2):

$$\begin{cases} p=\varphi'(\xi)-\int\limits_0^\eta a(x(\xi,\mu),\mu)k(\xi,\mu)\,d\mu, \\ q=\psi(\xi)-\int\limits_0^\eta b(x(\xi,\mu),\mu)\,d\mu, \\ z=\varphi(\xi)+\int\limits_0^\eta p(\xi,\zeta)k(\xi,\zeta)\,d\zeta+\int\limits_0^\eta q(\xi,\zeta)\,d\zeta. \end{cases} \tag{1.28}$$

Подставляя первые два равенства из (1.28) в третье, получим (1.26) — представление решения z в характеристических координатах через угловой коэффициент k.

Первое из уравнений (1.27) следует из тождества $k(r+a)+s\equiv 0$ при замене $r+a$ и s на выражения, полученные при интегрировании вдоль характеристики уравнений (1.25):

$$r+a=\frac{1}{J}\Big[\varphi''(\xi)+a(\xi,0)+\int\limits_0^\eta a'_y(x(\xi,\mu),\mu)J(\xi,\mu)\,d\mu\Big], \tag{1.29}$$

$$s=\frac{1}{J}\Big[\psi'(\xi)-\int\limits_0^\eta b'_x(x(\xi,\mu),\mu)J(\xi,\mu)\,d\mu\Big]. \tag{1.30}$$

Второе из уравнений (1.27) получено в лемме 1.5.

Следствие. *В случае, когда коэффициенты уравнения* $(*)$, $(**)$, (1.2) *зависят только от переменной* y ($a=a(y)$, $b=b(y)$) *и выполнены все условия теоремы* 1, *решение* z *можно представить как вектор-функцию* $\{x,y,z\}$, *где* x *и* y *определены как в* (1.18),

$$z = \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)\int\limits_0^\eta k(\xi,\zeta)\,d\zeta + \psi(\xi)\eta - \\ - \int\limits_0^\eta k(\xi,\zeta)\,d\zeta \int\limits_0^\zeta a(y)k(\xi,y)\,dy - \int\limits_0^\eta d\zeta \int\limits_0^\zeta b(y)\,dy, \quad (1.31)$$

коэффициент k может быть определён из дифференциальной системы уравнений

$$\begin{cases} \psi'(\xi)\dfrac{\partial k(\xi,\eta)}{\partial\eta} = -k^2(\xi,\eta)J(\xi,\eta)a'(\eta), \\ \dfrac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \dfrac{\partial k(\xi,\eta)}{\partial\xi} \end{cases} \quad (1.32)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} k(\xi,0) = k_0(\xi) = -\dfrac{\psi'(\xi)}{\varphi''(\xi)+a(0)}, \\ J(\xi,0) = 1. \end{cases} \quad (1.33)$$

Теорема 2 (условная теорема существования решения). *Предположим, что система* (1.27), *коэффициенты которой φ, ψ удовлетворяют условиям* (1.2), *а a'_y, b'_x непрерывны, имеет решение k, J, непрерывное на $V_0 = (\xi_1,\xi_2)\times[0,\gamma]$ вместе с производными $\frac{\partial k}{\partial\xi}$, $\frac{\partial J}{\partial\eta}$, причём $J > 0$. Тогда вектор-функция $\{x,y,z\}$ характеристических координат (ξ,η), определённая формулами* (1.18), (1.26), *может быть представлена в виде C^2-гладкой функции $z = z(x,y)$, удовлетворяющей уравнению* $(*)$, $(**)$ *с коэффициентами $a = a(x,y)$, $b = b(x,y)$.*

Доказательство. В условиях теоремы отображение $\chi\colon V_0 \to U_0$, определяемое формулой (1.18), взаимно-однозначно ($J > 0$) и вместе с обратным отображением χ^{-1} принадлежит классу C_1 (см. (1.19)). Продифференцировав z в (1.26) по ξ и по η, найдём при помощи (1.23) первые производные p и q, которые после преобразований можно представить в виде (1.28). Продифференцировав полученные p и q по ξ и по η, аналогично найдём вторые производные, которые для r можно представить как (1.29), а для s, исходя из определения

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{k}{J}\frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{\partial p}{\partial\eta},$$

в виде

$$s_1 = -\frac{k}{J}\left[\varphi''(\xi) + a(\xi,0) + \int\limits_0^\eta a'_y(x(\xi,\mu),\mu)J(\xi,\mu)\,d\mu\right] \quad (1.34)$$

или, если рассматривать s как

$$s_2 = \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial q}{\partial\xi},$$

в виде (1.30). Для

$$t = \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{k}{J}\frac{\partial q}{\partial\xi} + \frac{\partial q}{\partial\eta}$$

имеем

$$t + b = \frac{k}{J}\left[\psi'(\xi) - \int\limits_0^\eta b'_x(x(\xi,\mu),\mu)J(\xi,\mu)\,d\mu\right]. \tag{1.35}$$

Заметим, что из (1.27) следует, что $s_1 = s_2$, и при непосредственной подстановке непрерывных вторых производных функции z (1.26), определённых как (1.29), (1.30), (1.34), (1.35), в уравнение $(*)$ убеждаемся, что $z = z(x,y)$ является C^2-гладким решением этого уравнения с начальными условиями $(**)$. Теорема 2 доказана.

2. Построение аппроксимирующих поверхностей. Рекуррентные формулы для решения уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами

Будем предполагать, что решение $z = z(x,y)$ уравнения

$$(r + a(y))(t + b(y)) - s^2 = 0 \tag{2.1}$$

определено в замкнутой криволинейной трапеции T, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = \eta$ и характеристиками χ_1, χ_2, проходящими через концы отрезка $[\xi_1,\xi_2]$. В характеристических координатах трапеция T — это прямоугольник $P = [\xi_1,\xi_2]\times[0,\gamma]$. На отрезке $[\xi_1,\xi_2]$ зададим функции

$$z_0 = z_0(x) = z(x,0), \quad q_0 = q_0(x) = z'_y(x,0), \tag{2.2}$$

предполагая, что

$$z_0, q_0 \in C^\infty([\xi_1,\xi_2]), \quad z''_0 + a_0 \neq 0, \quad \text{где} \;\; a_0 = a(0). \tag{2.3}$$

Параллельными прямыми

$$y = \eta_m, \quad \eta_m = \eta_{m,n} = mh, \quad h = h_n = \frac{\gamma}{n}, \quad m = 1,2,\dots,n, \tag{2.4}$$

прямоугольник P разобьём на n частей и построим C^1-гладкую поверхность S_n, которая в каждом прямоугольнике $P_m = P_{m,n} = [\xi_1,\xi_2]\times[\eta_{m-1},\eta_m]$ определяется функциями вида

$$\tilde z_m = \tilde z_{m,n} = \zeta_m(x,y) - \frac{1}{2}(\alpha_m x^2 + \beta_m y^2), \tag{2.5}$$

здесь $\zeta_m = \zeta_m(x,y) = \zeta_{m,n}(x,y)$ — решение уравнения развёртывающейся поверхности (1.1), а $\alpha_m = \alpha_{m,n}$, $\beta_m = \beta_{m,n}$ — постоянные.

Далее, если величина n не изменяется, индекс n будем опускать; в конце раздела 2 и в разделе 5 при переходе к пределу при $n \to \infty$ индекс n восстановим. Как было установлено в разделе 1, функции вида (2.5) задают всё множество решений уравнения

$$(r + \alpha_m)(t + \beta_m) - s^2 = 0. \tag{2.6}$$

Вместо n уравнений вида (2.6) рассмотрим одно уравнение

$$(r+\tilde{\alpha})(t+\tilde{\beta})-s^2=0, \tag{2.7}$$

коэффициенты которого — кусочно-постоянные функции, определённые следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}(y)=\{\alpha_m \text{ при } \eta_{m-1}\leqslant y\leqslant \eta_m\},\\ \tilde{\beta}=\tilde{\beta}(y)=\{\beta_m \text{ при } \eta_{m-1}\leqslant y\leqslant \eta_m\},\end{aligned}\quad m=1,2,\dots,n. \tag{2.8}$$

Решением уравнения (2.7) будем считать C^1-гладкую вектор-функцию $\{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\}$, заданную в характеристических координатах (ξ,η), где $\tilde{y}=\eta$, удовлетворяющую начальным условиям

$$\begin{gathered}\tilde{x}(\xi,0)=\xi,\quad \tilde{z}(\xi,0)=z_0,\quad \tilde{z}'_y(\xi,0)=q_0,\\ z_0,q_0\in C^\infty([\xi_1,\xi_2]),\quad z_0''+\alpha_0\neq 0,\quad \alpha_0=a(0),\end{gathered} \tag{2.9}$$

и построенную последовательно в прямоугольниках $P_1,P_2,\dots,P_n$.

Будем считать, что на P_1 решение совпадает с решением уравнения (2.6) при $m=1$ и начальных условиях (2.2). Это решение непосредственно определяется по формуле (1.9) для начальных данных (2.2) и углового коэффициента

$$\tilde{k}_1=\tilde{k}_1(\xi)=-\frac{q_0'}{z_0''+\alpha_1}.$$

В случае, когда

$$|\tilde{k}_1'|\leqslant\frac{1}{h},$$

вследствие леммы 1.2 решение будет определено на всём прямоугольнике P_1. Значения $\tilde{z}$ и $\tilde{z}_y$ на прямой $y=\eta_1$

$$\tilde{z}|_{y=\eta_1}=\tilde{z}_1,\quad \tilde{z}_y|_{y=\eta_1}=\tilde{q}_1$$

будем рассматривать как начальные данные для уравнения (2.6) при $m=2$ на P_2.

Функцию $\tilde{z}$ на P_m при $m=2,3,\dots,n$ определим следующим образом. Предположим, что в прямоугольнике $\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}P_i$ решение уравнения (2.7) определено. Значения $\tilde{z}$ и $\tilde{z}_y$ на прямой $y=\eta_{m-1}$

$$\tilde{z}|_{y=\eta_{m-1}}=\tilde{z}_{m-1},\quad \tilde{z}_y|_{y=\eta_{m-1}}=\tilde{q}_{m-1} \tag{2.10}$$

примем за начальные данные для уравнения (2.6) на P_m. Угловой коэффициент прямолинейных характеристических проекций на P_m определим из условий

$$\tilde{k}_m=\tilde{k}_m(\xi)=-\frac{\tilde{s}_{m-1}}{\tilde{r}_{m-1}+\alpha_m},\quad \text{где}\quad \tilde{s}_{m-1}=\tilde{z}_{xy}|_{y=\eta_{m-1}},\quad \tilde{r}_{m-1}=\tilde{z}_{xx}|_{y=\eta_{m-1}}. \tag{2.11}$$

Выполнение на $[\xi_1,\xi_2]$ неравенства

$$|\tilde{k}_m'|\leqslant\frac{1}{h} \tag{2.12}$$

гарантирует существование решение уравнения (2.6), (2.10) на P_m. Докажем, что решение $\tilde z$ на P_m будет C^1-гладким продолжением решения $\tilde z$, определённого на $P_m - 1$.

Лемма 2.1. *Пусть решение $\tilde z$ уравнения (2.7)—(2.9) вместе со своими производными $\tilde p$, $\tilde q$, $\tilde r$, $\tilde s$ и вспомогательной функцией $\tilde J$ определены и непрерывны на $\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} P_i$. Тогда при выполнении неравенства (2.12) существует непрерывное продолжение этих функций на P_m, определяемое посредством следующих формул для $m = 1, 2, \dots, n$:*

$$\tilde x = \tilde x_{m-1} + \tilde k_m(y - \eta_{m-1}), \quad \tilde y = \eta, \tag{2.13}$$

$$\tilde z = \tilde z(\xi,\eta) = \tilde z_{m-1} + \frac{\partial \tilde z_{m-1}}{\partial\eta}(\eta - \eta_{m-1}) - (\alpha_m \tilde k_m^2 + \beta_m)\frac{(\eta-\eta_{m-1})^2}{2}, \tag{2.14}$$

$$\tilde p = \tilde p(\xi,\eta) = \tilde p_{m-1} - \alpha_m \tilde k_m(\eta - \eta_{m-1}), \tag{2.15}$$

$$\tilde q = \tilde q(\xi,\eta) = \tilde q_{m-1} - \beta_m(\eta - \eta_{m-1}), \tag{2.16}$$

$$\tilde r = \tilde r(\xi,\eta) = -\alpha_m + \frac{\tilde J_{m-1}}{\tilde J}(\tilde r_{m-1} + \alpha_m), \tag{2.17}$$

$$\tilde s = \tilde s(\xi,\eta) = \frac{\tilde J_{m-1}}{\tilde J}\tilde s_{m-1}, \tag{2.18}$$

$$\tilde J = \tilde J(\xi,\eta) = \tilde J_{m-1} + \tilde k_m'(\eta - \eta_{m-1}), \tag{2.19}$$

$$\tilde k_m = \tilde k_{m-1}\frac{\tilde r_{m-1} + \alpha_{m-1}}{\tilde r_{m-1} + \alpha_m}, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \tilde z_{m-1}}{\partial\eta} = \tilde p_{m-1}\tilde k_m + \tilde q_{m-1}, \tag{2.21}$$

где

$$\tilde z_{m-1} = \tilde z(\xi,\eta_{m-1}), \quad \tilde p_{m-1} = \tilde p(\xi,\eta_{m-1}), \quad \tilde q_{m-1} = \tilde q(\xi,\eta_{m-1}),$$
$$\tilde r_{m-1} = \tilde r(\xi,\eta_{m-1}), \quad \tilde s_{m-1} = \tilde s(\xi,\eta_{m-1}), \quad \tilde J_{m-1} = \tilde J(\xi,\eta_{m-1}), \quad \tilde k_m = \tilde k_m(\xi),$$
$$\frac{\partial \tilde z_{m-1}}{\partial\eta} = \frac{\partial \tilde z_{m-1}(\xi)}{\partial\eta}, \quad \tilde k_0 = k_0 = -\frac{s_0}{r_0+\alpha_0}, \quad \tilde z_0 = z_0, \quad \tilde p_0 = p_0 = z_0',$$
$$\tilde q_0 = q_0, \quad \tilde r_0 = r_0 = z_0'', \quad \tilde s_0 = s_0 = q_0', \quad \tilde J_0 = 1, \quad \alpha_0 = a_0 = a(0).$$

Доказательство. Как уже указывалось в (2.11), угловой коэффициент $\tilde k_1$ на P_1 определяется по формуле $\tilde k_1 = -\frac{s_0}{r_0+\alpha_1}$, а $\tilde k_0 = -\frac{s_0}{r_0+\alpha_0}$. Исключим s_0, тогда $\tilde k_1 = \tilde k_0\frac{r_0+a_0}{r_0+\alpha_1}$, что определяет (2.20) при $m = 1$.

Характеристические проекции $\tilde\chi_\xi$ решения $\tilde z$ на P_1 — $\tilde\chi_{\xi,1}$ — задаются отрезками прямых $x = \xi + \tilde k_1 y$, где $0 \leqslant y \leqslant \eta_1$. Тогда якобиан $\tilde J$ на P_1 определяется из (1.21) как $\tilde J = 1 + \tilde k_1' y$, что даёт (2.19) при $m = 1$. Решение на P_1 определяется посредством формулы (1.9):

$$\tilde z = z_0 + (p_0\tilde k_1 + q_0)\eta - (\alpha_1\tilde k_1^2 + \beta_1)\frac{\eta^2}{2} = z_0 + \frac{\partial \tilde z_0}{\partial\eta}\eta - (\alpha_1\tilde k_1^2 + \beta_1)\frac{\eta^2}{2},$$

а производные $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ при интегрировании (1.7) вдоль характеристических проекций $\tilde{\chi}_{\xi,1}$ — формулами

$$\tilde{p} = p_0 - \alpha_1 \tilde{k}_1 y, \quad \tilde{q} = q_0 - \beta_1 y.$$

Таким образом, получены формулы (2.14)—(2.16) для $m = 1$. Из (1.25) следует, что на P_1 имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{J}(\tilde{r} + \alpha_1)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{J}\tilde{s}) = 0.$$

Интегрируя их вдоль характеристик, получаем формулы (2.17), (2.18) при $m = 1$.

Построим решение $\tilde{z}$ уравнения (2.6) на P_m, предполагая, что на $\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} P_i$ $\tilde{z}$ уже построено. Тогда на прямой $y = \eta_{m-1}$ определены функции $\tilde{z}_{m-1}$, $\tilde{q}_{m-1}$, которые возьмём за начальные условия уравнения (2.6) на P_m, а также функции $\tilde{p}_{m-1}$, $\tilde{r}_{m-1}$, $\tilde{s}_{m-1}$, $\tilde{J}_{m-1}$ и $\tilde{k}_{m-1}$. Поскольку характеристическая проекция $\tilde{\chi}_{\xi,m-1}$ решения $\tilde{z}$ на P_{m-1} представляет собой отрезок прямой, то угловой коэффициент постоянен вдоль $\tilde{\chi}_{\xi,m-1}$, т. е.

$$\tilde{k}_{m-1} = -\frac{\tilde{s}_{m-2}}{\tilde{r}_{m-2} + \alpha_{m-1}} = -\frac{\tilde{s}_{m-1}}{\tilde{r}_{m-1} + \alpha_{m-1}}.$$

Угловой коэффициент $\tilde{k}_m$ на P_m определяется условием (2.11), исключив из которого $\tilde{s}_{m-1} = -\tilde{k}_{m-1}(\tilde{r}_{m-1} + \alpha_{m-1})$, получаем (2.20).

Характеристические проекции $\tilde{\chi}_{\xi,m}$ на P_m определяются из (1.19) уравнением (2.13), тогда якобиан $\tilde{J}$ на P_m находим, следуя (1.20), (1.21), (2.19).

Решение $\tilde{z}$ на P_m определяется посредством формулы (1.9):

$$\tilde{z} = \tilde{z}_{m-1} + (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_m + \tilde{q}_{m-1})(y - \eta_{m-1}) - (\alpha_m \tilde{k}_m^2 + \beta_m)\frac{(y - \eta_{m-1})^2}{2},$$

которая при замене (2.21) преобразуется к виду (2.14). Производные $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ при интегрировании (1.7) вдоль характеристических проекций $\tilde{\chi}_{\xi,m}$ определяются формулами (2.15), (2.16), а производные $\tilde{r}$ и $\tilde{s}$ при интегрировании равенств (1.25), где $a = \alpha_m$, $b = \beta_m$, вдоль характеристических проекций представляются в виде (2.17), (2.18). Лемма 2.1 доказана.

Из формул (2.17), (2.20), (2.21) видно, что $\tilde{k}_m$ вычисляется сначала через $\tilde{k}'_{m-1}$, затем через $\tilde{k}''_{m-2}$ и так далее до $\tilde{k}_0^{(m)} = k_0^{(m)}$. Наличие производной любого порядка функции k_0 гарантируется условиями (2.9). Следовательно, функции (2.13)—(2.21) принадлежат классу $C^\infty([\xi_1, \xi_2])$ по ξ. Заметим также, что функции (2.13)—(2.19) непрерывны по η на $[0, \gamma]$, а функции (2.20), (2.21) кусочно-постоянны при фиксированном ξ. Учитывая свойства отображения (1.17), приходим к выводу о непрерывном продолжении решения $\tilde{z}$, его производных $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$, $\tilde{s}$ и функции $\tilde{J}$ на P_m.

Лемма 2.2. *Предположим, что на* $\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} P_i$ *согласно лемме* 2.1 *построено решение* $\tilde z$ *уравнения* (2.7)—(2.9) *вместе с производными* $\tilde p$, $\tilde q$, $\tilde r$, $\tilde s$ *и вспомогательными функциями* $\tilde J$, $\tilde k$. *Тогда функция* $\tilde J\tilde k(\tilde r+\alpha)$ *определена и постоянна вдоль характеристической проекции* $\tilde\chi_\xi$, *и значит, для* $m=1,2,\dots,n$ *выполняется равенство*

$$\tilde J_m\tilde k_m(\tilde r_m+\alpha_m)=k_0(r_0+\alpha_0). \tag{2.22}$$

Доказательство. Установим сначала, что функция $\tilde J\tilde k(\tilde r+\alpha)$ постоянна вдоль каждого отрезка ломаной $\tilde\chi_\xi$, т. е.

$$\frac{\partial(\tilde J\tilde k(\tilde r+\alpha_m))}{\partial\eta}=0$$

на P_m $(m=1,2,\dots,n)$. Это утверждение следует из формул (1.24), (1.25), которые для уравнения (2.6) на P_m примут вид

$$\frac{\partial\tilde k}{\partial\eta}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\eta}(\tilde J(\tilde r+\alpha_m))=0.$$

Таким образом,

$$\tilde J\tilde k(\tilde r+\alpha_m)=C_m$$

вдоль каждого отрезка ломаной $\tilde\chi_{\xi,m}$, где C_m — постоянная.

Докажем теперь, что $C_m=C_{m-1}$. Из формулы (2.17) при $\eta=\eta_m$ следует, что

$$\tilde J_m(\tilde r_m+\alpha_m)=\tilde J_{m-1}(\tilde r_{m-1}+\alpha_m).$$

Умножим обе части последнего равенства на $\tilde k_m$ и применим формулу (2.20), тогда

$$\tilde J_m\tilde k_m(\tilde r_m+\alpha_m)=\tilde J_{m-1}\tilde k_{m-1}(\tilde r_{m-1}+\alpha_{m-1}),$$

что доказывает лемму.

Теорема 3. *Численные значения* C^1*-гладкого решения* $\tilde z$ *уравнения* (2.7)—(2.9) *с непрерывными вторыми производными* $\tilde r$, $\tilde s$, *определённого на* T *в виде вектор-функции* $\{\tilde x,\tilde y,\tilde z\}$ *характеристических координат, вычисляется вдоль кусочно-линейных характеристических проекций* $\tilde\chi_\xi$ *последовательно на прямых* $\eta=\eta_m\cap P$ *для* $m=1,2,\dots,n$ *по рекуррентным формулам*

$$\tilde x_m=\tilde x_{m-1}+\tilde k_m h,\quad \tilde y_m=mh, \tag{2.23}$$

$$\tilde z_m=\tilde z_{m-1}+\frac{\partial\tilde z_{m-1}}{\partial\eta}h-(\alpha_m\tilde k_m^2+\beta_m)\frac{h^2}{2}, \tag{2.24}$$

где

$$\frac{\partial \tilde z_m}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde z_{m-1}}{\partial \eta} - (\alpha_m \tilde k_m^2 + \beta_m)h, \tag{2.25}$$

$$\tilde k_m = \begin{cases} \frac{\tilde k_{m-1} k_0 (r_0 + a_0)}{k_0(r_0+a_0) + \tilde k_{m-1} \tilde J_{m-1}(\alpha_m - \alpha_{m-1})}, & \text{если } k_0 \neq 0, \\ 0, & \text{если } k_0 = 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\tilde J_m = \tilde J_{m-1} + \tilde k_m' h, \tag{2.27}$$

в предположении, что $\tilde k_m'$ является равномерно ограниченной (см. (2.11)) *в каждом прямоугольнике P_m.*

Доказательство. В условиях теоремы 3 характеристическая проекция $\tilde\chi_\xi$ представляет собой непрерывную ломаную линию, состоящую из отрезков прямых, определяемых на P_m уравнением (2.13). Координаты $(\tilde x_m, \tilde y_m)$ точки пересечения $\tilde\chi_\xi$ с прямой $y = \eta_m$ определяются формулами (2.23).

Формулы (2.23)—(2.25) получаем при $\eta = \eta_m$ непосредственно из аналогичных формул, полученных в лемме 2.1. Если $\tilde k_0 = 0$, то из формулы (2.20) следует, что $\tilde k_1 = \tilde k_2 = \ldots = \tilde k_n = 0$.

Преобразуем выражение (2.20), предполагая, что $\tilde k_0 \neq 0$, тогда

$$\tilde k_m = \frac{\tilde k_{m-1}}{1 + \frac{\alpha_{m-1} - \alpha_m}{\tilde r_{m-1} + \alpha_{m-1}}} = \frac{\tilde k_{m-1}(\tilde k_{m-1} \tilde J_{m-1}(\tilde r_{m-1} + \alpha_{m-1}))}{\tilde k_{m-1} \tilde J_{m-1}(\tilde r_{m-1} + \alpha_{m-1}) + \tilde k_{m-1} \tilde J_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_{m-1})},$$

откуда с учётом равенства (2.22), установленного в лемме 2.2, получаем формулу (2.26). Теорема 3 доказана.

Будем предполагать, что условия теоремы 3 выполняются для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$. Через S_n обозначим поверхность, являющуюся графиком C^1-гладкого решения $\tilde z = \tilde z_{(n)}$ уравнения с кусочно-гладкими коэффициентами (2.7)—(2.9), построенного в теореме 3.

Напомним, что $\tilde k_m = \tilde k_{m,n}(\xi)$ — угловые коэффициенты кусочно-линейных характеристических проекций $\tilde\chi_{\xi,m}$ решения $\tilde z_{(n)}$, определённые в прямоугольниках $P_{m,n}$.

Пусть θ — множество нулей функции k_0 на $[\xi_1, \xi_2]$, $P_\theta = \theta \times [0, \gamma]$. Укажем условия, достаточные для сходимости аппроксимирующего семейства поверхностей $\{S_n\}$ к поверхности S, являющейся графиком решения $z = z(x, y)$ уравнения (2.1)—(2.3).

Теорема 4. *Предположим, что для начальных данных* (2.2) *уравнения* (2.1) *с коэффициентами $a'(y), b(y) \in C([0, \gamma])$ выполняются условия* (2.3), *функциональные последовательности $\left\{\frac{\tilde k_{m,n}}{k_0}\right\}$, $\left\{\left(\frac{\tilde k_{m,n}}{k_0}\right)'\right\}$ являются равномерно ограниченными на $P \setminus P_\theta$, а последовательность $\{\tilde k_{m,n}''\}$ является равномерно ограниченной на P для любого разбиения* (2.4). *Тогда при подборе коэффициентов $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$* (см. (2.8)) *уравнения* (2.7) *таким образом, что*

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + a'_{m-1}h + o(h), \quad \alpha_0 = a_0, \tag{2.28}$$

$$\beta_m = \beta_{m-1} + \frac{o(h)}{h}, \qquad \beta_0 = b_0 \tag{2.29}$$

при $m = 1, 2, \ldots, n$, семейство поверхностей $\{S_n\}$ при $n \to \infty$ будет сходиться к поверхности S, являющейся графиком C^2-гладкого решения уравнения (2.1)—(2.3). *Здесь $b_0 = b(0)$, $a'_m = a'_{m,n} = a'(y)|_{y=\eta_m}$.*

Доказательство теоремы 4 приведено в разделе 5.

3. Рекуррентные формулы для параболического уравнения Монжа—Ампера

В этом разделе будут получены формулы для выражения решения z уравнения (2.1), (2.2) и других связанных с ним функций, взятых на прямой $y = \eta_m$, через значения решения z и этих функций на прямой $y = \eta_{m-1}$. Пусть $x_m = x_m(\xi)$ — точка пересечения характеристики с прямой $y = \eta_m$, тогда

$$x_m = x_{m-1} + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} k\,d\eta. \tag{3.1}$$

Введём следующие обозначения:

$$a_m = a(\eta_m), \quad k_m = k(\xi, \eta_m), \quad J_m = J(\xi, \eta_m), \quad z_m = z(x_m, \eta_m),$$
$$p_m = p(x_m, \eta_m), \quad q_m = q(x_m, \eta_m), \quad r_m = r(x_m, \eta_m),$$
$$s_m = s(x_m, \eta_m), \quad t_m = t(x_m, \eta_m), \quad \frac{\partial z_m}{\partial \eta} = \frac{\partial z(x_m, \eta_m)}{\partial \eta}.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть J, k — вспомогательные функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений* (1.27) *в условиях теоремы 2 при $a = a(y)$, $b = b(y)$, причём существует непрерывная производная $\frac{\partial k}{\partial \eta}$. Тогда функция $Jk(r + a)$ постоянна вдоль характеристических проекций в своей области определения, в частности $J_m k_m(r_m + a_m) = k_0(r_0 + a_0)$ при $m = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. При $a = a(y)$, $b = b(y)$ формулы (1.24), (1.25) примут вид

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = -\frac{k a'_y}{r + a}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(J(r + a)) = J a'_y, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(Js) = 0.$$

Но тогда

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(Jk(r + a)) = k\frac{\partial}{\partial \eta}(J(r + a)) + J(r + a)\frac{\partial k}{\partial \eta} = kJa'_y + J(r + a)\left(-\frac{k a'_y}{r + a}\right) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.2. *В условиях леммы* 3.1 *для вспомогательных функций* J *и* k *при* $m = 1, 2, \ldots, n$ *справедливы равенства*

$$J_m = J_{m-1} + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} k'_\xi \, d\eta, \tag{3.2}$$

$$k_m = \frac{k_{m-1} k_0 (r_0 + a_0)}{k_0 (r_0 + a_0) + k_{m-1} \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} a'(\eta) J(\xi, \eta) \, d\eta}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Поскольку по (1.20), (1.21)

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = \frac{\partial k}{\partial \xi},$$

то якобиан J на P_m может быть найден по формуле

$$J = J_{m-1} + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} k'_\xi \, d\eta,$$

которая при $\eta = \eta_m$ примет вид (3.2). Для доказательства (3.3) будем исходить из уравнения (1.27) при $b'_x \equiv 0$. Тогда

$$k_m = \frac{k_0 (r_0 + a_0)}{(r_0 + a_0) + \int\limits_0^{\eta_m} a' J \, d\eta}, \quad k_{m-1} = \frac{k_0 (r_0 + a_0)}{(r_0 + a_0) + \int\limits_0^{\eta_{m-1}} a' J \, d\eta}.$$

Найдём разность $k_m - k_{m-1}$:

$$k_m - k_{m-1} = -\frac{k_m k_{m-1}}{k_0 (r_0 + a_0)} \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} a' J \, d\eta. \tag{3.4}$$

Формула (3.3) следует непосредственно из (3.4).

Лемма 3.3. *В условиях леммы* 3.1 *для решения* z *и производных* $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, p, q *при* $m = 1, 2, \ldots, n$ *справедливы равенства*

$$z_m = z_{m-1} + \frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} h + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} (kp - k_{m-1} p_{m-1}) \, d\eta - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} b(\eta) \, d\eta, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial \eta} = \frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} + (k_m p_m - k_{m-1} p_{m-1}) - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} b(\eta) \, d\eta, \tag{3.6}$$

$$p_m = p_{m-1} - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} a(\eta) k \, d\eta, \quad q_m = q_{m-1} - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} b(\eta) \, d\eta. \tag{3.7}$$

Доказательство. Из (1.31) следует, что в P_m функцию z можно представить как

$$z = z_{m-1} + p_{m-1} \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} k\, d\eta + q_{m-1}(\eta - \eta_{m-1}) - \\ - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} k\, d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} a(\mu) k\, d\mu - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} b(\mu)\, d\mu. \quad (3.8)$$

Учитывая (1.28), производные p и q можем записать в виде

$$p = p_{m-1} - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} a(\mu) k\, d\mu, \quad q = q_{m-1} - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} b(\mu)\, d\mu. \quad (3.9)$$

Напомним, что в силу (1.22)

$$\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} = k_{m-1} p_{m-1} + q_{m-1}. \quad (3.10)$$

Преобразуем формулу (3.8):

$$z = z_{m-1} + (k_{m-1} p_{m-1} + q_{m-1})(\eta - \eta_{m-1}) + \\ + p_{m-1} \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (k - k_{m-1})\, d\eta - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} k\, d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} ak\, dy - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} b\, dy.$$

При помощи (3.9), (3.10) упростим последнее выражение:

$$z = z_{m-1} + \frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta}(\eta - \eta_{m-1}) + \\ + p_{m-1} \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (k - k_{m-1})\, d\eta + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} k(p - p_{m-1})\, d\eta - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} b\, dy.$$

Значит,

$$z = z_{m-1} + \frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta}(\eta - \eta_{m-1}) + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (kp - k_{m-1} p_{m-1})\, d\eta - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} d\zeta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\zeta} b\, dy. \quad (3.11)$$

Продифференцируем обе части (3.10) по η:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} + (kp - k_{m-1} p_{m-1}) - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} b(y)\, dy. \quad (3.12)$$

Подставив в (3.9), (3.11), (3.12) $\eta = \eta_m$, получим искомые равенства (3.5)—(3.7).

4. Оценка разностей

Лемма 4.1. *В условиях теорем 2 и 3 будем полагать, что существует непрерывная производная* $\frac{\partial k}{\partial \eta}$*, тогда разности* $z_m - \tilde{z}_m$ *и* $\frac{\partial z_m}{\partial \eta} - (\tilde{p}_m \tilde{k}_m + \tilde{q}_m)$*, взятые в точке* (ξ, η_m)*, вычисляются по рекуррентным формулам*

$$
\begin{aligned}
z_m - \tilde{z}_m &= (z_{m-1} - \tilde{z}_{m-1}) + \left(\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} - (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1})\right) h + \\
&+ \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \left[kp - k_{m-1}p_{m-1} - \frac{\partial}{\partial \eta}(k_{m-1}p_{m-1})(\eta - \eta_{m-1})\right] d\eta + \\
&+ \left[p_{m-1}\frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h - \tilde{p}_{m-1}(\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1})\right] h - p_{m-1}\frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta}\frac{h^2}{2} + \\
&+ (\alpha_m \tilde{k}_m^2 - a_{m-1}k_{m-1}^2)\frac{h^2}{2} - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} d\eta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (b - \beta_m)\, d\zeta,
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z_m}{\partial \eta} - (\tilde{p}_m \tilde{k}_m + \tilde{q}_m) &= \left(\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} - (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1})\right) + \\
&+ \left[k_m p_m - k_{m-1}p_{m-1} - \frac{\partial}{\partial \eta}(k_{m-1}p_{m-1})h\right] + \\
&+ \left[p_{m-1}\frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h - \tilde{p}_{m-1}(\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1})\right] + \\
&+ (\alpha_m \tilde{k}_m^2 - a_{m-1}k_{m-1}^2)h - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} (b - \beta_m)\, d\eta.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Доказательство. Учитывая (2.21), представим формулы (2.14)—(2.16) в виде

$$
\tilde{z}_m = \tilde{z}_{m-1} + (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1})h + \tilde{p}_{m-1}(\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1})h - (\alpha_m \tilde{k}_m^2 + \beta_m)\frac{h^2}{2}, \tag{4.3}
$$

$$
\tilde{p}_m \tilde{k}_m + \tilde{q}_m = (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1}) + \tilde{p}_{m-1}(\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1}) - (\alpha_m \tilde{k}_m^2 + \beta_m)h. \tag{4.4}
$$

Вычтем из (3.5) формулу (4.3):

$$
\begin{aligned}
z_m - \tilde{z}_m &= (z_{m-1} - \tilde{z}_{m-1}) + \left(\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} - (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1})\right) h - \\
&- \tilde{p}_{m-1}(\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1})h + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} [kp - k_{m-1}p_{m-1}]\, d\eta + \\
&+ \alpha_m \tilde{k}_m^2 \frac{h^2}{2} - \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} d\eta \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (b(\zeta) - \beta_m)\, d\zeta.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Продифференцировав по η (3.9), при $\eta = \eta_{m-1}$ получаем

$$\frac{\partial p_{m-1}}{\partial \eta} = -a_{m-1} k_{m-1}.$$

Записав это равенство в виде

$$\left(k_{m-1} \frac{\partial p_{m-1}}{\partial \eta} + a_{m-1} k_{m-1}^2 \right) \frac{h^2}{2} \equiv 0$$

и вычтя его из (4.5), получаем (4.1).

Формула (4.5) получается аналогично при вычитании из (3.6) выражения (4.4) и тождества

$$\left(k_{m-1} \frac{\partial p_{m-1}}{\partial \eta} + a_{m-1} k_{m-1}^2 \right) h \equiv 0.$$

Лемма 4.1 доказана.

Введём обозначения

$$\varepsilon_m = \left| p_{m-1} \frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h - \tilde{p}_{m-1} (\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1}) \right|, \tag{4.6}$$

$$\delta_m = |\alpha_m \tilde{k}_m^2 - a_{m-1} k_{m-1}^2|, \tag{4.7}$$

$$\gamma_m = \max_{P_m} |\beta_m - b_{m-1}|, \tag{4.8}$$

где $m = 1, 2, \ldots, n$. Выведем некоторые оценки.

Лемма 4.2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 4.1 *и*

$$\varepsilon_m = o(h), \quad \delta_m = \frac{o(h)}{h}, \quad \zeta_m = \frac{o(h)}{h}. \tag{4.9}$$

Тогда

$$z_m - \tilde{z}_m = \frac{o(h)}{h}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Поскольку в условиях теоремы 2 $k \in C^1$ и, значит, $z \in C^2$, то на любом прямоугольнике P_m

$$kp - k_{m-1} p_{m-1} - \frac{\partial}{\partial \eta} (k_{m-1} p_{m-1})(\eta - \eta_{m-1}) = o(\eta - \eta_{m-1}),$$

$$\int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \left[kp - k_{m-1} p_{m-1} - \frac{\partial}{\partial \eta} (k_{m-1} p_{m-1})(\eta - \eta_{m-1}) \right] d\eta = o(h^2).$$

Кроме того, поскольку функция $p \frac{\partial k}{\partial \eta}$ непрерывна на P, можем определить постоянную $\mu \geqslant 0$ как

$$\mu = \max_P \left| p \frac{\partial k}{\partial \eta} \right|.$$

Оценим разности (4.1), (4.2), используя последние оценки и обозначения (4.6)—(4.8):

$$|z_m - \tilde{z}_m| \leqslant |z_{m-1} - \tilde{z}_{m-1}| + \left|\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} - (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1})\right| h + \\ + \mu\frac{h^2}{2} + \varepsilon_m h + \delta_m \frac{h^2}{2} + \zeta_m \frac{h^2}{2} + o(h^2),$$

$$\left|\frac{\partial z_m}{\partial \eta} - (\tilde{p}_m\tilde{k}_m + \tilde{q}_m)\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\frac{\partial z_{m-1}}{\partial \eta} - (\tilde{p}_{m-1}\tilde{k}_{m-1} + \tilde{q}_{m-1})\right| + \varepsilon_m + \delta_m h + \zeta_m h + o(h).$$

Исключим из правых частей первого неравенства разности вида $|z_i - \tilde{z}_i|$, из второго — вида $\left|\frac{\partial z_i}{\partial \eta} - (\tilde{p}_i\tilde{k}_i + \tilde{q}_i)\right|$, тогда

$$|z_m - \tilde{z}_m| \leqslant \\ \leqslant h\sum_{i=1}^{m-1}\left|\frac{\partial z_i}{\partial \eta} - (\tilde{p}_i\tilde{k}_i + \tilde{q}_i)\right| + \mu m\frac{h^2}{2} + \sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon_i h + \delta_i\frac{h^2}{2} + \zeta_i\frac{h^2}{2}\right) + m\cdot o(h^2),$$

$$\left|\frac{\partial z_m}{\partial \eta} - (\tilde{p}_m\tilde{k}_m + \tilde{q}_m)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m}(\varepsilon_i + \delta_i h + \zeta_i h) + m\cdot o(h).$$

Исключим теперь из первого неравенства разности вида $\left|\frac{\partial z_i}{\partial \eta} - (\tilde{p}_i\tilde{k}_i + \tilde{q}_i)\right|$, тогда

$$|z_m - \tilde{z}_m| \leqslant h\sum_{i=1}^{m-1}\left[\sum_{j=1}^{i}(\varepsilon_j + \delta_j h + \zeta_j h) + i\cdot o(h)\right] + h\sum_{i=1}^{m-1}\left(\varepsilon_j + \frac{1}{2}\delta_j h + \frac{1}{2}\zeta_j h\right) + o(h),$$

откуда в предположении (4.9) леммы следует (4.10).

Лемма 4.3. *Предположим, что выполнены условия леммы* 4.1, $a = a(y)$, $b = b(y)$ *и* α_m, β_m *определяются из условий* (2.28), (2.29). *Тогда если последовательности* $\{\tilde{k}_m\}$ *и* $\{\tilde{k}'_m\}$ *являются равномерно ограниченными для любого разбиения* (2.4) *и*

$$\tilde{k}_m - k_m = \frac{o(h)}{h}, \quad \tilde{k}'_m - \frac{\partial k_m}{\partial \xi} = \frac{o(h)}{h}, \tag{4.11}$$

то имеют место оценки (4.9).

Доказательство. Оценим сначала ε_{m-1}:

$$\varepsilon_{m-1} \leqslant \left|(p_{m-1} - \tilde{p}_{m-1})\frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta}\right| h + |\tilde{p}_{m-1}|\left|\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} - \frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta}h\right|,$$

следовательно, утверждение леммы будет выполнено, если

$$p_m - \tilde{p}_m = \frac{o(h)}{h}, \tag{4.12}$$

$$\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} - \frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h = o(h). \tag{4.13}$$

Применим рекуррентные формулы (3.7), (2.15) к разности $p_m - \tilde{p}_m$, тогда

$$\tilde{p}_m = p_{m-1} - \tilde{p}_{m-1} - \Bigg(\int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} ak\, d\eta - \alpha_m \tilde{k}_m h \Bigg) = -\sum_{i=1}^{m} \Bigg(\int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} ak\, d\eta - \alpha_i \tilde{k}_i h \Bigg) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (ak - a_i k_i)\, d\eta - \sum_{i=1}^{m} (a_i k_i - \alpha_i \tilde{k}_i) h. \tag{4.14}$$

В условиях леммы $ak - a_i k_i = \frac{o(h)}{h}$ на P_i, и значит,

$$\int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (ak - a_i k_i)\, d\eta = o(h). \tag{4.15}$$

Оценим разность $a_i - \alpha_i$ исходя из гладкости коэффициента a и условия (2.28):

$$\alpha_i - a_i = (\alpha_{i-1} + a'_{i-1} h + o(h)) - (a_{i-1} + a_{i-1} h + o(h)) =$$

$$= (\alpha_{i-1} - a_{i-1}) + o(h) = \frac{o(h)}{h}, \tag{4.16}$$

тогда разность $a_i k_i - \alpha_i \tilde{k}_i$, представленная в виде $(a_i - \alpha_i) k_i + \alpha_i (k_i - \tilde{k}_i)$, с учётом (4.16), (4.11) и ограниченности k на P оценивается как

$$a_i k_i - \alpha_i \tilde{k}_i = \frac{o(h)}{h}. \tag{4.17}$$

Подставляя (4.15), (4.17) в (4.14), получаем оценку (4.12).

Преобразуем выражение

$$\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} - \frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h,$$

заменив разность $\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1}$ исходя из равенств (2.20), (2.17), а производную $\frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta}$ — из системы (1.32). Тогда при $k_0 \neq 0$

$$\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} = \tilde{k}_{m-1} \frac{\tilde{r}_{m-1} + \alpha_{m-1}}{\tilde{r}_{m-1} + \alpha_m} - \tilde{k}_{m-1} =$$

$$= \tilde{k}_{m-1} \frac{\tilde{J}_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m)}{\tilde{J}_{m-1}(\tilde{r}_{m-1} + \alpha_m)} = \tilde{k}_{m-1} \tilde{k}_m \frac{\tilde{J}_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m)}{\tilde{J}_m \tilde{k}_m (\tilde{r}_m + \alpha_m)},$$

учитывая результат (2.22) леммы 2.2, получаем

$$\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} = \tilde{k}_{m-1} \tilde{k}_m \frac{\tilde{J}_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m)}{k_0 (r_0 + \alpha_0)},$$

и следовательно,

$$\tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} - \frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h = -\tilde{k}_{m-1}\tilde{k}_m \frac{\tilde{J}_{m-1}(\alpha_m - \alpha_{m-1})}{k_0(r_0+\alpha_0)} + k_{m-1}^2 \frac{J_{m-1}a'_{m-1}}{k_0(r_0+\alpha_0)} h,$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_m - \tilde{k}_{m-1} - \frac{\partial k_{m-1}}{\partial \eta} h &= \\ &= -s_0^{-1}[(k_{m-1} - \tilde{k}_{m-1})k_{m-1}J_{m-1}a'_{m-1}h + \tilde{k}_{m-1}(k_{m-1} - \tilde{k}_m)J_{m-1}a'_{m-1}h] - \\ &- s_0^{-1}[\tilde{k}_{m-1}\tilde{k}_m(J_{m-1} - \tilde{J}_{m-1})a'_{m-1}h + \tilde{k}_{m-1}\tilde{k}_m\tilde{J}_{m-1}(\alpha_m - \alpha_{m-1} - a'_{m-1}h)]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Покажем, что каждое слагаемое (4.18) оценивается как $o(h)$. Заметим, что функции k, J и a' являются ограниченными, поскольку они непрерывны на замкнутом множестве P; равномерная ограниченность $\{\tilde{k}_m\}$ требуется в условии леммы, а равномерная ограниченность $\tilde{J}_m$ следует из требования равномерной ограниченности последовательности $\{\tilde{k}'_m\}$. Тогда в силу (4.11)

$$(k_{m-1} - \tilde{k}_{m-1})k_{m-1}J_{m-1}a'_{m-1}h = o(h), \tag{4.19}$$

$$\tilde{k}_{m-1}(k_{m-1} - \tilde{k}_m)J_{m-1}a'_{m-1}h = o(h). \tag{4.20}$$

Оценим теперь разность $J_m - \tilde{J}_m$. Из (3.2) и (2.19) следует, что

$$\begin{aligned} J_m - \tilde{J}_m &= (J_{m-1} - \tilde{J}_{m-1}) + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \frac{\partial k}{\partial \xi}\, d\eta - \tilde{k}'_m h = \\ &= (J_{m-1} - \tilde{J}_{m-1}) + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial k_m}{\partial \xi}\right) d\eta + \left(\frac{\partial k_m}{\partial \xi} - \tilde{k}'\right) h, \end{aligned}$$

$$J_m - \tilde{J}_m = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial k_i}{\partial \xi}\right) d\eta + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial k_i}{\partial \xi} - \tilde{k}'\right) h. \tag{4.21}$$

Напомним, что $k \in C^1$, следовательно,

$$\frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial k_i}{\partial \xi} = \frac{o(h)}{h}$$

на P_i,

$$\int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial k_i}{\partial \xi}\right) d\eta = o(h)$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial k_i}{\partial \xi}\right) d\eta = \frac{o(h)}{h}.$$

Подставляя последнюю оценку, а также вторую из оценок (4.11) в (4.21), получаем

$$J_m - \tilde{J}_m = \frac{o(h)}{h},$$

следовательно,

$$\tilde{k}_{m-1}\tilde{k}_m(J_{m-1} - \tilde{J}_{m-1})a'_{m-1}h = o(h). \tag{4.22}$$

При помощи (4.16) получаем оценку последнего слагаемого из (4.18):

$$\tilde{k}_{m-1}\tilde{k}_m\tilde{J}_{m-1}(\alpha_m - \alpha_{m-1} - a'_{m-1}h) = o(h). \tag{4.23}$$

Подставив (4.19), (4.20), (4.22), (4.23) в (4.18), получим искомую оценку (4.13), следовательно, оценка $\varepsilon_m = o(h)$ доказана.

Перейдём к доказательству условия $\delta_m = \frac{o(h)}{h}$. Из (4.7) следует, что

$$\delta_{m-1} = |\alpha_m\tilde{k}_m^2 - a_{m-1}k_{m-1}^2| \leqslant \tilde{k}_m^2|\alpha_m - a_{m-1}| + |a_{m-1}|\,|\tilde{k}_m^2 - k_{m-1}^2| \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{k}_m^2|\alpha_m - a_m| + \tilde{k}_m^2|a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1}|\,|\tilde{k}_m - k_m|\,|\tilde{k}_m + k_m| + |a_{m-1}|\,|k_m^2 - k_{m-1}^2|.$$

Учитывая равномерную ограниченность $\{k_m\}$, первое слагаемое этого неравенства оцениваем из условия (4.12), второе из представления $a_m - a_{m-1} = a'_{m-1}h + o(h)$, для оценки третьего учтём ограниченность функции a_m на отрезке и (4.11), для последнего слагаемого получаем оценку

$$|a_{m-1}|\,|k_m^2 - k_{m-1}^2| \leqslant |a_{m-1}|\,|k_m + k_{m-1}| \cdot \max_{P_m}\frac{\partial k}{\partial \eta}h = \frac{o(h)}{h}.$$

Оценка $\delta_m = \frac{o(h)}{h}$ доказана. Оценка $\zeta_m = \frac{o(h)}{h}$ следует непосредственно из условия (2.29). Лемма 4.3 полностью доказана.

5. Условия, достаточные для сходимости аппроксимирующих поверхностей

Пусть вспомогательные функции для уравнения (2.1)—(2.3) k, J определены в $P = [\xi_1, \xi_2] \times [0, \gamma]$. Первое уравнение из интегродифференциальной системы уравнений (1.27), задающих k и J, при $a = a(y)$, $b = b(y)$ приобретает более простой вид:

$$k\left[1 + \frac{1}{r_0 + a_0}\int\limits_0^\eta a'J\,d\eta\right] = k_0, \tag{5.1}$$

где $a' = a'(y) \in C([0, \gamma])$, $k_0 = k_0(\xi) = -\frac{s_0}{r_0 + a_0}$, $r_0 = z''$, $s_0 = q'_0$ и $a_0 = a(0)$. Из (5.1) следует, что $k(\xi, \eta) = 0$ для всех $(\xi, \eta) \in P_\theta = \theta \times [0, \gamma]$. Напомним, что θ — множество нулей функции k_0 на $[\xi_1, \xi_2]$.

Будем считать, что

$$1 + \frac{1}{\varphi'' + a_0}\int\limits_0^\gamma a'J\,d\eta \neq 0$$

для всех $(\xi,\eta)\in P$. В противном случае можем уменьшить γ по модулю. Введём новую функцию

$$\nu=\nu(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{k}{k_0}, & \text{если } (\xi,\eta)\in P\setminus P_\theta,\\ \dfrac{1}{\frac{1}{\varphi''+a_0}\int\limits_0^\eta a'J\,d\eta}, & \text{если } (\xi,\eta)\in P_\theta.\end{cases}\tag{5.2}$$

Эта функция в силу (1.32), (1.33) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\nu}{\partial\eta}=-\dfrac{\nu^2Ja'}{z_0''+a_0},\\ \dfrac{\partial J}{\partial\eta}=\dfrac{\partial(k_0\nu)}{\partial\xi}\end{cases}\tag{5.3}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases}\nu(\xi,0)=1,\\ J(\xi,0)=1.\end{cases}\tag{5.4}$$

Заметим, что если ν, J — решение системы (5.3), (5.4), то k, J — решение системы (1.32), (1.33).

Будем искать приближённое решение системы (5.3), (5.4). Пусть (2.4) — разбиение прямоугольника P на n частей:

$$P=\bigcup_{m=1}^n P_{m,n},\quad \text{где}\quad P_{m,n}=[\eta_{m-1},\eta_m]\times[0,\gamma],\quad n=1,2,\ldots.$$

Система

$$\begin{cases}\tilde\nu_{m,n}=\tilde\nu_{m-1,n}-\dfrac{\tilde\nu_{m-1,n}\tilde\nu_{m,n}}{r_0+a_0}\tilde J_{m-1,n}(\alpha_{m,n}-\alpha_{m-1,n})h,\\ \tilde J_{m,n}=\tilde J_{m-1,n}+(\tilde\nu_{m,n}k_0)'h\end{cases}\tag{5.5}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases}\tilde\nu_{0,n}(\xi)=1,\\ \tilde J_{0,n}(\xi)=1\end{cases}\tag{5.6}$$

получается из системы (5.3), (5.4) заменой в $P_{m,n}$ производных по переменной η разностными отношениями

$$\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\approx\frac{\tilde\nu_{m,n}-\tilde\nu_{m-1,n}}{h},\quad \frac{\partial J}{\partial\eta}\approx\frac{\tilde J_{m,n}-\tilde J_{m-1,n}}{h},$$

а функций в правой части — приближёнными значениями

$$\nu^2\approx\tilde\nu_{m-1,n}\tilde\nu_{m,n},\quad J\approx\tilde J_{m-1,n},\quad a'\approx\alpha_m-\alpha_{m-1},\quad \nu k_0\approx\tilde\nu_{m,n}k_0.$$

Из первого уравнения (5.5) выразим $\tilde{\nu}_{m,n}$ через $\tilde{\nu}_{m-1,n}$:

$$\tilde{\nu}_{m,n} = \frac{\tilde{\nu}_{m-1,n}}{1 + \frac{\tilde{\nu}_{m-1,n}\tilde{J}_{m-1,n}(\alpha_{m,n}-\alpha_{m-1,n})}{r_0+a_0}h} =$$

$$= \frac{\tilde{\nu}_{m-1,n}(r_0 + a_0)}{(r_0 + a_0) + \tilde{\nu}_{m-1,n}\tilde{J}_{m-1,n}(\alpha_{m,n} - \alpha_{m-1,n})h}. \quad (5.7)$$

Достаточным условием для такого представления будет выполнение неравенства

$$\left|\tilde{\nu}_{m-1,n}\tilde{J}_{m-1,n}\frac{\alpha_{m,n} - \alpha_{m-1,n}}{r_0 + a_0}\right| < \frac{1}{h} = \frac{n}{\gamma}, \quad (5.8)$$

которое достигается при достаточно больших n при ограничениях на $\alpha_{m,n} - \alpha_{m-1,n}$ и $r_0 + a_0$ (например, (2.28) и (2.3)), а также условии (5.9) леммы 5.1.

Заметим, что при замене $\tilde{k}_m(\xi) = k_0(\xi)\tilde{\nu}_{m,n}(\xi)$, $\tilde{J}_m(\xi) = \tilde{J}_{m,n}(\xi)$ из формул (5.5)—(5.7) следуют рекуррентные формулы (2.26), (2.27).

Введём обозначения $\tilde{\nu}_{(n)} = \tilde{\nu}_{(n)}(\xi, \eta) = \tilde{\nu}_{m,n}(\xi)$, $\tilde{J}_{(n)} = \tilde{J}_{(n)}(\xi, \eta) = \tilde{J}_{m,n}(\xi)$ при $\eta_{m-1} < \eta < \eta_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 5.1. *Если функциональные последовательности*

$$\{\tilde{\nu}_{m,n}\}, \quad \{\tilde{\nu}'_{m,n}\}, \quad \{(k_0\tilde{\nu}_{m,n})''\} \quad (5.9)$$

являются равномерно ограниченными на P при $m = 1, 2, \ldots, n$ для любого разбиения (2.4), *то существуют подпоследовательности $\{\tilde{\nu}_{(n)}(\xi)\}$ и $\{\tilde{J}_{(n)}(\xi, \eta)\}$, сходящиеся соответственно к $\hat{\nu}(\xi, \eta)$ и $\hat{J}(\xi, \eta)$ равномерно по ξ и по η на P при $n \to \infty$.*

Доказательство. В силу равномерной ограниченности первой и второй последовательностей из (5.9) функциональная последовательность $\{\tilde{\nu}_{m,n}\}$ будет равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной по ξ, поскольку

$$|\tilde{\nu}_{m,n}(\xi') - \tilde{\nu}_{m,n}(\xi'')| \leqslant \max_{\xi \in [\xi_1, \xi_2]} |\tilde{\nu}'_{m,n}(\xi)|\,|\xi' - \xi''|.$$

Тогда из неё по теореме Арцела можно выделить сходящуюся равномерно по ξ подпоследовательность, которую мы обозначим $\{\tilde{\nu}_{(n)}(\xi)\}$:

$$\tilde{\nu}_{(n)}(\xi) \to \hat{\nu}(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (5.10)$$

Из второй формулы (5.5) следует, что

$$\tilde{J}_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} (k_0\tilde{\nu}_{i,n})'h.$$

Аналогично предыдущему рассуждению, исходя из равномерной ограниченности второй и третьей последовательностей из (5.9), устанавливаем, что последовательность $\{\tilde{J}_{m,n}\}$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной по ξ, значит, из неё можно выделить сходящуюся равномерно по ξ подпоследовательность, которую обозначим $\{\tilde{J}_{(n)}\}$:

$$\tilde{J}_{(n)}(\xi) \to \hat{J}(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (5.11)$$

Убедимся теперь, что последовательность $\{\tilde{J}_{(n)}\}$ равностепенно непрерывна по η. Из определения (2.19) функций $\tilde{J}_{(n)}$ следует их непрерывная дифференцируемость по η, поэтому

$$|\tilde{J}_{m,n}(\xi,\eta') - \tilde{J}_{m,n}(\xi,\eta'')| \leqslant \\ \leqslant \max_{\eta\in[0,\gamma]} \left|\frac{\partial \tilde{J}_{m,n}(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right| |\xi' - \xi''| = \max_{\eta\in[0,\gamma]} |(k_0\tilde{\nu}_{m,n})'(\xi)|\,|\xi' - \xi''|.$$

Значит, по теореме Арцела из $\{\tilde{J}_{(n)}\}$ можно выделить сходящуюся равномерно по η подпоследовательность, которую мы также обозначим $\{\tilde{J}_{(n)}\}$. Равномерная сходимость (5.11) по ξ и по η установлена.

Докажем, что имеет место равномерная сходимость $\{\tilde{\nu}_{(n)}\}$ по η, для чего достаточно установить равностепенную непрерывность $\{\tilde{\nu}_{(n)}\}$ по η.

Поскольку $\tilde{\nu}_{m,n}(\xi)$, так же как и $\tilde{k}_{m,n}(\xi)$, кусочно-постоянная функция по η, определим индекс m как функцию η.

Каждому числу $\eta \in [0,\gamma]$ и натуральному числу n поставим в соответствие натуральное число $m(\eta,n)$, равное целой части отношения $\frac{\eta}{h}$:

$$m(\eta) = m(\eta,n) = \left[\frac{\eta}{h}\right] = \left[\frac{\eta n}{\gamma}\right].$$

Тогда члены произвольной функциональной последовательности $\{f_{m(\eta),n(\xi)}\}$ будут функциями переменных (ξ,η).

Заметим, что для любого $\eta \in [0,\gamma]$ и для любого $\delta > 0$, таких что $\eta+\delta \in [0,\gamma]$,

$$\tilde{\nu}_{m(\eta+\delta),n} - \tilde{\nu}_{m(\eta),n} = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } (\xi,\eta+\delta) \in P_{m(\eta)+1}, \\ -\sum\limits_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} \frac{\tilde{\nu}_{i,n}\tilde{\nu}_{i+1,n}\tilde{J}_{i,n}(\alpha_{m+1,n}-\alpha_{m,n})}{r_0+a_0} h, & \text{если } (\xi,\eta+\delta) \notin P_{m(\eta)+1}, \end{cases}$$

где $P_{m(\eta)+1} = [\xi_1,\xi_2] \times [\eta_{m(\eta)},\eta_{m(\eta)+1}]$.

Поскольку функциональные последовательности $\{\tilde{\nu}_{(n)}\}$, $\{\tilde{J}_{(n)}\}$ и разности $\alpha_{m+1,n} - \alpha_{m,n}$ являются равномерно ограниченными, а функция $\frac{1}{r_0(\xi)+a_0}$ непрерывна на отрезке, то найдётся постоянная C_0, такая что начиная с некоторого n будет выполняться неравенство

$$\left|h\sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} \frac{\tilde{\nu}_{i,n}\tilde{\nu}_{i+1,n}\tilde{J}_{i,n}(\alpha_{m+1,n}-\alpha_{m,n})}{r_0+a_0}\right| \leqslant C_0 h(m(\eta+\delta) - m(\eta) - 1). \quad (5.12)$$

Так как при $(\xi,\eta+\delta) \notin P_{m(\eta)+1}$ имеет место неравенство

$$\eta < (1+m(\eta))h \leqslant m(\eta+\delta)h \leqslant \eta+\delta,$$

то из оценки (5.12) следует, что

$$|\tilde{\nu}_{m(\eta+\delta),n} - \tilde{\nu}_{m(\eta),n}| < C_0\delta = \varepsilon. \quad (5.13)$$

Равномерная непрерывность $\tilde{\nu}_{m(\eta),n}$ по η, а следовательно, и равномерная сходимость (5.10) по η доказана. Справедливость леммы 5.1 установлена.

Лемма 5.2. *Пусть функция $f(\eta)$ непрерывна на $[0,\gamma]$ и $(\eta,\eta+\delta)\in[0,\gamma]$. Если имеет место равномерная по η сходимость некоторой последовательности $\{f_{m(\eta),n}\}$ к $f(\eta)$,*

$$f_{m(\eta),n}\to f(\eta) \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{5.14}$$

то

$$\sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} f_{i,n}h \to \int\limits_{\eta}^{\eta+\delta} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Будем считать n настолько большим, что $m(\eta+\delta)>m(\eta)$. Оценим по модулю разность

$$\Bigl|\sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} f_{i,n}h - \int\limits_{\eta}^{\eta+\delta} f(\zeta)\,d\zeta\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} |f_{i,n}-f(\eta_i)|h + \Bigl|\sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} f(\eta_i)h - \int\limits_{\eta}^{\eta+\delta} f(\zeta)\,d\zeta\Bigr| = I_1+I_2.$$

В силу равномерной сходимости (5.14) для любого $\varepsilon>0$ можно указать номер $N=N(\varepsilon)$, начиная с которого

$$\sup_i |f_{i,n}-f(\eta_i)|\leqslant\varepsilon,$$

отсюда получаем оценку для I_1:

$$I_1 = \sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} |f_{i,n}-f(\eta_i)|h \leqslant \varepsilon(m(\eta+\delta)-1-m(\eta)) \leqslant \varepsilon\delta.$$

Поскольку $f(\eta)\in C([0,\gamma])$, $m(\eta)h=\bigl[\frac{\eta}{h}\bigr]h\to\eta$ при $h\to0$, то существует предел интегральной суммы

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} f(\eta_i)h = \int\limits_{\eta}^{\eta+\delta} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Значит, $I_2\to0$ при $n\to0$. Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. *Если выполнены условия леммы* 5.1 *и* $\alpha_m-\alpha_{m-1}=a'_{m-1}h+o(h)$, *то функции $\hat{\nu}$ и $\hat{J}$ непрерывны вместе с производными по η на P, а функция $k_0\hat{\nu}$ непрерывно дифференцируема на P, причём*

$$\frac{\partial\hat{\nu}}{\partial\eta}=-\frac{\hat{\nu}^2\hat{J}a'}{r_0+a_0}, \quad \frac{\partial\hat{J}}{\partial\eta}=\frac{\partial(k_0\hat{\nu})}{\partial\xi}.$$

Доказательство. Из представления функциональных последовательностей (5.7) и условий (2.3) на начальные данные (2.2) следует бесконечная дифференцируемость функций $\tilde{\nu}_{(n)}$, $\tilde{J}_{(n)}$ по ξ на $[\xi_1, \xi_2]$, откуда получаем, что функции $\hat{\nu}$ и $\hat{J}$ непрерывны по ξ как пределы равномерно сходящихся непрерывных функций (5.10), (5.11).

Из равномерной ограниченности последовательностей $\{(k_0\tilde{\nu}_{m,n})''\}$ следует также существование равномерно сходящейся по ξ подпоследовательности

$$(k_0\tilde{\nu}_{m,n})' \to \hat{V}(\xi,\eta) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку из (5.10) следует равномерная сходимость $k_0\tilde{\nu}_{m,n} \to k_0\hat{\nu}$ по ξ при $n \to \infty$, то из теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности получаем, что $\hat{V}(\xi,\eta) = \frac{\partial(k_0\hat{\nu})}{\partial\xi}$, т. е. функция $k_0\hat{\nu}$ непрерывно дифференцируема по ξ.

Установим непрерывность функции $\hat{\nu}$ по η. Поскольку имеют место равномерная по η сходимость (5.10) и оценка (5.13) для любого $\varepsilon > 0$, можем указать $\delta = \delta(\varepsilon)$, при котором для всех номеров n, начиная с некоторого, и всех точек $\eta, \eta+\delta \in [0,\gamma]$ справедливы неравенства

$$|\tilde{\nu}_{m(\eta+\delta),n} - \hat{\nu}(\xi,\eta+\delta)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\tilde{\nu}_{m(\eta),n} - \hat{\nu}(\xi,\eta)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\tilde{\nu}_{m(\eta+\delta),n} - \tilde{\nu}_{m(\eta),n}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда следует оценка

$$|\hat{\nu}(\xi,\eta+\delta) - \hat{\nu}(\xi,\eta)| < \varepsilon,$$

доказывающая равномерную непрерывность функции $\hat{\nu}$ по η. Функция $\hat{J}$ непрерывна по η как предел равномерно сходящейся по η последовательности непрерывных функций (5.11).

Используя равномерную непрерывность по η последовательностей (5.10) и (5.11), непрерывность функций $\hat{\nu}$ и $\hat{J}$ по переменным ξ, η и опираясь на лемму 5.2 и формулу (5.5), докажем непрерывную дифференцируемость функций $\hat{\nu}$ и $\hat{J}$ по η:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \frac{\hat{\nu}(\xi,\eta+\delta) - \hat{\nu}(\xi,\eta)}{\delta} &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\big(\lim_{n\to\infty}(\nu_{m(\eta+\delta),n} - \nu_{m(\eta),n})\big) = \\
&= -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=m(\eta)}^{m(\eta+\delta)-1} \frac{\tilde{\nu}_{i,n}\tilde{\nu}_{i+1,n}\tilde{J}_{i,n}(\alpha_{m,n} - \alpha_{m-1,n})}{r_0 + a_0}\right) = \\
&= -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\eta}^{\eta+\delta} \frac{\hat{\nu}^2(\xi,\zeta)\hat{J}(\xi,\zeta)a'(\zeta)}{r_0(\xi) + a_0}\,d\zeta,
\end{aligned}$$

значит,

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\hat{\nu}(\xi,\eta+\delta) - \hat{\nu}(\xi,\eta)}{\delta} = -\frac{\hat{\nu}^2(\xi,\eta)\hat{J}(\xi,\eta)a'(\eta)}{r_0(\xi) + a_0}. \tag{5.15}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\hat{J}(\xi,\eta+\delta) - \hat{J}(\xi,\eta)}{\delta} = \frac{\partial(k_0(\xi)\hat{\nu}(\xi,\eta))}{\partial\xi}. \tag{5.16}$$

Из (5.15), (5.16) следует, что функции $\hat{\nu}$ и $\hat{J}$ непрерывно дифференцируемы по η и удовлетворяют системе уравнений (5.3). Лемма 5.3 доказана.

Следствие. *Пределы последовательностей* (5.10), (5.11) *определяют функции* $k = k(\xi,\eta) = k_0(\xi)\hat{\nu}(\xi,\eta) \in C^1(P)$, $J = \hat{J}(\xi,\eta) \in C(P)$, $\frac{\partial J}{\partial \eta} \in C(P)$, *удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений* (1.32), (1.33).

Замечание. Разные подпоследовательности $\{\tilde{\nu}_{(n)}\}$, $\{\tilde{J}_{(n)}\}$ могут сходиться к разным функциям, поэтому решение системы уравнений (5.3) с начальными условиями (5.4), а следовательно, и уравнения (2.1), (2.2) может быть не единственным.

Доказательство теоремы 4. Перейдём к доказательству сходимости поверхностей S_n, являющихся графиками функций $\tilde{z}_n$, к поверхности S, определённой решением уравнения (2.1), (2.2), для чего оценим расстояние между точками $M \in S$ и $M_n \in S_n$.

Пусть $M = M(x,y,z)$, $M_n = M_n(\tilde{x}_{(n)}, y, \tilde{z}_{(n)})$, $L_n = L_n(x,y,\tilde{z}_{(n)}) \in S_n$, где x, z, $\tilde{x}_{(n)}$, $\tilde{z}_{(n)}$ — функции характеристических координат (ξ,η). Тогда

$$\rho(M,M_n) \leqslant \rho(M,L_n) + \rho(L_n,M_n),$$

где $\rho(M,L_n) = |z - \tilde{z}_{(n)}|$ и $\rho(L_n,M_n) = |x - \tilde{x}_{(n)}|$.

Определим функции $\tilde{k}_{(n)}$ и k как $\tilde{k}_{(n)} = k_0\tilde{\nu}_{(n)}$ и $k = k_0\tilde{\nu}$, тогда в условиях теоремы 4 выполняются леммы 5.2, 5.3, из которых следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{k}_{(n)}(\xi,\eta) = k(\xi,\eta) \tag{5.17}$$

и k удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1.32), (1.33). Отсюда при помощи лемм 4.2 и 4.3 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{z}_{(n)} = z.$$

Получим теперь оценку для $|x - \tilde{x}_{(n)}|$, используя (3.2) и (2.12). Имеем

$$x - \tilde{x}_{(n)} = x_{m-1,n} - \tilde{x}_{m-1,n} + \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (k(\xi,\zeta) - \tilde{k}_{m,n}(\xi))\,d\zeta,$$

значит, $x - \tilde{x}_{(n)}$ можно представить как

$$x - \tilde{x}_{(n)} = \sum_{i=1}^{m-1}\Bigg[\int\limits_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (k(\xi,\zeta) - k(\xi,\eta_{i-1}))\,d\zeta + (k(\xi,\eta_{i-1}) - \tilde{k}_{m,n}(\xi))h\Bigg] +$$
$$+ \int\limits_{\eta_{m-1}}^{\eta} (k(\xi,\zeta) - k(\xi,\eta_{m-1}))\,d\zeta + (k(\xi,\eta_{m-1}) - \tilde{k}_{m,n}(\xi))(\eta - \eta_{m-1}).$$

Отсюда при помощи формулы Лагранжа выводим, что

$$|x - \tilde{x}_{(n)}| \leqslant \max_P \left|\frac{\partial k}{\partial \eta}\right| \frac{\gamma h}{2} + \max_{i=1,\dots,n}\ \max_{\xi\in[\xi_1,\xi_2]} |\tilde{k}_{i,n} - k_i|\gamma.$$

Из сходимости (5.17) и ограниченности непрерывной функции $\frac{\partial k}{\partial \eta}$ на P следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_{(n)} = x$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M, M_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} |z - \tilde{z}_{(n)}| + \lim_{n\to\infty} |x - \tilde{x}_{(n)}| = 0.$$

Итак, семейство поверхностей S_n аппроксимирует поверхность S, что и требовалось доказать.

Заключение

Уравнения Монжа—Ампера применяются в метеорологии в виде так называемого уравнения баланса ветра и давления [6]

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \frac{l}{2}\Delta z + \frac{\beta}{2} z_y = \frac{1}{2}\Delta\Phi. \qquad (***)$$

Здесь z — функция тока горизонтальной составляющей ветра, Φ — геопотенциал (функция, характеризующая атмосферное давление), ось Ox направлена на восток, ось Oy — на север, Δ — оператор Лапласа по переменным x и y, l и β — заданные функции аргумента y, а именно $l = 2\omega \sin\theta$ — параметр Кориолиса, $\beta = l'_y$ — параметр Россби, ω — угловая скорость вращения Земли, θ — географическая широта.

Уравнение ($***$) применяется в тропосфере, где над всей территорией земного шара, кроме приэкваториальной зоны, наблюдается бездивергентный средний уровень. На нём движение воздуха с высокой степенью точности можно считать соленоидальным.

Если геопотенциал Φ, а вместе с ним и $\Delta\Phi$ заданы, то ($***$) представляет собой уравнение Монжа—Ампера относительно функции тока z. Компоненты u и v горизонтальной скорости ветра, направленные по параллели и меридиану соответственно, выражаются через z следующим образом: $u = -z_y$, $v = z_x$.

Тип уравнения определяется знаком дискриминанта

$$D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \frac{l}{2}\Delta z + \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\Delta\Phi + \frac{l^2}{2} + \beta u\right).$$

Известно, что в случае циклона величина $\Delta\Phi$ принимает положительное значение, в случае же антициклона или незамкнутой области высокого давления (барического гребня) имеем $\Delta\Phi < 0$.

Для тропических и субтропических антициклонов величина $\Delta\Phi + \frac{l^2}{2}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от кривизны пространственного графика геопотенциала Φ и от географической широты, на которой расположен антициклон.

Для некоторой части субтропических антициклонов может наблюдаться смена знаков дискриминанта: дискриминант будет отрицательным со стороны экватора (за счёт уменьшения величины $l^2/2$) и положительным с противоположной стороны. В таком случае, следуя [4, 6, 7], положим $D = 0$ и уравнение $(***)$ смешанного типа приближённо заменим параболическим уравнением

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \frac{l}{2}(z_{xx} + z_{yy}) + \frac{l^2}{4} = 0,$$

которое можно записать следующим образом:

$$\left(z_{xx} + \frac{l(y)}{2}\right)\left(z_{yy} + \frac{l(y)}{2}\right) - (z_{xy})^2 = 0.$$

В [3] было проведено сравнение расчётных данных протяжённости антициклонов вдоль меридиана с реально наблюдаемыми данными, которые показывают, что последнее параболическое уравнение позволяет правильно уловить некоторые существенные свойства субтропических антициклонов. Статья написана на основе материалов, полученных при работе над диссертацией «Геометрические методы решения параболических уравнений Монжа—Ампера» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в 1989 году. Там же рассмотрены условия единственности решения уравнения $(*)$, $(**)$ для коэффициентов специального вида.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Э. Р. Розендорну за постановку задачи, постоянное внимание к работе, ценные замечания и советы.

Литература

[1] Гурса Э. Курс математического анализа. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.

[2] Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. — М.: Физматгиз, 1958.

[3] Переяславская Л. Б. Оценки роста производных для решения параболического уравнения Монжа—Ампера и протяжённость субтропических антициклонов. — Деп. в ВИНИТИ 09.07.84.

[4] Переяславская Л. Б., Розендорн Э. Р. Параболические уравнения Монжа—Ампера в задачах геометрии и метеорологии // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1996. — No. 2 (405). — С. 41—43.

[5] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.

[6] Розендорн Э. Р. Приближённое решение уравнения баланса ветра и давления для антициклонов в тропических и субтропических широтах // ДАН СССР. — 1980. — Т. 253, № 3. — С. 584—587.

[7] Розендорн Э. Р. Редукция одной задачи метеорологии к геометрической задаче // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, вып. 6. — С. 167—168.