Об областях регулярности решений некоторых классов уравнений типа Монжа—Ампера

О. С. РОЗАНОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.956

Ключевые слова: уравнения Монжа—Ампера, задача Коши, специальные решения, области существования, уравнение баланса ветра и давления.

Аннотация

Представлено несколько результатов об оценках сверху областей регулярности специальных классов решений уравнений типа Монжа—Ампера (в частности, периодических по крайней мере по одной из переменных). Даны геометрические и геофизические приложения, а именно: мы касаемся задачи о размерах однолистной проекции на плоскость поверхности с отделённой от нуля отрицательной гауссовой кривизной и обсуждаем проблематику существования и несуществования решения уравнения баланса ветра и давления на торе.

Abstract

O. S. Rozanova, On domains of regularity of the solutions of some special classes of Monge–Ampère type equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 237—246.

We present several results on estimates from above of the regularity domains for special classes of solutions to Monge–Ampère type equations (in particular, periodic at least in one variable). Also we give the geometrical and geophysical applications. Namely, we concern with the problem on dimensions of a single-valued projection on a plane of a surface with separated from zero negative Gaussian curvature and discuss the existence or nonexistence of solution to the pressure-wind balance equation on a torus.

Рассмотрим уравнение Монжа—Ампера для неизвестной функции $z=z(x,y)$:

$$D(rt-s^2)=Ar+2Bs+Ct+E, \tag{1}$$

где $p=z'_x$, $q=z'_y$, $r=z''_{xx}$, $t=z''_{yy}$, $s=z''_{xy}$, а A, B, C, D, E — действительнозначные непрерывные функции переменных x, y, z, p, q.

Нам будет удобно переписать уравнение (1) в виде

$$rt-s^2=Q(x,y,z,p,q,r,t,s). \tag{1'}$$

Тип уравнения (1) зависит от знака определителя $\Delta=ED+AC-B^2$. Если $\Delta>0$, $\Delta<0$, $\Delta=0$, уравнение имеет эллиптический, гиперболический и параболический тип соответственно [5]. Однако даже на конкретном решении уравнения (1) определитель Δ может менять знак, так что (1), вообще говоря, относится к смешанному типу.

Уравнения вида (1) возникают, в частности, в геометрии, при исследовании поверхностей с заданной гауссовой кривизной, и в геофизике, так как такой вид имеет уравнение баланса ветра и давления.

Поставим задачу Коши для уравнения (1):

$$z(x_0, y) = \phi(y) \in C^2(\mathbb{R}), \quad p(x_0, y) = \psi(y) \in C^1(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Если коэффициенты уравнения являются аналитическими функциями, то согласно теореме Коши—Ковалевской локально по переменой x задача (1), (2) имеет единственное аналитическое решение для всех типов уравнений (1), включая переменный. Для уравнений невырожденного типа существует также локальное решение в классе C^∞ [13].

Определение. Назовём функцию $z = z(x_1, x_2)$, заданную на множестве $\Omega = X_{x_1} \times X_{x_2}$, $X_{x_i} \in \mathbb{R}^1$, C^{2+}-регулярной по переменной x_i, если она принадлежит $C^2(X_1 \times X_2)$ и существуют непрерывные на Ω смешанные производные $z'''_{x_i x_j x_i}$, $z'''_{x_i x_i x_j}$, $i \neq j$.

Ниже мы найдём некоторые достаточные условия несуществования C^{2+}-регулярного решения задачи (1), (2) в Ω. В частности, мы рассмотрим решения уравнения (1) в классе функций, периодических по крайней мере по одной переменной, то есть заданных на цилиндре $\mathcal{C} = \mathbb{R}^1 \times S^1_b$ или торе $\mathcal{T} = S^1_a \times S^2_b$, где S^1_a и S^1_b — окружности радиусов a и b соответственно.

Рассмотрим функцию $f(x, y, z, q)$, имеющую конечные частные производные вплоть до второго порядка (по крайней мере односторонние) по всем аргументам, принадлежащие $L_{\mathrm{loc}}(X_y)$. Также рассмотрим функционалы, фактически являющиеся функциями переменной x, а именно

$$F(x) = \int\limits_{X_y} f(x, y, z, q)\, dy, \quad G(x) = \int\limits_{X_y} (g - f''_{44})\, dy,$$

где

$$g = g(x, y, z, p, q) = f''_{11} + 2f''_{13}p + 2f''_{14}s + f''_{33}p^2 + f''_{34}(2ps - rq) + (f'_3 - f''_{24})r,$$

$Q = Q(x, y, z, p, q)$ — правая часть уравнения ($1'$), f'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — частные производные функции f по аргументам x, y, z, q соответственно.

Имея в виду данные Коши (2), обозначим

$$\alpha = \int\limits_{X_y} (f'_1(x_0, y, \phi(y), \phi'(y)) + \\ + f'_3(x_0, y, \phi(y), \phi'(y))\psi(y) + f'_4(x_0, y, \phi(y), \phi'(y))\psi'(y))\, dy.$$

Отметим, что если $f = f(q)$, то $g = 0$.

Рассмотрим два основных случая.

I. $X_y = S^1_b$, коэффициенты уравнения (1) и данные Коши (2) периодичны по y, таким образом, мы ищем решение на цилиндре $\mathcal{C}$ или на торе $\mathcal{T}$.

II. $X_y = \mathbb{R}^1$ и $f = \tilde{f}(x, y, z, q) w(y)$, где $w(y) \in C^1(\mathbb{R})$ — некоторая финитная функция.

Теорема 1. *Пусть выполнено любое из следующих четырёх условий*:

1) $F(x) \geqslant K$, $G(x) \leqslant \mu$, $\mu < 0$;
2) $F(x) \leqslant K$, $G(x) \geqslant \mu$, $\mu > 0$;
3) $F(x) \geqslant K$, $G(x) \leqslant \mu$, $\mu \geqslant 0$, $\alpha^2 > 2\mu(F(x_0) - K)$;
4) $F(x) \leqslant K$, $G(x) \geqslant \mu$, $\mu \leqslant 0$, $\alpha^2 > -2\mu(F(x_0) - K)$

с некоторыми константами K и μ. Тогда в случаях I *и* II *не существует C^{2+}-регулярного по переменной x глобального* (*существующего во всей плоскости*) *решения задачи Коши* (1), (2).

Если обозначить x_* абсциссу точки, где нарушается регулярность, то справедлива следующая оценка величины $d = |x_* - x_0|$:

если $\mu \neq 0$, то $d \leqslant \min\limits_{\pm}\{\left|\frac{1}{\mu}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\mu(F(x_0) - K)}\right|\}$;

если $\mu = 0$ (*при условиях* 3 *и* 4), *то $d \leqslant \left|\frac{\alpha}{F(x_0) - K}\right|$*.

Доказательство. Заметим, что

$$F'(x) = \int\limits_{X_y} (f_1' + f_3' p + f_4' s)\, dy$$

и $\alpha = F'(x_0)$. Для случаев I и II получим, что

$$\begin{aligned}
F''(x) = \int\limits_{X_y} (f_{11}'' &+ 2f_{13}'' z_x' + f_{33}''(z_x')^2 + 2f_{14}'' z_{xy}'' + \\
&+ 2f_{34}'' z_x' z_{xy}'' + f_3' z_{xx}'' + f_{44}''(z_{xy}'')^2 + f_4' z_{xyx}''')\, dy = \\
&= \int\limits_{X_y} (-f_{44}''(rt - s^2) + g(x, y, z, p, q))\, dy = \\
&= \int\limits_{X_y} (-f_{44}'' Q(x, y, z, p, q) + g(x, y, z, p, q))\, dy = G(x).
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $z_{xyx}''' = z_{xxy}'''$, и применили формулу интегрирования по частям к интегралу

$$\int\limits_{X_y} f_4' z_{xxy}'''\, dy.$$

Внеинтегральные члены обращаются в нуль по предположению о периодичности решения (случай I) или вследствие компактности носителя функции f (случай II). Таким образом, при условиях 1 и 3 мы имеем неравенство

$$F(x) \leqslant \frac{\mu}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0) + F(x_0),$$

которое должно выполняться вместе с неравенством $F(x) \geqslant K$. При условиях 2 и 4 знаки неравенств противоположны. Невозможность выполнения этих неравенств при всех действительных x зависит от условий пересечения графика квадратичной (или линейной) функции $\eta(x) = \frac{\mu}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0) + F(x_0)$ с прямой $\eta(x) = K$. Оценки величины d получаются из тех же соображений. $\square$

Опираясь на теорему 1, легко построить примеры уравнений вида ($1'$), не имеющих C^{2+}-регулярных периодических решений во всей плоскости. Например, пусть $f(q) = q^2$. Тогда

$$G(x) = -2 \int\limits_{S_b^1} Q\, dy.$$

Выберем

$$Q = x^{2n} + z^{2m} + q^{2k} + \lambda(y),$$

где $n, m, k \in \mathbb{N}$, а $\lambda(y)$ есть $2\pi b$-периодическая функция, такая что

$$\int\limits_{S_b^1} \lambda(y)\, dy = \beta > 0.$$

В этом случае выполняются условия 1 теоремы 1.

Следствие 1. *Предположим, что существуют константы $\mu > 0$, K_- и K_+, такие что $K_- \leqslant F(x) \leqslant K_+$, $|G(x)| \geqslant \mu$. Тогда C^{2+}-регулярное по переменной x решение уравнения* ($1'$) *не может существовать в полосе $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, ширина d которой больше, чем $2\sqrt{2}\frac{\sqrt{K_+ - K_-}}{\sqrt{\mu}}$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $G(x) > 0$. Тогда мы получим неравенство

$$\frac{\mu}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0) + F(x_0) \leqslant F(x) \leqslant K_+,$$

которое может иметь место только в полосе, ширина которой не превосходит расстояния между корнями квадратного уравнения

$$\frac{\mu}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0) + F(x_0) - K_+ = 0.$$

Из того же неравенства видно, что существует точка x_1, такая что $F'(x_1) = 0$. Рассматривая задачу Коши при $x = x_1$, получим, что $\alpha = 0$. Таким образом, расстояние между корнями уравнения теперь равно

$$2\sqrt{2}\frac{\sqrt{K_+ - F(x_1)}}{\sqrt{\mu}} \leqslant 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{K_+ - K_-}}{\sqrt{\mu}}.$$

Доказательство в случае $G(x) < 0$ проводится тем же образом. $\square$

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для ситуаций, когда f не может быть выбрана финитной по y. Эта теорема нужна нам для геометрических приложений.

Теорема 2. *Предположим, что существует такая функция* $f = f(x, y, z, q)$, *что на решениях уравнения* (1′) *выполнено одно из следующих условий*:

1) $f \geqslant k$, $g - f''_{44}Q \leqslant \mu < 0$;
2) $f \leqslant k$, $g - f''_{44}Q \geqslant \mu > 0$.

Тогда если решение $z = z(x, y)$ *таково, что*

$$z''_{xx} f'_4 = o(|y|) \text{ при } |y| \to \infty \text{ при любом фиксированном } x, \tag{3}$$

то оно не может быть C^{2+}*-регулярным по* x *во всей плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Например, докажем теорему 2 при условии 1. Выберем в качестве множества X_y отрезок $[-L, L]$, $L = \mathrm{const} > 0$. Тогда $F(x) > 2Lk$ и

$$F''(x) = \int\limits_{X_y} (g - f''_{44}Q)\, dy + o(|y|) \leqslant 2L\mu + o(L).$$

Для достаточно больших L правая часть последнего неравенства имеет знак μ, т. е. отрицательна. Далее следует то же рассуждение, что при доказательстве теоремы 1. □

Следствие 2. *Предположим, что существует такая функция* $f = f(x, y, z, q)$, *что на решениях уравнения* (1′) *выполнены условия*

$$k_- \leqslant f \leqslant k_+, \quad |g - f''_{44}Q| \geqslant \mu > 0$$

с некоторыми константами k_-, k_+, μ. *Тогда* C^{2+}*-регулярное по* x *решение уравнения* (1′), *такое что* $z''_{xx} f'_4 = o(|y|)$ *при* $|y| \to \infty$ *при каждом фиксированном* x, *не может существовать в полосе* $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, *ширина которой больше, чем* $2\sqrt{2}\frac{\sqrt{k_+ - k_-}}{\sqrt{\mu}}$.

Доказательство. Возьмём опять отрезок $[-L, L]$ в качестве множества X_y. Тогда

$$2Lk_- \leqslant F(x) \leqslant 2Lk_+,$$
$$F''(x) = \int\limits_{X_y} (g - f''_{44}Q)\, dy + o(L)$$

и

$$|F''(x)| \geqslant 2\mu L + o(L).$$

Для достаточно больших L правая часть этого неравенства положительна. Аналогично доказательству следствия 1 можно показать, что C^{2+}-регулярное решение не может существовать в полосе, ширина которой больше, чем $2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2L(k_+ - k_-)}}{2L\mu + o(L)}$. Переходя к пределу при $L \to \infty$, мы получим утверждение следствия. □

Приложения к геометрии

В работах [3, 9] изучался вопрос о размерах однолистной проекции на плоскость гладкой поверхности с отрицательной гауссовой кривизной, отделённой от нуля. Эта задача восходит к Гильберту [10] и имеет богатую историю [7]. В аналитической постановке она сводится к нахождению областей регулярности решений нелинейных уравнений Монжа—Ампера вида ($1'$):

$$z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = Q(x, y, z, z'_x, z'_y), \tag{4}$$

где

$$Q(x, y, z, z'_x, z'_y) = K(x, y)(1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2)^2,$$

$K(x, y)$ — гауссова кривизна.

Был получен следующий результат: если поверхность имеет гладкость C^2 во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, то гауссова кривизна не может быть отрицательной и отделённой от нуля. Более того, была найдена универсальная константа, которой не может превзойти сторона квадрата, если на этот квадрат однозначно проектируется кусок такой поверхности. Если $K(x, y) \leqslant -k_0^2 < 0$, то наилучшая из известных оценок стороны d такого квадрата вытекает из результатов [9] (где оценивались размеры круга, на который однозначно проектируется такая поверхность) и имеет вид

$$d \leqslant \frac{2e\sqrt{3}}{k_0}.$$

Ниже мы найдём аналогичную оценку для C^{2+}-регулярных поверхностей с определённым ограничением на рост на бесконечности задающих их функций, т. е. в несколько более узком классе, чем C^2. Однако величина d может быть оценена сверху константой, которая меньше полученной в [9].

Рассмотрим ограниченную функцию

$$f(q) = q \operatorname{arctg} q - \frac{\pi}{2}|q| + 1.$$

Здесь $k_- = 0$, $k_+ = 1$. Легко вычислить, что $g = 0$,

$$f'(q) = \operatorname{arctg} q + \frac{q}{1 + q^2} - \operatorname{sign}(q)\frac{\pi}{2}, \quad |f'(q)| \leqslant \mathrm{const},$$

$$-f''(q)Q = -2K(x, y)\frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{(1 + q^2)^2} \geqslant 2k_0^2 = \mu = \mathrm{const} > 0.$$

Предположим, что $k_0 > 0$. Условие (3) теоремы 2 означает здесь, что $z''_{xx} = o(|y|)$. Оценка ширины d полосы, в которой существует C^{2+}-регулярное решение уравнения (4), даётся следствием 2, а именно: $d \leqslant \frac{2}{k_0}$.

Меняя местами переменные x и y, после такого же рассуждения получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана уравнением $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ является C^{2+}-регулярной по обеим переменным.*

Пусть эта поверхность имеет гауссову кривизну $K(x,y) \leqslant -k_0^2 < 0$ *и, кроме того,* $(z''_{xx})^2 + (z''_{yy})^2 = o(x^2+y^2)$. *Тогда длина* d *стороны квадрата, на который эта поверхность однозначно проектируется, не превосходит величины* $\frac{2}{k_0}$.

Замечание 1. В качестве $f(q)$ можно рассмотреть любую функцию из семейства $\frac{1}{(1+a|q|)^n}$, $a > 0$, $n \in (0,2]$. После стандартных (но довольно длинных) вычислений можно сделать вывод, что наилучшая оценка стороны квадрата получается при $a = 1$, $n = 2$ ($d \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}k_0}$). Эта оценка более слабая, чем даваемая теоремой 3.

Если мы дополнительно предположим, что q (или p) являются ограниченными во всей плоскости ($|q| \leqslant M = \text{const}$), то при упомянутом выборе функции $f(q)$ мы получим, что $k_- = \frac{1}{(1+M)^2}$, и ширина соответствующей полосы оценивается сверху величиной

$$d(M) = \frac{4}{\sqrt{3}k_0}\sqrt{1 - \frac{1}{(1+M)^2}} < \frac{4}{\sqrt{3}k_0}.$$

Легко видеть, что

$$d(M) \to \frac{4}{\sqrt{3}k_0} \text{ при } M \to \infty.$$

Поэтому если внутри полосы ширины d ($d \leqslant d(M)$) нет особенностей, то на границах этой полосы обращаются в бесконечность первые производные (в этом контексте см. также [12]).

Замечание 2. Для периодических по переменной y решений интересно рассмотреть вместо условия

$$K(x,y) \leqslant -k_0^2 < 0$$

следующее:

$$K(x,y) \leqslant -\lambda(y), \quad \int\limits_{S_b^1} \lambda(y)\,dy \geqslant C^2 = \text{const} > 0.$$

В случае той же самой, что и при доказательстве теоремы 3, функции $f(q)$ мы получим оценку

$$d \leqslant \frac{2\sqrt{L}}{|C|},$$

где $L = 2\pi b$ — длина периода.

Замечание 3. Оценкам областей регулярности, отличных от квадрата, некоторых классов уравнений Монжа—Ампера посвящена работа [4].

Замечание 4. Для гиперболических уравнений вида (1) с более общей функцией Q были найдены достаточные условия несуществования регулярного во всей плоскости решения [1]. В [12—14] рассматривался вопрос о типе возникающих особенностей расширения поверхности за особенности. В [2] при помощи римановых инвариантов найдены достаточные условия существования C^3-гладкого решения. В [12] авторы изучают возможность построения уравнений, интегрируемых в смысле Дарбу и Гурса, и находят характеристики поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной, интегрируемые во всем пространстве. О развитии вопроса о реализации поверхностей в $\mathbb{R}^3$ за последнее десятилетие можно узнать из обзора [11], там же имеются соответствующие ссылки.

Приложения к геофизике

Ещё один частный случай уравнения типа Монжа—Ампера возникает в геофизике. Это уравнение баланса ветра и давления

$$\psi''_{xx}\psi''_{yy} - (\psi''_{xy})^2 + A(y)\Delta\psi + B(y)\psi'_y = \frac{1}{2}\Delta\Phi \tag{5}$$

(см. [6—8]). Здесь ψ и Φ — функция тока соленоидального поля скоростей u, v ($u = -\psi'_y$, $v = \psi'_x$) и геопотенциал (обе функции определены с точностью до константы), $A = l/2$, $B = A'_y$, где $l = l(y)$ — параметр Кориолиса. Функции ψ и Φ зависят от переменных x, y, а также от давления и времени, которое входит в (5) как параметр.

Рассмотрим уравнение (5) для неизвестной функции ψ на торе $\mathcal{T} = S^1_a \times S^1_b$, где a и b — радиусы соответствующих окружностей, т. е. в классе периодических по обеим переменным функций. Предположим, что все коэффициенты, входящие в уравнение, по крайней мере C^1-гладкие и имеют ту же периодичность. В соответствии с геофизической интерпретацией естественно предположить, что

$$\int\limits_{S^1_b} A(y)\,dy = 0.$$

Здесь ось x направлена на восток, а ось y — на север.

Теорема 4. *Для C^{2+}-регулярности решения уравнения* (5) *на всём торе $\mathcal{T}$ необходимо, чтобы для любого $x \in S^1_a$ выполнялось следующее условие*:

$$D(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{S^1_b} (2\psi'_x(\psi''_{yy} + A(y)) - \Phi'_x)\,dy = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$S(x) = \int\limits_{S^1_b} ((\psi'_y)^2 + 2R(y)\psi'_y + \Phi)\,dy,$$

где

$$R(y) = \int\limits_0^y A(s)\,ds.$$

Заметим, что $R(y)$ есть $2\pi b$-периодическая функция в силу предположений об $A(y)$. Продифференцируем $S(x)$ дважды и затем проинтегрируем по частям по переменной y. Мы получим, что $S'(x) = -D(x)$ и $S''(x) = 0$.

Таким образом, для каждого значения $x_0 \in S^1_a$ мы имеем

$$S(x) = S'(x_0)(x - x_0) + S(x_0).$$

Но функция $S(x)$ является ограниченной вследствие непрерывности подынтегрального выражения. Поэтому $S'(x_0) = 0$, а это и есть условие (6). $\square$

Теорема 5. *Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in S^1_a$ выполнено $S'(x_0) \neq 0$. Тогда величина $|x_0 - x_*|$, где x_* — это абсцисса точки, в которой имеется особенность, может быть оценена сверху константой*

$$\frac{K}{|S'(x_0)|}.$$

Здесь

$$K = \left| S(x_0) + \frac{k_1}{4} - k_2 \right|,$$

$$k_1 = 2\Bigg(\int\limits_{S^1_b} R(y)\,dy\Bigg)^{1/2} = \mathrm{const}, \quad k_2 = 2\pi b \min_{\mathcal{T}} \Phi(x,y) = \mathrm{const}.$$

Доказательство основано на следующей оценке:

$$S(x) \geqslant u^2 - k_1 u + k_2 \geqslant k_2 - \frac{k_1^2}{4},$$

где

$$u(x) = \Bigg(\int\limits_{S^1_b} (\psi'_y)^2\,dy\Bigg)^{1/2}.$$

Заметим, что хотя функция Φ определена с точностью до константы, в разности $S(x_0) - k_2$ уже нет произвола. $\square$

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 03-02-16263. Автор благодарен Э. Р. Розендорну за интерес к работе и обсуждение, а также Ю. Н. Браткову за привлечение внимания к обзору [11].

Литература

[1] Азов Д. Г. О классе гиперболических уравнений Монжа—Ампера // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 153—154.

[2] Братков Ю. Н. О существовании классического решения уравнения Монжа—Ампера гиперболического типа в целом // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 2. — С. 379—390.

[3] Ефимов Н. В. Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны // ДАН СССР. — 1953. — Т. 93, № 4. — С. 609—611.

[4] Ефимов Н. В. Оценки областей регулярности некоторых уравнений Монжа—Ампера // Мат. сб. — 1976. — Т. 100, № 3. — С. 356—363.

[5] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II. — М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

[6] Розендорн Э. Р. Сведение одной метеорологической задачи к геометрической // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 6. — Р. 167—168.

[7] Розендорн Э. Р. Поверхности с отрицательной кривизной // Итоги науки и техн. Геометрия-3. Вып. 48. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 98—195.

[8] Bolin B. An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation on three-dimensional flows // Tellus. — 1956. — Vol. 8, no. 1. — P. 61—75.

[9] Heinz E. Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind // Math. Ann. — 1955. — Bd. 129, No. 5. — S. 451—454.

[10] Hilbert D. Über Flächen von konstanter Gauß'scher Krümmung // Amer. Math. Soc. Trans. — 1901. — Vol. 2. — P. 87—99.

[11] Hong J. Some new development of realization of surfaces into $\mathbb{R}^3$ // Proc. Int. Congress of Mathematicians, Bejeeng, 2002. Vol. III. — P. 155—165.

[12] Tien N., Kong D., Tsuji M. Integration of Monge–Ampère equations and surfaces with negative Gaussian curvature // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1998. — IV. Ser. 27, no. 2. — P. 309—330.

[13] Tsuji M. Formation of singularities for Monge–Ampère equations // Bull. Sci. Math. — 1995. — Vol. 119. — P. 433—457.

[14] Tsuji M. Monge–Ampère equations and surfaces withnegative Gaussian curvature // R. Budzynski (ed.) et al. Symplectic singularities and geometry of gauge fields. Proc. Banach Center Symposium on Differential Geometry and Mathematical Physics in Spring 1995, Warsaw, Poland. — Warsaw: Polish Academy of Sciences, Inst. of Mathematics, 1997. — (Banach Cent. Publ.; Vol. 39). — P. 161—170.