Обобщение теоремы Погорелова—Стокера о полных развёртывающихся поверхностях*

И. Х. САБИТОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 514.752

Ключевые слова: полные локально евклидовы метрики, изометрические погружения, цилиндры.

Аннотация

Известная теорема А. В. Погорелова о том, что C^1-гладкая полная развёртывающаяся поверхность ограниченной внешней кривизны в $\mathbb{R}^3$ является цилиндром, была обобщена Стокером на случай поверхностей с более широким пониманием полноты, но с C^2-гладкостью. Мы распространяем результат Стокера на случай C^1-гладких нормальных развёртывающихся поверхностей в смысле Бураго—Шефеля.

Abstract

I. Kh. Sabitov, A generalization of the Pogorelov–Stocker theorem on complete developable surfaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 247—252.

The well-known Pogorelov theorem stating the cylindricity of any C^1-smooth, complete, developable surface of bounded exterior curvature in $\mathbb{R}^3$ was generalized by Stocker to C^2-smooth surfaces with a more general notion of completeness. We extend Stocker's result to C^1-smooth surfaces being normal developable in the Burago–Shefel' sense.

1. Известно, что полная связная развёртывающаяся поверхность в E^3 является цилиндром. Эта теорема доказана А. В. Погореловым в 1956 г. и вошла в его монографию [2, глава 9]. В его доказательстве предполагается, что поверхность имеет гладкость C^1 и принадлежит классу поверхностей ОВКП — ограниченной внешней кривизны по Погорелову, а под «развёртывающейся поверхностью» понимается поверхность с локально евклидовой метрикой. Затем эта теорема была обобщена в [4] на случай полных развёртывающихся гиперповерхностей в любом евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 3$, но в классе гладкости C^2.

В [6] дано ещё одно её доказательство для пространства E^3 в классе гладкости C^2, которое по замыслу автора должно быть проще, чем в [2, 4], в том смысле, что необходимые для доказательства рассуждения проводятся в рамках

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00204, и Минобразования, грант № РНП 2.1.1.7988.

элементарной дифференциальной геометрии[1]. Кроме того, в [6] вместо неограниченной продолжаемости *любой* геодезической, как это требуется в определении полноты по Хопфу—Ринову, предполагается, что *ни одна прямая линия на поверхности не содержит граничных точек поверхности*. Это означает, что свойство неограниченной продолжаемости геодезических предполагается выполненным только для геодезических в виде прямых линий, и то в ослабленном варианте: оно должно быть удовлетворено для образующих, проходящих через непланарные точки (про которые из общей теории известно, что они идут от края до края поверхности или продолжаются неограниченно, если края нет), а для образующих, проходящих через планарную[2] точку и не совпадающих с полной прямой, предполагается только, что если они не доходят до граничных точек поверхности, а заканчиваются в некоторой внутренней точке, тогда они далее продолжимы уже как некоторые «криволинейные» геодезические без уточнения границ продолжения. В этот класс поверхностей попадают, например, такие неполные в классическом смысле поверхности, как бесконечный круговой цилиндр, у которого удалена одна образующая или даже целая полоса между двумя образующими. Но объявленного автором работы [6] условия C^2-гладкости поверхности на самом деле для его рассуждений недостаточно, так как, например, на с. 629 своей статьи он использует производную $(k_1)_v$, где k_1 — не равная нулю главная кривизна поверхности; кроме того, неясно, почему в условиях C^2-гладкости поверхности можно гарантировать, что через одну точку в данном главном направлении должна проходить только одна линия кривизны (см. [5, с. 166]).

Доказательство самой теоремы нам тоже не кажется безупречным, так как на с. 634 в [6] без достаточных на то оснований утверждается, что проектируемая на плоскость (x, y) полоса поверхности вдоль уходящей в бесконечность образующей не сужается до нулевой ширины. Это было бы обоснованное утверждение, если бы были известны равномерные оценки вариации нормали к поверхности в ортогональном к образующей направлении и равномерные оценки ширины исследуемой полосы в зависимости от вариации нормали. Тем не менее оказывается, что теорема Погорелова верна и в редакции Стокера, более того, можно убрать требование принадлежности поверхности классу ОВКП и заменить его более общим условием, что поверхность является C^1-гладким *торсом*.

2. В этом пункте мы приведём необходимые определения и свойства торсов. Торсом мы называем C^1-гладкую поверхность, через каждую точку которой проходит прямолинейный отрезок[3] на поверхности, вдоль которого касательная плоскость к поверхности стационарна. Эти отрезки мы будем называть *образующими*. Для таких поверхностей можно доказать следующие свойства.

[1]Приведённое в [6] замечание о том, что в доказательстве из [4] необходимо используется понятие универсальной накрывающей, относится и к доказательству из [2], иначе некоторые рассуждения из [2] окажутся необоснованными.

[2]*Планарными* мы называем точки, у которых есть окрестность, являющаяся областью на плоскости; соответственно, *непланарные* точки никакой такой окрестностью не обладают.

[3]Термин «через» означает, что точка является внутренней точкой отрезка.

1. Через каждую непланарную точку торса проходит единственная образующая, продолжающаяся в обе стороны или до пересечения с краем поверхности, или неограниченно далеко, сохраняя свойство стационарности вдоль неё касательной плоскости поверхности.
2. Образующая состоит из точек одного типа, т. е. или все её внутренние точки планарные, или все они непланарные.
3. Торсы являются *нормальными развёртывающимися* поверхностями в смысле [3] (см. также [1]), и они локально изометричны плоскости. (Последнее свойство формально нигде не доказано, но Ю. Д. Бураго заметил, что в доказательстве А. В. Погорелова в [2] локальной изометричности плоскости его поверхностей класса ОВКП с нулевой внешней кривизной используются только первые два перечисленные выше свойства, установленные им для поверхностей класса ОВКП, кроме этого, принадлежность их классу ОВКП нигде не используется, а эти свойства верны и для торсов. Поэтому погореловское доказательство локальной евклидовости метрики поверхности пригодно и для случая торсов.)

3. Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Всякий C^1-гладкий торс, полный в смысле* [6], *является цилиндром.*

Доказательство. *Пусть нам дана C^1-гладкая развёртывающаяся поверхность S в виде торса, полная в смысле* [6] *и не совпадающая с плоскостью.* На такой поверхности обязательно найдётся непланарная точка p_0, через которую проходит единственная (даже локально) образующая l_0, тоже состоящая из непланарных точек. По свойству 1 эта образующая продолжается до границы поверхности, а так как это по условию полноты в смысле Стокера (или потому, что границы нет) невозможно, то она располагается на поверхности как полная прямая.

Предположим сначала, что прямая l_0 является границей некоторой связной области D планарных точек, которая должна располагаться на касательной к поверхности плоскости T_0. Пусть полуплоскость, содержащая D, обозначена через T^+. Пусть D не совпадает с T^+ (если D совпадает с T^+, рассуждения будем проводить для другой полуплоскости T^-). Относительная граница D в S имеет точки, отличные от точек на l_0 (в противном случае прямая l_0 отсекает от S часть, совпадающую с плоской областью D). Пусть M — такая точка. По свойству 1 через M проходит некоторая единственная образующая l_1, которая принадлежит относительной границе D и которая, по условию теоремы, является полной прямой. Эта прямая не может пересечься с l_0, следовательно, она ей параллельна. В полосе между l_0 и l_1 область D граничных точек иметь не может. Действительно, пусть есть граничная точка N, не принадлежащая l_0. Тогда через неё тоже проходит единственная образующая l, тоже параллельная l_0. Но это значит, что прямая l_2 отделена от прямой l_1 образующей l, что противоречит связности области D по отношению к точкам в окрестностях прямых l_0 и l_1. Тем самым мы пока получили, что *если на поверхности S есть связная плоская область, то она представляет собой полосу между двумя параллельными прямыми* и *через каждую точку этой плоской области проходит единственная неограниченная образующая, а именно та, которая параллельна краям полосы*.

Теперь предположим, что в любой окрестности прямой l_0 есть непланарные точки. Рассмотрим образ этой окрестности на развёртке S на плоскость. Пусть образующей l_0 соответствует ось y. Проведём из каждой точки оси y ортогонально к оси в сторону $x > 0$ геодезическую, т. е. отрезок прямой, продолжая его, пока можно продолжать. Пусть длины максимально продолженных геодезических равны $L(y) > 0$. Если $L(y) \geqslant \varepsilon > 0$ для всех y, то образующая, выходящая из любой непланарной точки $(x_0, 0)$, $0 < x_0 < \varepsilon$ (конечно, на плоскости (x, y) речь идёт о прообразах образующих при развёртке поверхности на плоскость), будет параллельна l_0, иначе она должна будет пересечь l_0, что невозможно. Как мы установили выше, в полосе, соответствующей связной области планарных точек, в каждой точке тоже есть единственная образующая, продолжающаяся как полная прямая и параллельная сторонам полосы. Эта прямая также не может пересечься с l_0, поэтому полоса будет расслоена на образующие, параллельные образующей l_0.

Если же $\inf L(y) = 0$, рассуждаем так[1]. Введём функцию

$$l(y) = \begin{cases} \inf\limits_{0 \leqslant \eta < y} L(\eta) & \text{при } y \geqslant 0, \\ \inf\limits_{y < \eta \leqslant 0} L(\eta) & \text{при } y \leqslant 0. \end{cases}$$

Эта функция не возрастает при возрастании $|y|$ и она кусочно-непрерывна. Её график γ с добавленными «ступенями» («ступеньки» будут в точках разрыва функции $l(y)$) и ось y ограничивают односвязную область Ω: $0 < x < l(y)$, $-\infty < y < +\infty$. Кривая γ состоит из участков трёх видов:

1) горизонтальные ступеньки — отрезки вида $a \leqslant x \leqslant b$, $y = c$, где c — точка разрыва функции $l(y)$, причём точка (a, c) соответствует граничной точке поверхности S;
2) вертикальные открытые отрезки вида $x = a$, $c_1 < |y| < c_2$, точки которых соответствуют внутренним точкам поверхности;
3) непрерывные дуги монотонно убывающих кривых $x = L(y)$, точки которых соответствуют граничным точкам поверхности S (рис. 1).

Будем теперь выпускать образующие[2] из точек интервала $(0 < x < x_0,\ y = 0)$, но сначала покажем, что их направления при достаточно малом x_0 образуют непрерывное семейство. Пусть точка $(0, 0)$ соответствует некоторой точке $M_0 \in l_0 \subset S$, и пусть некоторая окрестности точки M_0 изометрически развёртывается на круг ω_0: $x^2 + y^2 < r_0^2$ с условием $\omega_0 \subset \Omega$. Образующие l,

[1] В [6] без подробных объяснений утверждается, что $\inf L(y) > 0$, и в этом месте доказательство предлагаемой там теоремы не кажется нам достаточно обоснованным.

[2] На самом деле в этом и следующем абзацах мы говорим о прообразах образующих на плоскости (x, y).

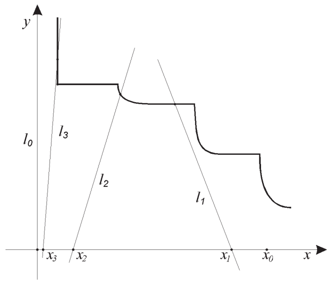

Рис. 1

исходящие из точек интервала ($0 < x < x_0$, r_0) не могут пересечься с вертикальным диаметром ($x = 0$, $-r_0 < y < r_0$) круга, соответствующим образующей l_0. Из этого следует, что образующая $l(\xi)$, исходящая из точки $(\xi, 0)$, $0 < xi < x_0$, пересекает окружность $x^2+y^2 = r_0^2$ в точке r_0 ($\cos\theta = 2\xi r_0/(\xi^2+r_0^2)$, $\sin\theta = (r_0^2 - \xi^2)/(\xi^2 + r_0^2)$). Следовательно, направления этих образующих при $\xi \to 0+$ стремятся к оси y, т. е. направления образующих непрерывны справа в точке $\xi = 0$. Аналогично доказывается их непрерывность слева в точке $\xi = 0$, а также непрерывность и в остальных точках ξ.

Проследим за образующей $l(\xi)$, вышедшей из некоторой точки $(\xi, 0)$. Если она при своём неограниченном продолжении не пересечётся с образующей l_0, то она будет ей параллельна. Если же есть пересечение, то до пересечения с l_0 образующая $l(\xi)$ обязана выйти за пределы области Ω, так как в пределах односвязной области образующие не могут пересекаться. Рассмотрим первое пересечение $l(\xi)$ с γ — границей области Ω. Оно не может произойти в точках участков третьего типа, так как они являются граничными точками поверхности S. Если оно произошло в некоторой точке (a, c) на участке первого типа, тогда мы будем следить за новыми образующими, непрерывно смещаясь влево по отрезку $(0, \xi)$. Прямолинейные отрезки ($0 \leqslant x \leqslant \xi$, $y = 0$), ($x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant c$), ($0 \leqslant x \leqslant a$) и отрезок образующей $l(\xi)$ от точки $(\xi, 0)$ до точки (a, c) ограничивают трапецию T, целиком лежащую внутри Ω. Поэтому образующие $l(x)$, $x < \xi$, в пределах этой трапеции не могут пересекаться ни с $l(\xi)$, ни с l_0. Допустим, точка пересечения (a, c) образующей $l(\xi)$ с γ принадлежит участку первого типа. Тогда при перемещении влево вдоль $(x, 0)$ образующие тоже будут непрерывно перемещаться влево, пересекая γ в точках того же участка первого типа, и в конце концов эти точки пересечения придут в левый конец горизонтальной ступени $y = c$, который является граничной точкой поверхности S, что невозможно по предполагаемому строению поверхности. Если же точка пересечения была точкой участка второго типа, тогда точки пересечения новых образующих с γ будут сдвигаться вверх по этому участку и придут к вершине вертикального отрезка, которая тоже является граничной точкой поверхности S. Снова получаем противоречие, и тем самым доказано, что все образующие, исходящие из точек интервала $(0, x_0)$, параллельны образующей l_0 и заполняют полосу $0 \leqslant x \leqslant x_0$.

Теперь рассмотрим соответствующие образующие на самой поверхности. Покажем, следуя [2], что они тоже параллельны между собой. Для этого достаточно показать, что они не могут быть расходящимися прямыми. Действительно, на прообразах любой пары образующих на плоскости (x, y) есть пары точек, удаляющихся в бесконечность и сохраняющих расстояние d между собой. Образы этих точек на поверхности тоже имеют внутреннее расстояние, не превышающее d. Однако если прямые расходящиеся, то при удалении в бесконечность пространственное расстояние между ними неограниченно растёт, что невозможно, так как оно не больше внутреннего расстояния. Это противоречие показывает, что все образующие параллельны между собой, что и требовалось доказать.

Литература

[1] Бураго Ю. Д. Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 48. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 5—97.

[2] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.

[3] Шефель С. З. C^1-гладкие поверхности ограниченной внешней положительной кривизны // Сиб. мат. журн. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1122—1123.

[4] Hartman P., Nirenberg L. On spherical image maps whose Jacobian do not change sign // Amer. J. Math. — 1959. — Vol. 81, no. 4. — P. 901—920.

[5] Hartman P., Wintner A. On the fundamental equations of differential geometry // Amer. J. Math. — 1950. — Vol. 72, no. 4. — P. 757—772.

[6] Stoker J. J. Developable surfaces in the large // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — Vol. XIV. — P. 627—635.