Дискретизация многомерных подмногообразий, ассоциированных со Spin-значными спектральными задачами*

Я. Л. ЦЕСЛИНЬСКИЙ
Белостокский университет, Польша
e-mail: janek@alpha.uwb.edu.pl

УДК 514.7

Ключевые слова: нелинейные интегрируемые системы, ортогональные сети, изотермические сети, сети Гишара, дискретные аналоги ортогональных сетей (круговые сети), формула Сима—Тафеля, спектральные задачи, алгебра Клиффорда, группа Spin.

Аннотация

Мы рассматриваем большое семейство $\mathrm{Spin}(p,q)$-значных дискретных спектральных задач. Соответствующие дискретные сети, генерирующиеся так называемой формулой Сима—Тафеля, являются круговыми сетями (т. е. все элементарные четырёхугольники вписаны в окружности). Эти сети являются дискретным аналогом гладких многомерных погружений в $\mathbb{R}^m$, они включают изотермические поверхности, сети Гишара и некоторые другие семейства ортогональных сетей.

Abstract

J. L. Cieśliński, Discretization of multidimensional submanifolds associated with Spin-valued spectral problems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 1, pp. 253—262.

We present a large family of $\mathrm{Spin}(p,q)$-valued discrete spectral problems. The associated discrete nets generated by the so called Sym—Tafel formula are circular nets (i.e., all elementary quadrilaterals are inscribed into circles). These nets are discrete analogues of smooth multidimensional immersions in $\mathbb{R}^m$ including isothermic surfaces, Guichard nets, and some other families of orthogonal nets.

Одной из наиболее важных задач в классической дифференциальной геометрии было изучение специальных координат (сетей) на поверхностях (и подмногообразиях) и различных преобразований, связанных с именами Бьянки, Беклунда, Дарбу, Рибокура, Леви, Комбескюра, Йонаса и других [24, 25]. В последнее время можно заметить быстрое развитие дискретного аналога дифференциальной геометрии подмногообразий, сфокусированного на дискретных сетях и их преобразованиях [12, 21, 23]. Некоторые результаты в этом направлении были получены раньше [31]. Например, дискретизация псевдосферической поверхности известна уже более 50 лет [36]. Теперь ясно, что преобразования

*Работа поддержана Польским комитетом научных исследований, грант KBN 2 P03B 126 22.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 1, с. 253—262.

классической дифференциальной геометрии (и их дискретные аналоги) связаны с интегрируемой системой нелинейных уравнений с частными производными (и разностных уравнений) и их решениями — солитонами (см. [3, 30]).

В этой статье обсуждаются дискретные сети, т. е. отображения $F\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^m$. В случае $n = 2$ они также называются дискретными поверхностями. Отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, полученное в континуальном пределе из дискретной сети, соответствует особому выбору координат на некоторой гладкой поверхности.

Далее будут даны некоторые примеры. Дискретный аналог для асимптотических сетей характеризуется свойством, что любая точка F и все её четверо соседей (T_1F, T_2F, $T_1^{-1}F$ и $T_2^{-1}F$) являются компланарными. Здесь T_j обозначает сдвиг j-й переменной:

$$T_j f(m^1, \ldots, m^j, \ldots, m^n) = f(m^1, \ldots, m^j + 1, \ldots, m^n).$$

Дискретные псевдосферические поверхности определяются как дискретные асимптотические сети, все отрезки которых, соединяющие соседние точки, имеют равные длины [11, 36].

Под элементарным четырёхугольником мы понимаем четыре соседние точки F, T_kF, T_jF и T_kT_jF. Плоские четырёхугольники соответствуют в гладком случае сопряжённым сетям (т. е. таким координатам, в которых вторая фундаментальная форма диагональна [22]).

Круговые сети (такие, что каждый четырёхугольник вписан в некоторую окружность) соответствуют линиям кривизны, т. е. таким координатам, в которых обе фундаментальные формы диагональны [8, 20].

Изотермические погружения (характеризующиеся в гладком случае тем, что линии кривизны допускают конформную (изотермическую) параметризацию) в дискретном случае определяются требованием, что двойное отношение для любых элементарных четырёхугольников — отрицательная постоянная [10].

В этой статье, следуя процедуре, применённой ранее в гладком случае [18], мы отождествляем пространство $\mathbb{R}^m$ с векторным пространством V, порождающим алгебру Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$:

$$\mathbb{R}^m \ni (x^1, \ldots, x^m) \longleftrightarrow x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^m\mathbf{e}_m \in V \subset \mathrm{Cl}(V).$$

Напомним, что векторное пространство V, снабжённое квадратичной формой сигнатуры (p, q), $p + q = m$, порождает алгебру Клиффорда $\mathrm{Cl}(V) \simeq \mathrm{Cl}_{p,q}$. Умножение в алгебре Клиффорда $\mathrm{Cl}_{p,q}$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{e}_1^2 = \ldots = \mathbf{e}_p^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{p+1}^2 = \ldots = \mathbf{e}_{p+q}^2 = -1, \quad \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k\mathbf{e}_j \ \ (k \neq j)$$

(см. [28, 29]), т. е. для любых векторов Клиффорда

$$v = v^1\mathbf{e}_1 + \ldots v^m\mathbf{e}_m, \quad w = w^1\mathbf{e}_1 + \ldots + w^m\mathbf{e}_m$$

мы имеем

$$vw + wv = 2\langle v \mid w\rangle \equiv 2(v^1w^1 + \ldots + v^pw^p - v^{p+1}w^{p+1} - \ldots - v^{p+q}w^{p+q}),$$

где правая сторона понимается пропорциональной единичному элементу $\mathbf{1}$ алгебры $\mathrm{Cl}(V)$ (вообще, мы отождествляем скаляры, одномерное линейное пространство, натянутое на $\mathbf{1}$, с $\mathbb{R}$). В частности, клиффордов квадрат любого вектора вещественный.

Алгебра $\mathrm{Cl}(V)$ порождается $\mathbf{1}$, векторами $\mathbf{e}_k$ и мультивекторами $\mathbf{e}_{k_1}\ldots\mathbf{e}_{k_r}$ ($1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant p+q$, $1 < r \leqslant p+q$), и $\dim \mathrm{Cl}_{p,q} = 2^{p+q}$.

Группа Липшица $\Gamma(V)$ (известная также как группа Клиффорда) является мультипликативной группой (по отношению к произведению Клиффорда), порождённой векторами Клиффорда. Группа, порождённая единичными векторами, обозначается $\mathrm{Pin}(V)$, группа, порождённая произведениями чётного количества векторов, обозначается $\Gamma_0(V)$, и наконец, группа, порождённая произведениями чётного количества единичных векторов, обозначается $\mathrm{Spin}(V)$ [28, 29]. Очевидно, что

$$\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Pin}(V) \subset \Gamma(V) \subset \mathrm{Cl}(V), \quad V \subset \mathrm{Pin}(V), \quad \Gamma_0(V) \subset \Gamma(V).$$

Удобным способом описания круговых сетей является *двойное отношение* (см., например, [6]), и особенно его обобщение для евклидовых пространств («двойное отношение Клиффорда») [15]. Именно, для любой последовательности из четырёх точек в евклидовом пространстве мы определяем

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) := (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)^{-1}(X_3 - X_4)(X_4 - X_1)^{-1}. \tag{1}$$

Как правило, $Q(X_1, X_2, X_3, X_4)$ является элементом $\Gamma_0(V)$. В псевдоевклидовом случае ($pq \neq 0$) существуют необратимые (изотропные) векторы, таким образом, двойное отношение не всегда корректно определено.

Можно легко доказать следующее утверждение ([15], ср. [10]).

Предложение 1. *Двойное отношение Клиффорда $Q(X_1, X_2, X_3, X_4)$ вещественно (т. е. пропорционально единичному элементу $\mathrm{Cl}(V)$) тогда и только тогда, когда X_1, X_2, X_3, X_4 лежат на окружности или коллинеарны.*

Таким образом, двойное отношение Клиффорда может быть использовано для характеристики дискретных аналогов сетей кривизны, изотермических поверхностей и т. д. Стороны элементарных четырёхугольников заданы D_kF, D_jF, T_kD_jF, T_jD_kF, где $D_kF := T_kF - F$. Мы определим

$$Q_{kj}(F) := Q(F, T_kF, T_{kj}F, T_jF) = (D_kF)(T_kD_jF)^{-1}(T_jD_kF)(D_jF)^{-1} \tag{2}$$

и сформулируем такое следствие.

Предложение 2. *Сеть $F = F(m^1, \ldots, m^n)$ является круговой сетью тогда и только тогда, когда $Q_{kj}(F) \in \mathbb{R}$ для любых $k, j \in 1, \ldots, n$.*

Интересная связь между подмногообразиями (или дискретными сетями) и интегрируемыми системами следует из формулы Сима—Тафеля $F = \Psi^{-1}\Psi_{,\lambda}$ [14, 33, 34] («пары Лакса»), где Ψ есть решение некоторой линейной задачи со спектральным параметром λ. Эта формула применялась для дискретизации псевдосферических и изотермических поверхностей [10, 11].

Предложение 3. *Рассмотрим алгебру Клиффорда* $\mathrm{Cl}(V \oplus W)$, *где* V, W — *векторные пространства* ($\dim V = q$, $\dim W = r$), *снабжённые квадратичными формами. Пусть* Ψ *есть решение дискретной линейной задачи*

$$T_j \Psi = U_j \Psi \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где $n \leqslant q$, $U_j = U_j(m_1, \ldots, m_n, \lambda) \in \Gamma_0(V)$ *имеет следующее разложение в ряд Тейлора в окрестности данного* λ_0:

$$\begin{gathered} U_j = U_j^0 + (\lambda - \lambda_0) U_j^1 + (\lambda - \lambda_0)^2 U_j^2 + \ldots, \\ U_j^0 = \mathbf{e}_j B_j, \quad U_j^1 = \mathbf{e}_j A_j, \qquad A_j \in W, \quad B_j \in V, \quad \mathbf{e}_j \in V, \end{gathered} \tag{4}$$

A_j, B_j *предполагаются обратимыми,* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — *взаимно ортогональные единичные векторы. Мы определяем дискретную сеть* F *по формуле Сима—Тафеля*

$$F = \Psi^{-1} \Psi_{,\lambda}|_{\lambda = \lambda_0}, \tag{5}$$

и предполагаем, что по крайней мере в одной точке $(m_0^1, \ldots, m_0^n)$ *имеем*

$$\Psi(m_0^1, \ldots, m_0^n, \lambda_0) \in \Gamma_0(V), \quad \Psi(m_0^1, \ldots, m_0^n, \lambda) \in \Gamma_0(V \oplus W).$$

Тогда

- $(F(m_1, \ldots, m_n) - F(m_0^1, \ldots, m_0^n)) \in V \wedge W$;
- F *есть круговая сеть тогда и только тогда, когда для* $k \neq j$

$$A_k (T_k A_j)^{-1} (T_j A_k) A_j^{-1} \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Таким образом, F *может быть всегда отождествлена с сетью в* $V \wedge W$.

Доказательство. Условия совместности ($T_k T_j \Psi = T_j T_k \Psi$) для линейной системы (3) имеют вид

$$(T_k U_j) U_k = (T_j U_k) U_j, \tag{7}$$

или, если разложить (7) в ряд Тейлора в окрестности $\lambda = \lambda_0$,

$$\begin{gathered} (T_k U_j^0) U_k^0 = (T_j U_k^0) U_j^0, \\ (T_k U_j^1) U_k^0 + (T_k U_j^0) U_k^1 = (T_j U_k^1) U_j^0 + (T_j U_k^0) U_j^1, \\ (T_k U_j^2) U_k^0 + (T_k U_j^1) U_k^1 + (T_k U_j^0) U_k^2 = (T_j U_k^2) U_j^0 + (T_j U_k^1) U_j^1 + (T_j U_k^0) U_j^2 \end{gathered} \tag{8}$$

и т. д. Мы обозначим $\Psi_0 := \Psi(m^1, \ldots, m^n, \lambda_0)$. Учитывая, что $U_k(\lambda_0) = U_k^0$, $U_{k,\lambda}(\lambda_0) = U_k^1$ и $T_j \Psi_0 = U_j^0 \Psi_0$, мы имеем

$$\begin{aligned} D_k F &= (T_k \Psi)^{-1} (T_k \Psi)_{,\lambda}|_{\lambda = \lambda_0} - \Psi^{-1} \Psi_{,\lambda}|_{\lambda = \lambda_0} = \Psi_0^{-1} (U_k^0)^{-1} U_k^1 \Psi_0, \\ T_j D_k F &= \Psi_0^{-1} (U_j^0)^{-1} (T_j U_k^0)^{-1} T_j U_k^1 U_j^0 \Psi_0, \\ (T_k D_j F)^{-1} &= \Psi_0^{-1} (U_k^0)^{-1} (T_k U_j^1)^{-1} (T_k U_j^0) U_k^0 \Psi_0. \end{aligned}$$

Применяя первое уравнение из системы (8), мы получаем

$$(T_k D_j F)^{-1} (T_j D_k F) = \Psi_0^{-1} (U_k^0)^{-1} (T_k U_j^1)^{-1} (T_j U_k^1) U_j^0 \Psi_0$$

и, наконец,

$$Q_{kj}(F) = \Psi_0^{-1}\big((U_k^0)^{-1}U_k^1(U_k^0)^{-1}(T_kU_j^1)^{-1}(T_jU_k^1)U_j^0(U_j^1)^{-1}U_j^0\big)\Psi_0. \qquad (9)$$

Для дальнейшего упрощения мы используем (4) и учитываем, что любой элемент из V антикоммутирует с любым элементом из W:

$$Q_{kj}(F) = -\Psi_0^{-1}B_k^{-2}A_k(T_kA_j)^{-1}(T_jA_k)A_j^{-1}B_j^2\Psi_0.$$

Таким образом, используя, что $V \perp W$ и $\Psi_0 \in \Gamma_0(V)$ (так как $U_j^0 \in \Gamma_0(V)$), мы получаем равенство

$$Q_{kj}(F) = -B_k^{-2}B_j^2A_k(T_kA_j)^{-1}(T_jA_k)A_j^{-1},$$

которое заканчивает доказательство второго утверждения предложения 3.

Для доказательства первого утверждения мы покажем, что $(T_j(F) - F) \in$ $\in V \wedge W$. Действительно,

$$T_jF - F = ((U_j\Psi)^{-1}(U_j\Psi)_{,\lambda} - \Psi^{-1}\Psi_{,\lambda})|_{\lambda=\lambda_0} = \Psi_0^{-1}(U_j^0)^{-1}U_j^1\Psi_0 = \Psi_0^{-1}B_j^{-1}A_j\Psi_0.$$

Чтобы закончить доказательство, заметим, что A_j коммутирует с любым элементом из $\Gamma_0(V)$ и $\Psi_0^{-1}B_j^{-1}\Psi_0 \in V$. Таким образом, $\Psi_0^{-1}B_j^{-1}A_j\Psi_0 \in V \wedge W$. $\square$

Предложение 4. *Если* $U_k^2 = 0$ (*в частности, если* U_k *линейна по* λ), *то* F, *определённая формулами* (3), (4), (5), *является круговой сетью.*

Доказательство. Мы собираемся показать, что в этом случае условие (6) следует из условия совместности. Действительно, так как $U_k^2 = 0$, то из (8) мы получаем равенство

$$(T_kU_j^1)U_k^1 = (T_jU_k^1)U_j^1,$$

которое может быть записано как

$$(T_kA_j)A_k = -(T_jA_k)A_j.$$

Следовательно,

$$A_k^{-1}(T_kA_j)^{-1}(T_jA_k)A_j = -1$$

и

$$A_k(T_kA_j)^{-1}(T_jA_k)A_j^{-1} = -A_k^2A_j^{-2} \in \mathbb{R}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Предложение 5. *Если* $\dim V = 1$, *то* F, *определённая формулами* (3), (4), (5), *является круговой сетью в* V.

Доказательство. Если $\dim V = 1$, то условие (6) очевидно и $W \wedge V \simeq V$. $\square$

Предложение 6. *Если существует дискретная сеть* $F_A\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^m$, *такая что* $D_kF_A = A_k$, *то предложение* 3 *может быть переформулировано следующим образом*: F *есть круговая сеть тогда и только тогда, когда* F_A *есть круговая сеть.*

Как показывает следующее предложение, всегда возможно сведение к группе $\mathrm{Spin}(V \oplus W)$.

Предложение 7. *Если* B_j *и* A_j *— единичные векторы (для* $j = 1, \ldots, n$*), то* $\Psi_0 = \Psi(m^1, \ldots, m^n, \lambda_0) \in \mathrm{Spin}(V)$ *и* F *принимает значения в* $\mathrm{Spin}(V \oplus W)$.

Фактически, бивекторы вида $\hat{v} \wedge \hat{w}$ (где $\hat{v}$, $\hat{w}$ — единичные векторы из V) принадлежат и $\mathrm{Spin}(V)$, и алгебре Ли группы $\mathrm{Spin}(V)$. Таким образом, F принимает значения также и в алгебре Ли группы $\mathrm{Spin}(V \oplus W)$, если выполнены предположения предложения 7.

Напомним, что так называемый автоморфизм β алгебры Клиффорда (известный также как обращение) [28, 29] определяется следующим образом:

$$\beta(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k) := \mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k-1} \cdots \mathbf{v}_1,$$
$$\beta(c_1 X + c_2 Y) = c_1 \beta(X) + c_2 \beta(Y)$$

для любых $\mathbf{v}_j \in V$, $X, Y \in \mathrm{Cl}(V)$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Группа $\mathrm{Spin}(V)$ состоит из произведений единичных векторов, это означает, что $X \in \mathrm{Spin}(V)$ тогда и только тогда, когда $\beta(X)X = \pm 1$.

$\Gamma(V \oplus W)$-значная спектральная проблема, задаваемая (3), (4), всегда может быть трансформирована в $\mathrm{Spin}(V \oplus W)$-значную спектральную проблему $T_k \Phi = \hat{U}_k \Phi$ путём преобразования $\Phi = g\Psi$, где $g := |\beta(\Psi)\Psi|^{-1/2}$ — вещественная функция и $\hat{U}_k := g^{-1}(T_k g) U_k$.

Пусть $P \colon W \to \mathbb{R}$ — проектор (линейный гомоморфизм векторного пространства, для которого выполнено $P^2 = P$). Мы расширим его действие на $V \wedge W$ естественным образом. Именно, если $\mathbf{v}_k \in V$ и $\mathbf{w}_k \in W$, то

$$P\left(\sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{w}_k\right) := \sum_k P(\mathbf{w}_k) \mathbf{v}_k.$$

Предложение 8. *Пусть* P *— проектор и* F *определяется формулами* (3), (4), (5). *Тогда* $P(F)$ *есть круговая сеть.*

Доказательство. Обозначим $P(A_k) = a_k \in \mathbb{R}$. Чтобы вычислить $Q_{kj}(P(F))$, запишем

$$D_k P(F) = P(D_k F) = a_k \Psi_0 B_k^{-1} \Psi_0,$$
$$(T_k D_j P(F))^{-1} = (T_k a_j)^{-1} \Psi_0^{-1} B_k^{-1} \mathbf{e}_k^{-1} (T_k B_j) \mathbf{e}_k B_k \Psi_0,$$
$$T_j(D_k(F)) = (T_j a_k) \Psi_0^{-1} B_j^{-1} \mathbf{e}_j^{-1} (T_j B_k)^{-1} \mathbf{e}_j B_j \Psi_0,$$
$$(D_j P(F))^{-1} = a_j^{-1} \Psi_0^{-1} B_j \Psi_0.$$

Условия совместности

$$(T_k U_j^0) U_k^0 = (T_j U_k^0) U_j^0$$

с учётом того, что $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k^{-1} = -\mathbf{e}_k^{-1} \mathbf{e}_j$, эквивалентны условиям

$$\mathbf{e}_k^{-1} (T_k B_j) \mathbf{e}_k B_k = -\mathbf{e}_j^{-1} (T_j B_k) \mathbf{e}_j B_j.$$

Таким образом,

$$Q_{kj}(P(F)) = -\frac{a_k(T_j a_k)}{a_j(T_k a_j)}\Psi_0^{-1}B_k^{-1}B_k^{-1}B_j B_j \Psi_0 = -\frac{a_k(T_j a_k)B_j^2}{a_j(T_k a_j)B_k^2} \in \mathbb{R},$$

что и доказывает предложение (ср. [15]). □

Далее мы рассмотрим несколько примеров, где U_j являются рациональными относительно λ (обычно даже линейными по λ). Все предположения предложения 3 считаются выполненными. Обозначим через $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q$ и $\mathbf{e}_{q+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q+r}$ ортонормальные базисы в V и W соответственно.

Соответствующие гладкие (континуальные) случаи обсуждались в [4, 18, 19] и (с различными подходами) в [5, 10, 13, 26, 27, 32], а также в [24, 25].

Если U_j линейны по λ, то нетрудно построить преобразование Дарбу—Беклунда (подобно гладкому случаю [7]). Детали, аналогичные специальному случаю дискретной изотермической поверхности [17], будут представлены в другой работе.

Пример 1 (дискретные изотермические поверхности в $\mathbb{R}^q$).

$$V \simeq \mathbb{R}^q, \quad W \simeq \mathbb{R}^{1,1}, \quad n = 2, \quad r = 2, \quad U_j = U_j^0 + \lambda U_j^1,$$
$$P(\mathbf{e}_{q+1}) = 1, \quad P(\mathbf{e}_{q+2}) = \pm 1.$$

Гладкие изотермические погружения допускают изотермическую (изометрическую) параметризацию линии кривизны. В этих координатах

$$ds^2 = \Lambda((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$$

и вторая фундаментальная форма диагональна.

Пример 2 (дискретные сети Гишара в $\mathbb{R}^q$).

$$V \simeq \mathbb{R}^q, \quad W \simeq \mathbb{R}^{2,1}, \quad n = 3, \quad r = 3, \quad U_j = U_j^0 + \lambda U_j^1,$$
$$P(\mathbf{e}_{q+1}) = \cos\varphi_0, \quad P(\mathbf{e}_{q+2}) = \sin\varphi_0, \quad P(\mathbf{e}_{q+3}) = \pm 1, \quad \varphi_0 = \mathrm{const}.$$

Сети Гишара в $\mathbb{R}^3$ характеризуются условием $H_1^2 + H_2^2 = H_3^2$, где H_j — коэффициенты Ламе, т. е.

$$ds^2 = H_1^2(dx^1)^2 + H_2^2(dx^2)^2 + H_3^2(dx^3)^2.$$

Пример 3 (дискретизация некоторого класса ортогональных сетей в $\mathbb{R}^n$).

$$V \simeq \mathbb{R}^n, \quad W \simeq \mathbb{R}^n, \quad q = n, \quad r = n, \quad U_j = U_j^0 + \lambda U_j^1,$$
$$P(\mathbf{e}_{n+k}) = 1, \quad P(\mathbf{e}_{n+j}) = 0 \quad (j \neq k).$$

Этот класс в гладком случае определяется условием $H_1^2 + \ldots + H_n^2 = \mathrm{const}$, где H_j — коэффициенты Ламе, т. е.

$$ds^2 = H_1^2(dx^1)^2 + \ldots + H_n^2(dx^n)^2.$$

Пример 4 (дискретные n-пространства Лобачевского в $\mathbb{R}^{2n-1}$).

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad V_1 \simeq \mathbb{R}^n, \quad V_2 \simeq \mathbb{R}^{n-1}, \quad W \simeq \mathbb{R}, \quad \lambda_0 = 1,$$
$$U_j = \mathbf{e}_j \left(\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) A_j + \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) P_j + Q_j \right),$$
$$\mathbf{e}_j \in V_1, \quad Q_j \in V_1, \quad P_j \in V_2, \quad A_j \in W, \quad P_j + Q_j = B_j.$$

В континуальном пределе мы получим погружения с постоянной отрицательной секционной кривизной (пространства Лобачевского) [1, 2, 35]. Дискретный случай разобран более подробно в [16].

Во всех представленных случаях континуальный предел, осуществляемый предположением $\varepsilon \to 0$, где ε — размер решётки $\mathbb{Z}^n$ (ср. [9,10]), кажется справедливым, потому что все алгебраические отношения (включая интегрируемость) сохраняются нашей дискретизацией.

Однако чисто геометрическая характеристика известна только в случае изотермических поверхностей: двойное отношение является гармоническим [10]. Таким образом, геометрическая характеристика дискретных сетей, представленных в этой статье, является важной открытой проблемой. Общая характеристика семейства гладких подмногообразий, соответствующих дискретным сетям, описанным в предложении 3 (см. также [4]), также ещё не дана.

Благодарности. Написать эту работу меня побудил профессор И. Х. Сабитов во время его работы в исследовательской группе «Дифференциальные уравнения в геометрии подмногообразий и математической физике» (функционировавшей 8—19 ноября 2004 г. под руководством профессора Ю. А. Аминова в Банаховском центре в Варшаве, Польша), где я представлял результаты работы [4].

Литература

[1] Аминов Ю. А. Погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236. — С. 521—524.

[2] Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство // Мат. сб. — 1980. — Т. 111 (153). — С. 402—433.

[3] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.

[4] Кеслински Я. Л. Геометрия подмногообразий, полученных из Spin-значных спектральных задач // Теор. и матем. физ. — 2003. — Т. 137, № 1. — С. 66—77.

[5] Ablowitz M. J., Beals R., Tenenblat K. On the solution of the generalized wave and generalized sine-Gordon equations // Stud. Appl. Math. — 1986. — Vol. 74. — P. 177—203.

[6] Ahlfors L. V. Complex Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1953.

[7] Biernacki W., Cieśliński J. L. A compact form of the Darboux—Bäcklund transformation for some spectral problems in Clifford algebras // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 288. — P. 167—172.

[8] Bobenko A. Discrete conformal maps and surfaces // Symmetries and Integrability of Difference Equations / P. A. Clarkson and F. Nijhoff (eds.). — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. — P. 97—108.

[9] Bobenko A. I., Matthes D., Suris Yu. B. Discrete and smooth orthogonal systems: C^∞-approximation // Internat. Math. Res. Notices. — 2003. — No. 45. — P. 2415—2459.

[10] Bobenko A. I., Pinkall U. Discrete isothermic surfaces // J. Reine Angew. Math. — 1996. — Vol. 475. — P. 187—208.

[11] Bobenko A. I., Pinkall U. Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation // J. Differential Geom. — 1996. — Vol. 43. — P. 527—611.

[12] Bobenko A. I., Pinkall U. Discretization of surfaces and integrable systems // Discrete Integrable Geometry and Physics / A. I. Bobenko, R. Seiler (eds.). — Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. — P. 3—58.

[13] Brück M., Du X., Park J., Terng C. L. The submanifold geometries associated to Grassmanian systems. — 2000. — arXiv:math.DG/0006216.

[14] Cieśliński J. A generalized formula for integrable classes of surfaces in Lie algebras // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38. — P. 4255—4272.

[15] Cieśliński J. The cross ratio and Clifford algebras // Adv. Appl. Clifford Algebras. — 1997. — Vol. 7. — P. 133—139.

[16] Cieśliński J. The spectral interpretaton of n-spaces of constant negative curvature immersed in $\mathbb{R}^{2n-1}$ // Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 236. — P. 425—430.

[17] Cieśliński J. The Bäcklund transformation for discrete isothermic surfaces // Symmetries and Integrability of Difference Equations / P. A. Clarkson, F. Nijhoff (eds.). — Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1999. — P. 109—121.

[18] Cieśliński J. L. A class of linear spectral problems in Clifford algebras // Phys. Lett. A. — 2000. — Vol. 267. — P. 251—255.

[19] Cieśliński J. L. How isothermic surfaces helped to understand other integrable systems // Rend. Sem. Mat. Messina. — 2000. — Supplement «Atti del Congresso Internazionale in onore di Pasquale Calapso», proceedings of a Messina conference of 1998. — P. 135—147.

[20] Cieśliński J., Doliwa A., Santini P. M. The integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are multidimensional circular lattices // Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 235. — P. 480—488.

[21] Doliwa A. Integrable multidimensional discrete geometry // Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories / H. Aratyn, A. S. Sorin (eds.). — Kluwer Academic, 2001. — P. 355—389.

[22] Doliwa A., Santini P. M. Multidimensional quadrilateral lattices are integrable // Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 233. — P. 365—372.

[23] Doliwa A., Santini P. M., Mañas M. Transformations of quadrilateral lattices // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41. — P. 944—990.

[24] Eisenhart L. P. Transformations of Surfaces. — Princeton Univ. Press, 1923.

[25] Eisenhart L. P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. — New York: Dover, 1960.

[26] Ferus D., Pedit F. Curved flats in symmetric spaces // Manuscripta Math. — 1996. — Vol. 91. — P. 445—454.

[27] Hertrich-Jeromin U. On conformally flat hypersurfaces and Guichard's nets // Beitr. Algebra Geom. — 1994. — Vol. 35. — P. 315—331.

[28] Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications / R. Abłamowicz, G. Sobczyk (eds.). — Boston: Birkhäuser, 2004.

[29] Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. — Second edition. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.

[30] Rogers C., Schief W. K. Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

[31] Sauer R. Differenzengeometrie. — Berlin: Springer, 1970.

[32] Schief W. K. Isothermic surfaces in spaces of arbitrary dimension: Integrability, discretization and Bäcklund transformations. A discrete Calapso equation // Stud. Appl. Math. — 2001. — Vol. 106. — P. 85—137.

[33] Sym A. Soliton surfaces // Lett. Nuovo Cimento. — 1982. — Vol. 33. — P. 394—400.

[34] Sym A. Soliton surfaces and their application. Soliton geometry from spectral problems // Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems / R. Martini (ed.). — Berlin: Springer, 1985. — (Lect. Notes Phys.; Vol. 239). — P. 154—231.

[35] Tenenblat K., Terng C. L. Bäcklund theorem for n-dimensional submanifolds of $\mathbb{R}^{2n-1}$ // Ann. Math. — 1980. — Vol. 111. — P. 477—490.

[36] Wunderlich W. Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung // Sitzungsber. Ak. Wiss. — 1951. — Bd. 160. — S. 39—77.