Почти вполне разложимые группы с примарным регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
e-mail: kate@robotek.ru, kblag2002@yahoo.com

УДК 512.541+512.553.5

Ключевые слова: абелева группа без кручения конечного ранга, почти вполне разложимая группа, регулятор, кольцо эндоморфизмов.

Аннотация

Для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы кольцевого типа X с регулятором A и p-примарным регуляторным фактором X/A экспоненты $p^l = \exp X/A$ ($l > 1$ — натуральное число) хорошо известно, что $p^l \operatorname{End} A \subset \operatorname{End} X \subset \operatorname{End} A$. Это означает, что $\operatorname{End} X = \operatorname{End} X \cap \operatorname{End} A$ и $p^l \operatorname{End} A = \operatorname{End} X \cap p^l \operatorname{End} A$. Обобщая, мы вводим в рассмотрение цепь

$$\operatorname{End} X = \mathcal{E}_A^{(l)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-1)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-2)} \subset \ldots \subset \mathcal{E}_A^{(1)} \subset \mathcal{E}_A^{(0)} = \operatorname{End} A,$$

удовлетворяющую условию $p^{l-k}\mathcal{E}_A^{(k)} = \operatorname{End} X \cap p^{l-k} \operatorname{End} A$, и находим группы X'_k и $\widetilde{X_k}$, для которых $\mathcal{E}_A^{(k)} = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$, $k = 1, 2, \ldots, l-1$.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, Almost completely decomposable groups with primary regulator quotients and their endomorphism rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 17—38.

Let X be a block-rigid almost completely decomposable group of ring type with regulator A and p-primary regulator quotient X/A such that $p^l = \exp X/A$ with natural $l > 1$. From the well-known fact $p^l \operatorname{End} A \subset \operatorname{End} X \subset \operatorname{End} A$ it follows that $\operatorname{End} X = \operatorname{End} X \cap \operatorname{End} A$ and $p^l \operatorname{End} A = \operatorname{End} X \cap p^l \operatorname{End} A$. Generalizing these, we determine the chain $\operatorname{End} X = \mathcal{E}_A^{(l)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-1)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-2)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}_A^{(1)} \subset \mathcal{E}_A^{(0)} = \operatorname{End} A$, satisfying $p^{l-k}\mathcal{E}_A^{(k)} = \operatorname{End} X \cap p^{l-k} \operatorname{End} A$, and construct groups X'_k and $\widetilde{X_k}$ such that $\mathcal{E}_A^{(k)} = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$, where $k = 1, 2, \ldots, l-1$.

1. Введение

Среди почти вполне разложимых групп группы с примарным регуляторным фактором играют особую роль. В данной статье устанавливаются определённые связи между такими группами и их кольцами эндоморфизмов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 17—38.

Любая почти вполне разложимая группа X содержит единственную вполне характеристическую подгруппу, её регулятор $A = R(X)$, которая является вполне разложимой группой, такой что X/A — конечная группа экспоненты $e = \exp X/A$, имеющей каноническое разложение

$$e = \prod_{p \in P} p^{l_p}$$

(P — конечное множество простых чисел). Хорошо известно, что

$$X = \sum_{p \in P} X_p,$$

т. е. X является суммой почти вполне разложимых групп X_p с одним и тем же регулятором A и p-примарными регуляторными факторами X_p/A, точнее $\exp(X_p/A) = p^{l_p}$. С другой стороны,

$$\operatorname{End} X = \bigcap_{p \in P} \operatorname{End} X_p.$$

Это означает, что изучение групп с примарным регуляторным фактором и их колец эндоморфизмов является необходимым шагом в исследовании почти вполне разложимых групп в целом. В этой связи мы отмечаем важный результат Т. Фатикони и Ф. Шульца, в котором установлена единственность прямых разложений на неразложимые слагаемые с точностью до почти изоморфизма для почти вполне разложимых групп с примарным регуляторным фактором (см. [18, теорема 3.5]). Для таких групп X некоторого специального вида установлена зависимость их разложений от ранга группы X/A (см. [12]).

Заметим, что «патологические», как их принято называть, прямые разложения одной и той же группы (т. е. не допускающие существования подходящей перестановки слагаемых, приводящей к установлению почти изоморфизма между слагаемыми с одинаковыми номерами) имеют место только в случае групп, для которых регуляторный фактор $X/R(X)$ не является примарным (см. [9, теоремы 90.1, 90.2, 90.3; 19, 13.1; 17; 21; 10], а также [1, 2, 4, 13, 16]). Однако некоторые свойства естественно обобщаются с групп с примарным фактором по регулятору на произвольную почти вполне разложимую группу. Тот факт, что кольца эндоморфизмов почти изоморфных почти вполне разложимых групп, рассматриваемые как абелевы группы без кручения, также почти изоморфны, был доказан сначала для групп с примарным регуляторным фактором и затем распространён на общий случай (см. [14]).

Поскольку кольца эндоморфизмов почти вполне разложимых групп являются также почти вполне разложимыми группами (см. [15, предложение 3.1; 20, лемма 3.1]), особый интерес представляет выявление групповой структуры этих колец и получение для них типичных характеристик, касающихся почти вполне разложимых групп. С этой целью в [3, 3.3,3,4] было получено описание регулятора аддитивной группы $\operatorname{End} X^+$ кольца эндоморфизмов блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X с примарным регуляторным фактором. Если регуляторная экспонента $\exp(X/A)$ равняется p^l, то $p^l \operatorname{End} A \subset \operatorname{End} X \subset \operatorname{End} A$, и в общем случае $p^l \operatorname{End} A^+$ является вполне разложимой подгруппой группы $\operatorname{End} X^+$ конечного индекса, но не её регулятором. Одним из главным результатов данной статьи является построение цепи

$$\operatorname{End} X = \mathcal{E}_A^{(l)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-1)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-2)} \subset \ldots \subset \mathcal{E}_A^{(l)} \subset \mathcal{E}_A^{(0)} = \operatorname{End} A,$$

для которой $p^{l-k}\phi \in \operatorname{End} X$ тогда и только тогда, когда $\phi \in \mathcal{E}_A^{(k)}$. Оказалось, что члены цепи $\mathcal{E}_A^{(k)}$ совпадают с $\operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ для некоторых почти вполне разложимых групп с регуляторами, изоморфными A. Эти группы X'_k и $\widetilde{X_k}$, $k = 0, 1, \ldots, l$, также составляют соответственно две различные цепи с наименьшими членами $X = X'_l = \widetilde{X_l}$ и наибольшими $X'_0 = \widetilde{X_0} \cong A$. Совместно с групповыми цепями целесообразно рассматривать соответствующие цепи, состоящие из их колец эндоморфизмов, что и явилось главным инструментом настоящего исследования.

На основе включения $\operatorname{Aut}(\operatorname{End} X) \subset \operatorname{Aut}(\operatorname{End} A)$, доказанного в [3], мы смогли определить разбиение кольца $\operatorname{End} A$ на $l+1$ попарно дизъюнктных непустых областей, инвариантных относительно всех $\mathcal{B}$ из $\operatorname{Aut}(\operatorname{End} X)$.

В конце статьи все результаты наглядно подтверждаются для специального класса почти вполне разложимых групп X, т. е. групп с циклическим примарным регуляторным фактором, с использованием матричного представления их колец эндоморфизмов.

Заметим, что сам предмет исследования, т. е. рассмотрение почти вполне разложимых групп вместе с их кольцами эндоморфизмов, чётко просматривается в работе [6], в которой даётся всесторонний анализ взаимосвязей между абелевыми группами и их кольцами эндоморфизмов, в том числе для класса абелевых групп без кручения конечного ранга в целом, к которому относятся почти вполне разложимые группы.

В [7] даются общие сведения о конечных и бесконечных группах. В [9,19] содержатся все необходимые определения и традиционные обозначения, некоторые из них мы помещаем здесь для удобства читателя.

Как обычно, $\mathbb{Z}$ — это группа (кольцо) всех целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа (поле) рациональных чисел. Для группы, порождённой некоторым множеством элементов, мы используем обозначение $\langle \ldots \rangle$, ранг группы X обозначается $\operatorname{rk} X$. Как обычно, $V \subset X$ означает, что V — подгруппа X (возможно равенство $V = X$), а $V_* = \{g \in X\colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$ обозначает *сервантную оболочку* V в X. Подгруппа V называется *сервантной* подгруппой в X, если $V_* = V$.

Прямая сумма групп без кручения ранга 1 называется *вполне разложимой группой*. *Почти вполне разложимая группа* X — это абелева группа без кручения конечного ранга, которая содержит вполне разложимую подгруппу A, причём X/A является конечной группой.

Любая почти вполне разложимая группа X содержит особую вполне разложимую подгруппу $R(X)$ конечного индекса, изоморфную A или даже с ней совпадающую, которая является её вполне характеристической подгруппой и называется *регулятором* X. Вместе с регулятором вводятся числа: *регуляторный индекс* $[X : R(X)]$ и *регуляторная экспонента* (*регуляторный показатель*) группы X, равная $\exp X/R(X)$, а сама фактор-группа $X/R(X)$ называется *регуляторным фактором*. Если $X/R(X)$ является циклической группой, то X называется почти вполне разложимой группой с *циклическим регуляторным фактором* и для неё $[X : R(X)] = \exp X/R(X)$. Для удобства A всегда будет обозначать регулятор $R(X)$.

Тип элемента $g \in X$ $(g \neq 0)$, обозначаемый $\mathrm{tp}_X\, g$, можно определить как класс изоморфизма рациональной группы τ, которая изоморфна $\langle g\rangle_*$ в X и содержит $\mathbb{Z}$. Тогда мы можем сказать, что элемент g имеет тип τ, $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$. Далее, $\mathrm{tp}_X\, g$ совпадает с типом группы $\mathrm{tp}\, X$, если X — однородная группа. Следуя стандартным определениям, введём также $X^*(\tau) = \sum\limits_{\sigma>\tau} X(\sigma)$ и $X^\sharp(\tau)$ — сервантную оболочку $X^*(\tau)$ в X. Тип τ называется *критическим* для группы без кручения X и является элементом множества $T_{\mathrm{cr}}(X)$, если $X(\tau)/X^\sharp(\tau) \neq 0$ (см. [19, с. 37, определение 2.4.6]).

Мы называем группу X группой *кольцевого* типа, если $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит только из идемпотентных типов (т. е. тех, которые могут представляться характеристиками, состоящими только из символов 0 и ∞ (см. [19, с. 13; 9, раздел 85])). Если простому числу p соответствует символ ∞, мы пишем $\tau(p) = \infty$.

Мы говорим, что X является *блочно-жёсткой* почти вполне разложимой группой, если множество $T_{\mathrm{cr}}(X)$ представляет собой антицепь (т. е. состоит из попарно несравнимых типов). В этом случае регулятор A тоже блочно-жёсткая группа, так как $T_{\mathrm{cr}}(A) = T_{\mathrm{cr}}(X)$. Далее, $A(\tau) = A_\tau$ является однородной подгруппой типа τ, сервантной в X, и её ранг называется τ-рангом группы A, которая представляется в виде прямой суммы своих однородных компонент: $A = \bigoplus\limits_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(X)} A_\tau$. Если при этом $\mathrm{rk}\, A_\tau = 1$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, то группы A и X называются *жёсткими* группами.

Если целое число q делится на целое p, мы будем писать $p \mid q$. Как обычно, $|c|$ обозначает порядок элемента $c \in C$ в группе, $|C|$ — мощность группы C, последнее обозначение используется только для конечных групп (множеств). Числовой интервал, содержащий свои границы, обозначается как $[l, s]$.

Обозначение E^+ используется для аддитивной группы кольца E. В частности, нам понадобится $\mathrm{End}\, X^+$, аддитивная группа кольца эндоморфизмов почти вполне разложимой группы X. Традиционно $\mathrm{Aut}\, X$ обозначает мультипликативную группу её автоморфизмов.

Мы рассматриваем кольца $\mathrm{M}_n(K)$, состоящие из матриц размерности n с элементами из кольца (поля) K. Если матрица B принадлежит некоторому множеству матриц определённой формы, данной в скобках $[\ldots]$, мы будем писать

$$B \in \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Следуя [8, гл. 1, предложение 3], мы можем представлять кольца эндоморфизмов вполне разложимых групп как в виде прямой суммы идеалов

$$K = \bigoplus_{\tau} K_\tau,$$

так и в виде прямого произведения колец

$$K \cong \prod_{\tau} K'_\tau,$$

где $K'_\tau \cong K_\tau$, иногда будет удобно использовать обозначение $\prod^{\otimes}$ для прямого произведения. Тождественное отображение I будет упоминаться при обсуждении колец эндоморфизмов почти вполне разложимых групп.

Поскольку для любого элемента a абелевой группы X без кручения и любого натурального числа q существует не более одного элемента $b \in X$, для которого $qb = a$, мы можем обозначать b как $\frac{a}{q}$. Если такой элемент $\frac{a}{q}$ существует, мы говорим, что a делится на q в X, и пишем $q \mid a$. Наибольшее целое число $k \geqslant 0$, для которого существует $\frac{a}{p^k}$, где p — простое число, будет называться *p-высотой* элемента a в X (см. [19, 2.1]). Другими словами, p^k — это наивысшая степень p, делящая a.

Мы распространяем это обозначение на случай всей группы X, погружая её в делимую оболочку $\mathbb{Q}X = X \otimes \mathbb{Q}$ и записывая группу Y в виде $\frac{X}{q}$, если $qY = X$. Заметим, что размерность векторного пространства $\mathbb{Q}X$ совпадает с рангом группы X.

При рассмотрении в конце статьи колец эндоморфизмов почти вполне разложимых групп с циклическими регуляторными факторами нам понадобятся числовые инварианты почти изоморфизма. Поэтому уместно напомнить, что почти изоморфизм групп (записываемый как $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$) означает эквивалентность, более слабую, чем изоморфизм ($X \cong Y$), которая тем не менее достаточно точно отражает свойства прямых разложений (см. [11, теорема 7.16; 19, определение 9.1.2, теорема 9.1.4]). Это фундаментальное понятие традиционно используется в решении проблем классификации в теории почти вполне разложимых групп.

2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем класс $\mathcal{A}$ блочно-жёстких почти вполне разложимых групп X кольцевого типа, которые имеют один и тот же регулятор, вполне разложимую группу

$$A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau \in T} n_\tau \tau,$$

где $T = T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$ состоит из попарно несравнимых идемпотентных типов и n_τ обозначает ранг τ-однородной компоненты $A_\tau = A(\tau)$ группы A, прямой суммы n_τ экземпляров группы τ ($\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$).

Положим $e = \exp X/A$ и определим канонические эпиморфизмы

$$\overline{}\colon A \to \overline{A} = A/eA, \quad \overline{}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$$

и индуцированные гомоморфизмы

$$\overline{}\colon \operatorname{End} A \to \operatorname{End} \overline{A}, \quad \overline{}\colon \operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} \overline{A}.$$

Заметим, что группа A/eA изоморфна прямой сумме $n = \sum_{\tau \in T} n_\tau$ экземпляров $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, если $\tau(p) \neq \infty$ для любого простого $p \mid e$.

На протяжении всей статьи мы ограничиваемся рассмотрением почти вполне разложимых групп X с примарным регуляторным фактором, для которых X/A является p-примарной группой для некоторого простого числа p. Однако вначале мы приведём некоторые факты, относящиеся к произвольным почти вполне разложимым группам.

Следующая характеристика кольца эндоморфизмов почти вполне разложимых групп является частью [19, лемма 8.1.5] и основывается на факте, что регулятор A — это вполне характеристическая подгруппа группы X, следовательно, для любого $\phi \in \operatorname{End} X$ верно, что $\phi|_A \in \operatorname{End} A$. Кроме того, X содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}A$ регулятора A, что позволяет рассматривать $\operatorname{End} X$ как подкольцо кольца $\operatorname{End} A$.

Лемма 2.1. *Пусть $X, X' \in \mathcal{A}$ и для целого положительного числа e выполняется $eX \subset A$, $eX' \subset A$. Тогда*

$$\operatorname{Hom}(X, X') = \{\phi \in \operatorname{End} A\colon (eX)\phi \subset eX'\},$$

в частности

$$\operatorname{End} X = \{\phi \in \operatorname{End} A\colon (eX)\phi \subset eX\},$$

или, в эквивалентной форме,

$$\operatorname{End} X = \{\phi \in \operatorname{End} A\colon (\overline{eX})\overline{\phi} \subset \overline{eX}\}.$$

Мы используем условия изоморфизма групп, которые тесно связаны с предыдущим описанием и даются в [19, лемма 8.1.6] в следующей форме.

Лемма 2.2. *Пусть почти вполне разложимые группы X и X' содержат одну и ту же вполне разложимую группу A и для целого положительного числа e выполняется $eX \subset A$ и $eX' \subset A$.*

1. *Если $\sigma\colon X \to X'$ является изоморфизмом, таким что $A\sigma \subset A$, то σ сужается до $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, причём $\overline{eX}\overline{\alpha} = \overline{eX'}$.*
2. *Если $\alpha \in \operatorname{Aut} A$ и $\overline{eX}\overline{\alpha} = \overline{eX'}$, то существует единственный изоморфизм $\sigma\colon X \to X'$, такой что $\sigma = \alpha$ на A. В частности, если $A = R(X)$, то*

$$\operatorname{Aut} X = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A\colon \overline{eX}\overline{\alpha} = \overline{eX}\}.$$

В [19, 15.2; 15] показано, что если X является почти вполне разложимой группой, то $\operatorname{End} X$ тоже почти вполне разложимая группа по отношению к операции сложения.

Предложение 2.3. *Пусть X — почти вполне разложимая группа кольцевого типа с регулятором $A = \bigoplus\limits_{\tau\in T} A_\tau$, регуляторной экспонентой e, множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ и $n_\tau = \operatorname{rk} A_\tau$. Тогда*

1) *имеется цепочка колец $e\operatorname{End}(A) \subseteq \operatorname{End}(X) \subseteq \operatorname{End}(A)$;*
2) *$\operatorname{End}(X)^+$ — почти вполне разложимая группа с множеством критических типов T, $R(\operatorname{End}(X)^+) \cong \operatorname{End}(A)^+$ и $R(\operatorname{End}(X))$ имеет τ-ранг $\sum\limits_{\sigma\leqslant\tau} n_\sigma n_\tau$ для всех $\tau \in T$.*

Заметим, что это предложение вместе с [3, теорема 3.3], где дано описание регулятора группы $\operatorname{End} X^+$ в блочно-жёстком случае, приводят нас к заключению, что регуляторные экспоненты для X и $\operatorname{End} X^+$ совпадают. Напомним, что блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа $X \in \mathcal{A}$ кольцевого типа имеет регулятор

$$A = \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau \tau$$

со множеством попарно несравнимых критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Это существенно влияет на структуру колец эндоморфизмов групп A и X, которые будут обозначаться $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ и $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Известно, что

$$\mathcal{E}_A \cong \prod_{\tau\in T}^{\otimes} \mathcal{E}_\tau, \quad \mathcal{E}_\tau = \operatorname{End} A_\tau.$$

Перечисляя все критические типы τ группы X, мы имеем $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$. Тогда из разложения регулятора

$$A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_{\tau_i}$$

на τ_i-однородные компоненты A_{τ_i} рангов $n_i = n_{\tau_i}$ следует, что кольцо $\operatorname{End} A$ изоморфно кольцу M, состоящему из всех $(n\times n)$-матриц F блочно-диагональной формы:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_k \end{pmatrix}, \quad F_i \in \mathrm{M}_{n_i}(\tau_i).$$

Чтобы показать это, мы будем пользоваться специальной формой записи $F = (F_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ или, в более удобном виде, $F = (F_\tau)_{\tau\in T}$, имея в виду, что $(n_\tau \times n_\tau)$-матрица F_τ — это элемент из матричного кольца $\mathrm{M}_{n_\tau}(\tau)$, $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$, которое изоморфно соответствующему кольцу $\mathcal{E}_\tau$, $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$. Поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_A$ и $\mathcal{E}_A \cong M$, любой элемент $\mathcal{F}$ из $\mathcal{E}$ может быть также представлен матрицей данного вида $F = (F_\tau)_{\tau\in T}$.

3. Цепи из групп и их колец эндоморфизмов

Для наших целей удобно рассматривать почти вполне разложимую группу как подгруппу делимой оболочки её регулятора. Мы применяем подход, рассмотренный в [6, гл. 1, раздел 5], вместе с понятиями, введёнными в [11, 21]. Можно однозначно продолжить любой эндоморфизм α абелевой группы X без кручения до линейного преобразования $\alpha\otimes 1 \in \operatorname{End}(X)\otimes\mathbb{Q}$ её делимой оболочки $\mathbb{Q}X = X\otimes\mathbb{Q}$, отождествляя X с $X\otimes 1 = \{x\otimes 1\colon x\in X\}$. Для любого натурального q обозначим подгруппу $X\otimes\frac{1}{q} = \left\{x\otimes\frac{1}{q}\colon x\in X\right\}$ группы $\mathbb{Q}X$ через $\frac{X}{q}$. Очевидно, что $X\subset\frac{X}{q}$ и $q\left(\frac{X}{q}\right) = X$.

Как было оговорено, $X\in\mathcal{A}$ является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором

$$A = \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau \cong \bigoplus_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau\tau$$

и $e = \exp X/A$. Напомним, что $A = R(X)$ — это однозначно определённая вполне характеристическая подгруппа в X с множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A) = T_{\mathrm{cr}}(X)$ и все её однородные компоненты A_τ сервантны в X. Мы знаем, что $\mathcal{E} = \operatorname{End}X$ содержится в $\mathcal{E}_A = \operatorname{End}A$. Любой элемент $\phi\in\mathcal{E}_A$ индуцирует отображение на всем $\mathbb{Q}A$, и мы рассматриваем $\mathcal{E}$ как подкольцо кольца $\mathcal{E}_A$, состоящее из тех ϕ, для которых $X\phi\subset X$, или, в эквивалентной форме, $(eX)\phi\subset eX$ (см. лемма 2.1).

С этого момента мы рассматриваем только $X\in\mathcal{A}$ с примарным регуляторным фактором, т. е. $e = p^l$ для некоторого простого числа p и натурального l. По отношению к операции сложения $\mathcal{E}$ также является почти вполне разложимой группой с p-примарным регуляторным фактором и такой же регуляторной экспонентой e, как у группы X. Из $eX\subset A$ заключаем, что $X\subset\mathbb{Q}A$, точнее, $A\subset X\subset\frac{A}{p^l}$ и $X = X\cap\frac{A}{p^l}$.

Для всех натуральных $k\in[0,l]$ введём в рассмотрение группы $X_k\subset X$ с регуляторными экспонентами p^k, определённые следующим образом.

Определение 3.1. $X_k = X\cap\frac{A}{p^k}$ для любого $k = 0, 1, \ldots, l$.

Легко видеть, что X_k — вполне характеристическая подгруппа группы $X = X_l$, так как любой элемент $\phi\in\mathcal{E}$ принадлежит $\mathcal{E}_A$ и, значит, отображает $\frac{A}{p^k}$ в себя.

Имеется цепь вполне характеристических подгрупп группы X:

$$X = X_l \supset X_{l-1}\supset X_{l-2}\supset X_{l-3}\supset\ldots\supset X_2\supset X_1\supset X_0 = A. \tag{3.1}$$

Нам необходимо доказать серию несложных лемм.

Лемма 3.2. *Пусть $k\in\mathbb{N}$ — натуральное число, удовлетворяющее условию $k\leqslant l$, и пусть $a\in A$. Тогда a делится на p^k в X тогда и только тогда, когда a делится на p^k в X_k.*

Доказательство. Если $a\in A$ и $\frac{a}{p^k}\in X$, то $\frac{a}{p^k}\in\frac{A}{p^k}$ и по определению 3.1 имеем, что $\frac{a}{p^k}\in X_k$. Обратное следует из $X_k\subset X$. $\square$

Лемма 3.3. *Регулятор A группы $X = X_l$ является регулятором для всех групп X_k, где $0 \leqslant k \leqslant l$.*

Доказательство. В лемме 3.2 показано, что однородные компоненты A_τ группы A сервантны в X_1, так как это верно для $X = X_l$. Значит, это выполняется для всех X_k при $k \geqslant 1$. Очевидно, что A имеет конечный индекс во всех X_k как подгруппа. Этого достаточно, чтобы заключить, что A является регулятором для всех групп X_k, что и требовалось. □

Лемма 3.4. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant l$. Тогда группа X_k является вполне характеристической подгруппой группы X_s.*

Доказательство. Имеем

$$X_k = X_l \cap \frac{A}{p^k} = X_l \cap \left(\frac{A}{p^k} \cap \frac{A}{p^s}\right) = \left(X_l \cap \frac{A}{p^s}\right) \cap \frac{A}{p^k} = X_s \cap \frac{A}{p^k}.$$

Поскольку A является регулятором в X_s, мы заключаем, что любой элемент $\phi \in \operatorname{End} X_s$ принадлежит также $\mathcal{E}_A$ и отображает $\frac{A}{p^k}$ в себя. Отсюда $X_k\phi \subset X_k$, что и требовалось доказать. □

Обозначим

$$E_k = \operatorname{End} X_k$$

и построим следующую цепь подколец в $\mathcal{E}_A$:

$$\mathcal{E} = E_l \subset E_{l-1} \subset E_{l-2} \subset E_{l-3} \subset \ldots \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 = \mathcal{E}_A. \tag{3.2}$$

Лемма 3.5. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant l-1$. Тогда $pX_{k+1} \subset X_k$.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из определения 3.1 групп X_k:

$$pX_{k+1} = p\left(X_l \cap \frac{A}{p^{k+1}}\right) = \left(pX_l \cap \frac{A}{p^k}\right) \subset X_l \cap \frac{A}{p^k} = X_k. \qquad \square$$

Мы получаем другую цепь из групп, возрастающую цепь подгрупп в A:

$$p^l X_l \subset p^{l-1} X_{l-1} \subset p^{l-2} X_{l-2} \subset p^{l-3} X_{l-3} \subset \ldots \subset p^2 X_2 \subset pX_1 \subset X_0 = A. \tag{3.3}$$

Лемма 3.6. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant l$. Тогда $p^{s-k} \operatorname{End} X_k \subset \operatorname{End} X_s$.*

Доказательство. Напомним, что $A = R(X_s)$ и $p^s = \exp X_s/A$, т. е. $p^s X_s \subset A$.

Пусть $a \in p^s X_s$. Применяя лемму 3.2, имеем, что $p^s \mid a$ в X_l. Тогда $p^k \mid a$ в X_l и $p^k \mid a$ в X_k, потому что $k \leqslant s$ по условию.

Предположим, что $\phi \in \operatorname{End} X_k$. Лемма 2.1 утверждает, что $a\phi \in p^k X_k$. Это означает, $p^k \mid a\phi$ в X_l. Наконец, мы заключаем, что p^s делит $p^{s-k} a\phi$ в X_l и также в X_s. Мы получили достаточное условие для того, чтобы элемент $p^{s-k}\phi$ из $\operatorname{End} A$ принадлежал $\operatorname{End} X_s$. □

На основании этой леммы и (3.2) мы строим убывающую цепь двусторонних идеалов кольца $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = E_l \supset pE_{l-1} \supset p^2E_{l-2} \supset p^3E_{l-3} \supset \ldots \supset p^{l-1}E_1 \supset p^lE_0 = p^l\mathcal{E}_A. \qquad (3.4)$$

Введём ещё одну цепь из групп, которая будет полезной в техническом отношении. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, l$ определим

$$\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}. \qquad (3.5)$$

Мы видим, что $\widetilde{X_l} = X_l = X$, $\widetilde{X_0} = \frac{A}{p^l}$ и $\widetilde{X_{k+1}} \subset \widetilde{X_k}$ по лемме 3.5. Имеем состоящую из групп цепь

$$X = \widetilde{X_l} \subset \widetilde{X_{l-1}} \subset \widetilde{X_{l-2}} \subset \widetilde{X_{l-2}} \subset \ldots \subset \widetilde{X_1} \subset \widetilde{X_0} = \frac{A}{p^l}, \qquad (3.6)$$

для которой цепь (3.2) служит цепью соответствующих колец эндоморфизмов, так же как и для групп (3.1), поскольку $\widetilde{X_k} \cong X_k$.

Заметим, что цепи (3.2), (3.3), (3.4) естественно возникли в связи с первоначальным построением убывающей цепи (3.1) вполне характеристических подгрупп в X, содержащих A.

Теперь мы введём в рассмотрение возрастающую цепь подгрупп в $\frac{A}{p^l}$, содержащих X, а также некоторые попутно возникающие цепи. Почти вполне разложимые группы в цепях расположены в порядке убывания их регуляторных экспонент $\{p^k \colon k = l,\ l-1, \ldots, 0\}$. Этот принцип построения сохраняется и для всех цепей колец эндоморфизмов, которые, как уже отмечалось, имеют ту же регуляторную экспоненту, что и сама почти вполне разложимая группа, если мы рассматриваем их по отношению к аддитивной операции.

Итак, определим подгруппы X'_k вполне разложимой группы $\frac{A}{p^l}$, которые сами являются почти вполне разложимыми группами с регуляторными экспонентами p^k, следующим образом.

Определение 3.7. $X'_k = X + \frac{A}{p^{l-k}}$ для любого $k = 0, 1, \ldots, l$.

Имеем цепь

$$X = X'_l \subset X'_{l-1} \subset X'_{l-2} \subset X'_{l-3} \subset \ldots \subset X'_2 \subset X'_1 \subset X'_0 = \frac{A}{p^l}. \qquad (3.7)$$

Лемма 3.8. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant l$ и $a \in A$. Если a делится на p^l в X, то $\frac{a}{p^k}$ делится на p^{l-k} в X'_{l-k}.*

Доказательство. Поскольку $X = X'_l \subset X'_{l-k}$, для любого k верно, что

$$\frac{a}{p^l} = \frac{\frac{a}{p^k}}{p^{l-k}} \in X'_{l-k}. \qquad \square$$

Лемма 3.9. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant l$. Тогда $\frac{A}{p^k}$ является регулятором в X'_{l-k}.*

Доказательство. Для рассматриваемых блочно-жёстких групп нам достаточно показать что каждая τ-однородная подгруппа $\frac{A_\tau}{p^k}$, $\tau \in T$, является сервантной в X'_{l-k}.

Предположим, что это не так, тогда существуют τ и элемент $b \in \frac{A_\tau}{p^k}$, делимый на p в X'_{l-k}, но не в $\frac{A_\tau}{p^k}$. Это означает, что $\frac{b}{p} = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X$, $x_2 \in \frac{A_\tau}{p^k}$ и $x_1 \notin \frac{A_\tau}{p^k}$. Из $p^k b = p^{k+1}x_1 + p^{k+1}x_2 \in A_\tau$ и условий $\frac{b}{p} \in \frac{A_\tau}{p^{k+1}}$, $x_2 \in \frac{A_\tau}{p^k}$ сразу следует, что $p^{k+1}x_1 \in A_\tau$. Обозначим $x' = p^{k+1}x_1$. Из

$$x_1 = \frac{x'}{p^{k+1}} = \frac{\frac{x'}{p}}{p^k}$$

получаем $\frac{x'}{p} \notin A_\tau$, иначе имели бы $x_1 \in \frac{A_\tau}{p^k}$, что неверно. В итоге, существует $x' \in A_\tau$, для которого $\frac{x'}{p} = p^k x_1 \in X \setminus A_\tau$. Это означает, что A_τ не является сервантной подгруппой в X и A не может быть регулятором X, что противоречит условию. □

Поскольку $\frac{A}{p^k} \subset \mathbb{Q}A$, любой эндоморфизм группы A может рассматриваться как эндоморфизм группы $\frac{A}{p^k}$. Примем

$$\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A = \operatorname{End} \frac{A}{p^k},$$

так как $A \cong \frac{A}{p^k}$. По предыдущей лемме $\operatorname{End} X'_{l-k} \subset \mathcal{E}_A$, где $0 \leqslant k \leqslant l$.

Лемма 3.10. *Пусть* $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant l$. *Тогда* $\operatorname{End} X'_{l-k} \subset \operatorname{End} X'_{l-s}$.

Доказательство. Мы воспользуемся описанием кольца эндоморфизмов почти вполне разложимой группы, данным в лемме 2.1. Напомним, что $R(X'_{l-s}) = \frac{A}{p^s}$ и $\exp(X'_{l-s}/A) = p^{l-s}$ для любого s.

Пусть $\phi \in \operatorname{End} X'_{l-k}$ и $a \in A$ удовлетворяет условию $p^{l-s} \mid \frac{a}{p^s}$ в X'_{l-s}. Мы утверждаем, что $p^{l-s} \mid \left(\frac{a}{p^s}\right)\phi$ в X'_{l-s}.

Сначала мы рассмотрим случай $a \in \frac{A}{p^{l-s}}$. Тогда

$$\frac{a}{p^l} = \frac{\frac{a}{p^s}}{p^{l-s}} \in \frac{A}{p^s}$$

и

$$\left(\frac{\frac{a}{p^s}}{p^{l-s}}\right)\phi \in \frac{A}{p^s} \subset X'_{l-s},$$

потому что $\phi \in \mathcal{E}_A$.

Предположим, что $a \notin \frac{A}{p^{l-s}}$. Тогда

$$\frac{a}{p^l} = \frac{\frac{a}{p^s}}{p^{l-s}} \notin \frac{A}{p^s}$$

и $\frac{a}{p^l} = x + b$, где $b \in \frac{A}{p^s}$ и $x \in X \setminus \frac{A}{p^s}$ по определению 3.7 группы X'_{l-s}. Из включений $X \subset X'_{l-k} \subset X'_{l-s}$ следует, что $x \in X'_{l-k}$, более того, $x\phi \in X'_{l-k}$

влечёт $x\phi \in X'_{l-s}$. Как и выше, $b\phi \in \frac{A}{p^s}$, и в итоге мы имеем $(x+b)\phi \in X'_{l-s}$, что и требовалось доказать. □

Обозначим

$$E'_{l-k} = \operatorname{End} X'_{l-k}$$

для любого натурального $k \in [0, l]$.

Имеется цепь

$$\mathcal{E} = E'_l \subset E'_{l-1} \subset E'_{l-2} \subset E'_{l-3} \subset \ldots \subset E'_2 \subset E'_1 \subset E'_0 = \mathcal{E}_A. \tag{3.8}$$

Лемма 3.11. *Пусть* $0 \leqslant k \leqslant l-1$. *Тогда* $pX'_{l-(k+1)} \subset X'_{l-k}$.

Доказательство. Из определения 3.7 групп X'_{l-k} следует, что

$$pX'_{l-(k+1)} = p\left(X_l + \frac{A}{p^{k+1}}\right) = \left(pX_l + \frac{A}{p^k}\right) \subset X_l + \frac{A}{p^k} = X'_{l-k}. \qquad \square$$

Мы строим убывающую цепь подгрупп в X, содержащих A:

$$X = X'_l \supset pX'_{l-1} \supset p^2X'_{l-2} \supset \ldots \supset p^{l-2}X'_2 \supset p^{l-1}X'_1 \supset p^lX'_0 = A. \tag{3.9}$$

Теперь мы легко докажем ещё одно включение.

Лемма 3.12. *Пусть* $0 \leqslant k \leqslant l-1$. *Тогда* $pE'_{l-(k+1)} \subset E'_{l-k}$.

Доказательство. Как и раньше, мы используем описание кольца эндоморфизмов почти вполне разложимой группы из леммы 2.1 и тот факт, что $E'_{l-k} \subset \mathcal{E}_A$ для любого k.

Пусть $a \in A$ и $p^{l-k} \mid \left(\frac{a}{p^k}\right)$ в X'_{l-k}. Нам достаточно показать, что $p^{l-k} \mid \left(\frac{a}{p^k}\right)p\phi$ в X'_{l-k} для всех $\phi \in E'_{l-(k+1)}$.

Из включения $X'_{l-k} \subset X'_{l-(k+1)}$ мы выводим

$$\frac{a}{p^l} = \frac{\frac{a}{p^k}}{p^{l-k}} \in X'_{l-(k+1)}.$$

Значит, $\frac{a}{p^l}\phi \in X'_{l-(k+1)}$ и $\frac{a}{p^l}(p\phi) = p\left(\frac{a}{p^l}\phi\right)$ принадлежит X'_{l-k} по лемме 3.11, что и требовалось доказать. □

Эта лемма и цепь (3.8) приводят нас к следующей убывающей цепи двусторонних идеалов кольца $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = E'_l \supset pE'_{l-1} \supset p^2E'_{l-2} \supset p^3E'_{l-3} \supset \ldots \supset p^{l-1}E'_1 \supset p^lE'_0 = p^l\mathcal{E}_A. \tag{3.10}$$

В оставшейся части этого раздела мы установим связь между членами цепей (3.6) и (3.7), которая будет полезна для последующих конструкций.

Предложение 3.13. *Пусть* $X \in \mathcal{A}$ *и* $p^l = \exp(X/A)$ *для некоторого простого числа* p, *и пусть натуральное число* k *находится в интервале* $[0, l]$. *Предположим, что группы* X'_k *и* $\widetilde{X_k}$ *определяются соответственно как* $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$ *и* $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$, *где* $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$. *Тогда* $X'_k \subset \widetilde{X_k}$.

Доказательство. Как всегда, мы помещаем группу X в ее делимую оболочку $\mathbb{Q}A$. Используя определения 3.7 и (3.5), мы найдём порождающие системы элементов для обеих групп X_k' и $\widetilde{X_k}$.

Из $X_k' = \frac{A}{p^{l-k}} + X$ находим, что

$$X_k' = \left\langle \frac{A}{p^{l-k}},\ \left\{x\colon x \in X \setminus \frac{A}{p^{l-k}}\right\}\right\rangle, \tag{3.11}$$

т. е.

$$X_k' = \left\langle \frac{A}{p^{l-k}},\ \left\{x\colon x \in \frac{A}{p^l} \setminus \frac{A}{p^{l-k}},\ x \in X\right\}\right\rangle.$$

Аналогично рассмотрим $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$. Очевидно, $\widetilde{X_k}$ содержит $\frac{A}{p^{l-k}}$, потому что $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$ содержит A, и мы видим, что

$$\widetilde{X_k} = \left\langle \frac{A}{p^{l-k}},\ \left\{x\colon x \in \frac{A}{p^l} \setminus \frac{A}{p^{l-k}},\ p^{l-k}x \in X\right\}\right\rangle.$$

Как и в любой аддитивной группе, для $x \in X$ верно, что $p^{l-k}x \in X$. Применяя это утверждение к порождающим элементам группы X_k', мы немедленно получаем требуемое включение $X_k' \subset \widetilde{X_k}$. $\square$

Замечание 3.14. Группы X_k' и $\widetilde{X_k}$ имеют один и тот же регулятор $\frac{A}{p^{l-k}}$ и одну и ту же регуляторную экспоненту p^k для любого $k = 0, \ldots, l$, что следует из лемм 3.3 и 3.9.

В частности, $X = X_l' = \widetilde{X_l}$ и $\frac{A}{p^l} = X_0' = \widetilde{X_0}$ (см. (3.6) и (3.7)).

4. Структура кольца $\operatorname{End} X$ для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X с примарным регуляторным фактором

Пусть $X \in \mathcal{A}$ и $p^l = \exp(X/A)$, где $l > 1$. Предложение 2.3 утверждает, что $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$ является подкольцом кольца $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$, в то время как $p^l\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$. Мы заинтересованы в построении цепи

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_A^{(l)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-1)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-2)} \subset \ldots \subset \mathcal{E}_A^{(1)} \subset \mathcal{E}_A^{(0)} = \mathcal{E}_A, \tag{4.1}$$

удовлетворяющей следующему условию: для любого $\phi \in \mathcal{E}_A$ верно, что $p^{l-k}\phi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\phi \in \mathcal{E}_A^{(k)}$.

Наш подход основывается на определениях и результатах предыдущего раздела. Первым шагом может служить следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $X \in \mathcal{A}$ и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого p, и пусть $0 \leqslant k \leqslant l$. Тогда $\operatorname{End} X \cap p^{l-k} \operatorname{End} A \subset \operatorname{Hom}(X, X_k)$.*

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $\phi \in \mathcal{E}_A$, такой что $p^{l-k}\phi \in \mathcal{E}$, и обозначим через I тождественное отображение на A. Поскольку $p^{l-k}\phi = (p^{l-k}I)\phi$ и $p^{l-k}I\colon A \to p^{l-k}A$, имеем, что $p^{l-k}\phi\colon \frac{A}{p^l} \to \frac{A}{p^k}$. По условию $p^{l-k}\phi\colon X \to X$. Учитывая, что $X = X \cap \frac{A}{p^l}$, мы получаем по определению 3.1, что

$$p^{l-k}\phi\colon X \to X \cap \frac{A}{p^k} = X_k,$$

что и требовалось доказать. □

Отметим частные случаи $k = 0$ и $k = l$, дающие очевидные включения $\operatorname{End} X \cap p^l \operatorname{End} A \subset \operatorname{Hom}(X, A)$ и $\operatorname{End} X \cap \operatorname{End} A \subset \operatorname{End} X$ соответственно.

Поскольку X_k — подгруппа группы X, имеющая тот же регулятор A, и, следовательно, $\operatorname{Hom}(X, X_k) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_A$ по лемме 2.1, нам необходимо найти все элементы $\psi \in \operatorname{Hom}(X, X_k)$, которые, будучи элементами $\mathcal{E}_A$, делятся на p^{l-k} в $\mathcal{E}_A$. Погружая $\mathcal{E}_A$ в делимую оболочку $\mathbb{Q}\mathcal{E}_A$, мы делаем следующее заключение из предыдущей леммы.

Следствие 4.2. *Если* $0 \leqslant k \leqslant l$, *то*

$$\operatorname{End} X \cap p^{l-k} \operatorname{End} A = \left\{\psi \in \operatorname{Hom}(X, X_k)\colon \frac{\psi}{p^{l-k}} \in \mathcal{E}_A\right\},$$

или, в эквивалентной форме,

$$\operatorname{End} X \cap p^{l-k} \operatorname{End} A = \\ = \{\psi \in \operatorname{Hom}(X, X_k)\colon \text{существует элемент } \phi \in \mathcal{E}_A, \text{ такой что } p^{l-k}\phi = \psi\}.$$

Для любого $\psi \in \operatorname{Hom}(X, X_k)$, такого что $\frac{\psi}{p^{l-k}}$ принадлежит $\mathcal{E}_A$, выполняется следующее: $\phi = \frac{\psi}{p^{l-k}} \in \operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k}) \cap \mathcal{E}_A$ (см. (3.5) и (3.6)). Таким образом, вопрос о делимости элементов из $\mathcal{E}$ различными степенями числа p в $\mathcal{E}_A$ сводится к описанию таких отображений ϕ.

Предложение 4.3. *Пусть* $X \in \mathcal{A}$ *и* $p^l = \exp(X/A)$ *для некоторого простого* p, *и пусть* $0 \leqslant k \leqslant l$. *Тогда* $\operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k}) \cap \mathcal{E}_A = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$.

Доказательство. Напомним, что $X_k = X \cap \frac{A}{p^k}$, $X'_k = X + \frac{A}{p^{l-k}}$ и $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$ (см. определения 3.1, 3.7 и (3.5)). Заметим, что $\widetilde{X_k} \supset \frac{A}{p^{l-k}}$, так как $X_k \supset A$.

Пусть $\phi \in \operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k}) \cap \mathcal{E}_A$. Продолжая ϕ с группы A на её делимую оболочку $\mathbb{Q}A$, мы получаем $\phi\colon \frac{A}{p^{l-k}} \to \frac{A}{p^{l-k}}$ и можем считать, что $\phi \in \operatorname{Hom}\bigl(\frac{A}{p^{l-k}}, \widetilde{X_k}\bigr)$. Из описания (3.11) группы X'_k сразу следует, что $\phi \in \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$.

Предположим теперь, что $\phi \in \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$. Поскольку X'_k и X_k имеют один и тот же регулятор $\frac{A}{p^{l-k}}$, мы получаем, что $\phi \in \mathcal{E}_A$ по лемме 2.1. Из $X'_k \supset X$ мы также выводим, что $\phi \in \operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k})$. Следовательно, $\phi \in \operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k}) \cap \mathcal{E}_A$.

В итоге имеем $\operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k}) \cap \mathcal{E}_A = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$, что и требовалось. □

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему статьи, которая раскрывает структуру кольца $\mathcal{E}$ в смысле (4.1) для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы кольцевого типа с примарным регуляторным фактором. Фактически её доказательство содержится в фактах, в справедливости которых мы уже убедились.

Теорема 4.4. *Пусть X является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором A и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого числа p, и пусть $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Предположим, что для каждого k из интервала $[0, l]$ группы X'_k и $\widetilde{X_k}$ определяются соответственно как $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$ и $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$, где $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$. Тогда существует цепь*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_A^{(l)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-1)} \subset \mathcal{E}_A^{(l-2)} \subset \ldots \subset \mathcal{E}_A^{(1)} \subset \mathcal{E}_A^{(0)} = \mathcal{E}_A,$$

состоящая из $\mathcal{E}_A^{(k)} = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$, и $\phi \in \mathcal{E}_A$ удовлетворяет условию $p^{l-k}\phi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\phi \in \mathcal{E}_A^{(k)}$.

Доказательство. Из следствия 4.2 немедленно получаем, что $\phi \in \mathcal{E}_A$ удовлетворяет условию $p^{l-k}\phi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда ϕ принадлежит множеству $\operatorname{Hom}(X, \widetilde{X_k}) \cap \mathcal{E}_A$, которое совпадает с $\operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ по предложению 4.3. Этим доказываются включения $\mathcal{E}_A^{(k+1)} \subset \mathcal{E}_A^{(k)}$. □

Следствие 4.5. *Пусть X является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором A и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого числа p, и пусть $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$ и $\mathcal{E}_A^{(k)} = \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ для каждого $k = 0, 1, \ldots, l$, где $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$, $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$ и $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$. Тогда*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_A^{(l)} \supset p\mathcal{E}_A^{(l-1)} \supset p^2\mathcal{E}_A^{(l-2)} \supset \ldots \supset p^{l-1}\mathcal{E}_A^{(1)} \supset p^l\mathcal{E}_A^{(0)} = p^l\mathcal{E}_A$$

является цепью двусторонних идеалов кольца $\mathcal{E}$.

Заметим, что члены цепи $p^{l-k}\mathcal{E}_A^{(k)}$ совпадают с $\mathcal{E} \cap p^{l-k}\mathcal{E}_A$, и этот факт объясняет их последовательность в цепи. Более того, они на самом деле являются двусторонними идеалами в $\mathcal{E}$, так как $\mathcal{E}$ — подкольцо кольца $\mathcal{E}_A$. Это согласуется с нашей конструкцией, из которой данное свойство для $p^{l-k}\operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ следует очевидным образом из (3.2) и (3.8), так как $\mathcal{E} \subset E'_k = \operatorname{End} X'_k$ и $\mathcal{E} \subset$ $\subset E_k = \operatorname{End} X_k = \operatorname{End} \widetilde{X_k}$. Поскольку $\mathcal{E}_A^{(k)}$ может рассматриваться как левый E'_k-модуль и как правый E_k-модуль, мы заключаем, что $\mathcal{E}_A^{(k)}$ является $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-бимодулем и, следовательно, $p^{l-k}\mathcal{E}_A^{(k)}$ — двусторонний идеал кольца $\mathcal{E}$ для любого k (см. [5, гл. 2]).

Мы также видим из предложения 3.13, что $I \in \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ для всех k, потому что $X'_k \subset \widetilde{X_k}$. Это согласуется с естественным утверждением $p^{l-k}I \in \mathcal{E}$. То же включение и лемма 2.1 приводят к включениям $E_k \subset \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ и $E'_k \subset$ $\subset \operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$, которые также следуют из цепей (3.4) и (3.10), показывающих, что $p^{l-k}E_k \subset \mathcal{E}$ и $p^{l-k}E'_k \subset \mathcal{E}$ соответственно.

Поскольку $p^l\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$, мы можем определить действие $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ на всех элементах из $\mathcal{E}_A$ путём продолжения $\mathcal{B}$ на $\mathbb{Q}\mathcal{E}$. Мы найдём разбиение $\mathcal{E}_A$ на попарно дизъюнктные непустые подмножества, которые инвариантны относительно всех отображений из (мультипликативной) группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

Теорема 4.6 ([3, теорема 4.5]). *Пусть X является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором*

$$A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$$

и p-примарным регуляторным фактором X/A. Если $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{End}\, X)$, то

$$\mathcal{B} \in \prod_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)}^{\otimes} \mathrm{Aut}(\mathrm{End}\, A_\tau),$$

т. е. $\mathcal{B}$ продолжается до (кольцевого) автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A = \mathrm{End}\, A$.

Основываясь на этой теореме и следствии 4.5, мы легко определим области инвариантности, как было заявлено.

Теорема 4.7. *Пусть X является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором A и $p^l = \exp(X/A)$ для некоторого простого числа p, и пусть $\mathcal{E} = \mathrm{End}\, X$, $\mathcal{E}_A = \mathrm{End}\, A$. Предположим, что $\mathcal{E}_A^{(k)} = \mathrm{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k})$ для любого натурального $k \in [0, l]$, где $X'_k = \frac{A}{p^{l-k}} + X$, $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$ и $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$. Тогда*

$$\mathcal{E}_A = \big(\mathcal{E}_A^{(0)} \setminus \mathcal{E}_A^{(1)}\big) \cup \big(\mathcal{E}_A^{(1)} \setminus \mathcal{E}_A^{(2)}\big) \cup \ldots \cup \big(\mathcal{E}_A^{(l-1)} \setminus \mathcal{E}_A^{(l)}\big) \cup \mathcal{E}_A^{(l)}$$

есть объединение попарно дизъюнктных непустых подмножеств, таких что сужение любого $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ на каждом из них устанавливает взаимно-однозначное соответствие между его элементами.

Доказательство. Напомним, что $\mathcal{E}_A^{(0)} = \mathcal{E}_A$ и $\mathcal{E}_A^{(l)} = \mathcal{E}$. Разбиение $\mathcal{E}_A$ на попарно дизъюнктные подмножества немедленно следует из цепи теоремы 4.4.

Нам необходимо показать, что $\mathcal{E}_A^{(k)}$ не совпадает с $\mathcal{E}_A^{(k+1)}$ ни для какого $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Предположим обратное, что существует k, для которого $\mathcal{E}_A^{(k)} = \mathcal{E}_A^{(k+1)}$. Из следствия 4.5 мы заключаем, что $\mathcal{E}_A^{(k+1)}$ содержит $p^k\mathcal{E}_A$, так как $\mathcal{E}_A^{(k)} \supset p^k\mathcal{E}_A$. Поскольку $p^{l-(k+1)}\mathcal{E}_A^{(k+1)} \subset \mathcal{E}$, имеем $p^{l-(k+1)}p^k\mathcal{E}_A = p^{l-1}\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$. Значит, $p^{l-1}\mathcal{E}_A \subset R(\mathcal{E}^+) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_A$, потому что регулятор R блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы содержит её подгруппу R', если $R \cong R'$. Отсюда $p^{l-1}\mathcal{E} \subset R(\mathcal{E})$, что противоречит факту, что регуляторная экспонента группы $\mathcal{E}$ равняется p^l. Таким образом, подмножества, составляющие разбиение $\mathcal{E}_A$, не пусты.

Осталось только доказать их инвариантность относительно любого отображения $\mathcal{B}$ из $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Оно может рассматриваться как автоморфизм кольца $\mathcal{E}_A$ по теореме 4.6. Отсюда следует, что любой автоморфизм $\mathcal{B} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ индуцирует автоморфизм аддитивной группы $(p^{l-k}\mathcal{E}_A)^+$, $k = 0, 1, \ldots, l$. Значит, он устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами во всех множествах $\mathcal{E} \cap p^{l-k}\mathcal{E}_A$. Теорема 4.4 утверждает, что $\mathcal{E} \cap p^{l-k}\mathcal{E}_A = p^{l-k}\mathcal{E}_A^{(k)}$, где $\mathcal{E}_A^{(k)} = \mathrm{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k}) \subset \mathcal{E}_A$. Следовательно, $\mathcal{B}$ является взаимно-однозначным соответствием на множествах $\mathcal{E}_A^{(k)}$, что обеспечивает требуемую инвариантность для всех областей $\mathcal{E}_A^{(k-1)} \setminus \mathcal{E}_A^{(k)}$, $k = 1, \ldots, l$. □

Замечание 4.8. Мы также доказали, что цепь из теоремы 4.4 является строго возрастающей цепью $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-бимодулей.

5. Структура кольца $\mathrm{End}\, X$ для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X с циклическим примарным регуляторным фактором

Мы применяем изложенный выше подход к рассмотрению колец эндоморфизмов почти вполне разложимых групп $X \in \mathcal{A}$ специального класса, с циклическим примарным регуляторным фактором X/A, т. е. $p^l = \exp X/A = |X/A|$ для простого числа p и натурального $l > 1$. Наши обозначения сохраняются: $\mathcal{E} = \mathrm{End}\, X$, $\mathcal{E}_A = \mathrm{End}\, A$, $T = T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Пусть e — некоторое натуральное число, такое что $e(X/A) = 0$, т. е. $p^l \mid e$. Можно дать следующее определение *почти изоморфизма* [19, определение 9.1.2, теорема 9.1.4, 5; 11, теорема 7.16].

Определение 5.1. Пусть G и H — группы конечного ранга без кручения. Тогда G и H *почти изоморфны* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$) тогда и только тогда, когда для каждого простого q существует мономорфизм $\phi_q \colon G \to H$, для которого индекс $[H : G\phi_q]$ конечен и q не делит $[H : G\phi_q]$.

Легко видеть, что любые две почти изоморфные почти вполне разложимые группы X и X' имеют изоморфные регуляторы, т. е. $R(X) \cong R(X')$. Однако это условие не является достаточным для того, чтобы группы были почти изоморфными. Для специального класса блочно-жёстких почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором критерий почти изоморфизма был установлен с помощью числовых инвариантов $m_\tau(X)$, введённых в [19, определение 12.6.2] и [16, определение 2.1] следующим образом.

Определим естественный эпиморфизм

$$\overline{} \colon A \mapsto A/eA = \overline{A}.$$

Выберем порождающий элемент $b + A$ в X/A. Тогда $eb = \sum\limits_{\tau \in T} v_\tau$, $v_\tau \in A_\tau$. Пусть

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\overline{v_\tau}| = |v_\tau + eA|. \tag{5.1}$$

Очевидно, что $m_\tau \mid e$ для каждого $\tau \in T$, поскольку $p^l = \mathrm{lcm}_{\tau \in T}\, m_\tau$ по построению. Полагаем $m_\tau = 1$, если $\tau(p) = \infty$ или $\tau \notin T_{\mathrm{cr}}(X)$, так как в этих случаях $\overline{A_\tau} = A_\tau / eA_\tau = 0$.

Теорема 5.2 (критерий почти изоморфизма [16, теорема 2.4]). *Блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы X и X' с циклическим регуляторным фактором являются почти изоморфными тогда и только тогда, когда $R(X) \cong R(X')$ и $m_\tau(X) = m_\tau(X')$ для любых типов τ.*

Специальное разложение, называемое *главным разложением* в [16, теорема 3.5] и [19, теорема 13.1.6], всегда существует для почти вполне разложимых групп в общем случае в соответствии с теоремой о главном разложении [19, теорема 9.2.7]. Для рассматриваемых нами групп его определяет следующая теорема.

Теорема 5.3 (теорема о главном разложении). *Пусть X — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором. Тогда существует такое разложение $X = Y \oplus A'$, что группа A' вполне разложима, Y — жёсткая почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором и $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(Y)$ тогда и только тогда, когда $m_\tau(Y) = m_\tau(X) > 1$. При этом группа Y единственна с точностью до почти изоморфизма, A' единственна с точностью до изоморфизма.*

Такое разложение $X = Y \oplus A'$ принято называть главным, и, вообще говоря, оно определяется неоднозначно.

Следуя теореме 5.3 и [16, теорема 3.2, A.1], мы можем так выбрать элементы в A_τ, что

$$A_\tau = \tau a_1^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau, \tag{5.2}$$

и элемент b, удовлетворяющий соотношению $\langle b + A \rangle = X/A$, может быть взят из делимой оболочки группы

$$\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau \neq 1} \tau a_1^\tau$$

следующим образом:

$$p^l b = \sum_{\tau \in T,\ m_\tau \neq 1} \frac{p^l}{m_\tau} s_\tau a_1^\tau, \tag{5.3}$$

где $s_\tau \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет соотношениям

1) НОД$(s_\tau, p) = 1$ для всех $\tau \in T$;
2) НОД$(p, q) = 1$ и НОД$(s_\tau, q) = 1$ для любого простого q, удовлетворяющего условию $\tau(q) = \infty$.

Положим

$$Y = \Bigl(\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau \neq 1} \tau a_1^\tau \Bigr)_*,$$

$$A'_\tau = \tau a_2^\tau \oplus \ldots \oplus \tau a_{n_\tau}^\tau \cong (n_\tau - 1)\tau,$$

где $m_\tau \neq 1$, и

$$A' = \Bigl(\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau \neq 1} A'_\tau \Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A),\ m_\tau = 1} A_\tau \Bigr).$$

Тогда $X = Y \oplus A'$ — главное разложение. Заметим, что существуют по крайней мере два критических типа τ_1, τ_2, для которых $m_{\tau_1} = m_{\tau_2} = p^l$ (иначе однородная группа A_τ с $m_\tau = p^l$ не являлась бы сервантной подгруппой в X, что противоречило бы свойству A быть регулятором для X).

Как и раньше, мы вводим в рассмотрение группы $X_k = X \cap \frac{A}{p^k}$, $X'_k = X + \frac{A}{p^{l-k}}$ и $\widetilde{X_k} = \frac{X_k}{p^{l-k}}$ при всех k, $0 \leqslant k \leqslant l$ (см. определения 3.1, 3.7 и (3.5)). Обозначим $m_{\tau k} = m_\tau(X_k)$.

Лемма 5.4. *Пусть группа $X \in \mathcal{A}$ имеет циклический регуляторный фактор, для которого $p^l = |X/A|$ и $m_\tau = m_\tau(X)$, $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$. Тогда для любого натурального $k \in [0, l]$*

1) $\widetilde{X_k} = X'_k$;
2) $m_\tau(X_k) = \frac{m_\tau}{p^{l-k}}$, *если* $p^{l-k} \mid m_\tau$; *иначе* $m_\tau(X_k) = 1$.

Доказательство. Воспользуемся главным разложением $X = Y \oplus A'$ и соответствующими разложениями (5.2) однородных компонент группы A. Очевидно, что $X_k = \langle A, p^{l-k}b\rangle$, где

$$p^k(p^{l-k}b) = \sum_{\tau\in T,\ m_\tau\neq 1} \frac{p^l}{m_\tau} s_\tau a_1^\tau$$

по (5.3).

Аналогично $X'_k = \left\langle \frac{A}{p^{l-k}}, b\right\rangle$. Погрузив $\mathcal{E}_A$ в делимую оболочку $\mathbb{Q}\mathcal{E}_A$ и взяв тождественное отображение I, мы получаем, что $\frac{I}{p^{l-k}} \colon A \to \frac{A}{p^{l-k}}$ является изоморфизмом регуляторов групп X_k и X'_k, который отображает $p^{l-k}b$ на b, и, следовательно, $\frac{I}{p^{l-k}}$ отображает X_k на X'_k. Это означает, что $X_k \cong X'_k$. Поскольку $\widetilde{X_k}$ является образом X_k при отображении $\frac{I}{p^{l-k}}$ по определению, мы немедленно заключаем, что $\widetilde{X_k} = X'_k$.

Осталось вычислить числовые инварианты $m_{\tau k} = m_\tau(X_k)$, которые совпадают с инвариантами групп $\widetilde{X_k}$ и X'_k. Напомним, что числа m_τ, определённые в (5.1), являются степенями p. Мы используем это определение для групп X_k, которые по построению также являются почти вполне разложимыми группами с циклическим регуляторным фактором. Сначала положим $e = p^l$. Получим, что $p^l(p^{l-k}b) = \sum\limits_{\tau\in T} p^{l-k}v_\tau$, где $v_\tau \in A_\tau$, и $m_{\tau k} = |\overline{p^{l-k}v_\tau}|$ в $\overline{A} = A/p^lA$. Сопоставляя это с определением (5.1) инвариантов для X, мы немедленно устанавливаем, что $m_\tau(X_k) = \frac{m_\tau}{p^{l-k}}$ в случае, когда $p^{l-k} \mid m_\tau$.

В противном случае мы берём $e = p^k$ и пользуемся тем, что $ep^{l-k}b = p^lb$, а значит, $m_{\tau k} = |\overline{v_\tau}|$ в A/p^kA. В соответствии с главным разложением мы можем взять $v_\tau = \frac{p^l}{m_\tau} s_\tau a_1^\tau$, если $m_\tau \neq 1$ (см. (5.3)). Условие $m_\tau < p^{l-k}$ гарантирует, что v_τ принадлежит p^kA, значит, $m_{\tau k} = 1$, как и требовалось.

Если $m_\tau = 1$, не умаляя общности, примем $v_\tau = 0$ в (5.1). Тогда мы также имеем $m_{\tau k} = 1$. $\square$

Заметим, что для критических типов τ, которые удовлетворяют условию $m_\tau = p^l$, выполняется $m_\tau(X_k) = \frac{m_\tau}{p^{l-k}}$ для каждого $k = 0, 1, \ldots, l$.

Продолжая $\phi \in \mathcal{E}_A$ на всю делимую оболочку $\mathbb{Q}A$ и помня, что $\operatorname{End} X_k \subset \mathcal{E}_A$, мы выводим следствие.

Следствие 5.5. *Пусть $X \in \mathcal{A}$ — группа с циклическим регуляторным фактором, для которого $p^l = |X/A|$, и пусть натуральное число k находится в интервале $[0, l]$. Тогда $\operatorname{Hom}(X'_k, \widetilde{X_k}) = \operatorname{End} X_k$.*

Доказательство. Имеем $X'_k = \widetilde{X_k}$ по предыдущей лемме и $X_k \cong \widetilde{X_k}$ по определению. □

Все группы X_k, X'_k и $\widetilde{X_k}$ являются почти вполне разложимыми группами с циклическим регуляторным фактором, их регуляторы изоморфны A, а регуляторные экспоненты равны p^k. Основываясь на этом, мы формулируем следующую теорему.

Теорема 5.6. *Пусть группа $X \in \mathcal{A}$ является почти вполне разложимой группой с циклическим p-примарным регуляторным фактором, для которого $p^l = |X/A|$, и пусть $\mathcal{E} = \operatorname{End} X$, $\mathcal{E}_A = \operatorname{End} A$. Предположим, что $X_k = \frac{A}{p^k} \cap X$ — подгруппы группы X, определённые для всех натуральных k из интервала $[0, l]$. Тогда*

$$\mathcal{E} = \operatorname{End} X_l \subset \operatorname{End} X_{l-1} \subset \operatorname{End} X_{l-2} \subset \ldots \subset \operatorname{End} X_1 \subset \operatorname{End} X_0 = \mathcal{E}_A$$

и $\phi \in \mathcal{E}_A$ удовлетворяет условию $p^{l-k}\phi \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\phi \in$ $\in \operatorname{End} X_k$.

Эта теорема не нуждается в доказательстве, поскольку её утверждение прямо следует из теоремы 4.4 и может быть подтверждено матричным представлением кольца эндоморфизмов почти вполне разложимой группы с циклическим регуляторным фактором, которое возникло из её главного разложения.

Теорема 5.7 ([3, теорема 4.5]). *Кольцо эндоморфизмов $\mathcal{E}$ блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X кольцевого типа, имеющей регулятор*

$$A \cong \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)} n_\tau \tau$$

и p-примарный циклический регуляторный фактор X/A, изоморфно кольцу E блочно-диагональных матриц $F = (F_\tau)_{\tau \in T}$ вида

$$F_\tau \in \begin{bmatrix} q + m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau\tau & \tau & \ldots & \tau & \tau \end{bmatrix} \subset M_{n_\tau}(\tau), \tag{5.4}$$

где $m_\tau = m_\tau(X)$ и $q = q(F)$ — некоторое целое число.

Замечание 5.8. Если $n_\tau = 1$, тогда F_τ рассматривается как одноэлементная матрица $[q + m_\tau\tau]$. Если $m_\tau = 1$, то соответствующая матрица F_τ является любым элементом из кольца $M_{n_\tau}(\tau)$ и может быть записана в той же самой форме (5.4), содержащей $q = q(F)$.

В заключение мы проиллюстрируем теорему 5.6 рассмотрением матричного представления E кольца $\operatorname{End} X$ для почти вполне разложимой группы $X \in \mathcal{A}$ с примарным циклическим регуляторным фактором. Заменяя m_τ на $m_{\tau k}$ в (5.4), мы получаем матричное представление E_k кольца $\operatorname{End} X_k$ для групп X_k из того же класса.

Лемма 5.4 утверждает, что $m_{\tau k} = \frac{m_{\tau\, k+1}}{p}$ или $m_{\tau k} = 1$, что влечёт $E_{k+1} \subset E_k$ и согласуется с включением $\operatorname{End} X_{k+1} \subset \operatorname{End} X_k$ из теоремы 5.6.

Для любой блочно-диагональной матрицы $F_k = (F_\tau^k)_{\tau\in T} \in E_k$ мы имеем, что $p^{l-k}F_k = (p^{l-k}F_\tau^k)_{\tau\in T}$ состоит из блоков

$$p^{l-k}F_\tau^k \in \begin{bmatrix} qp^{l-k} + m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \dots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \\ m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \dots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \dots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{\tau k}p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau & \dots & p^{l-k}\tau & p^{l-k}\tau \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

содержащих целое число $q = q(F_k)$, одно и то же для всех τ.

Лемма 5.4 гарантирует, что $m_\tau \mid m_{\tau k}p^{l-k}$ (в частности, $m_{\tau k}p^{l-k} = m_\tau$, если $m_{\tau k} \neq 1$), т. е. $p^{l-k}E_k \subset E$, что согласуется с теоремой 5.6. Поскольку $m_{\tau k} \mid m_\tau$, мы видим, что $p^{l-k}E_k$ — двусторонние идеалы кольца E в соответствии с матричными структурами (5.4), (5.5). Из того, что $\frac{p^{l-k}}{p^{l-(k+1)}} = p$ и $\frac{m_{\tau\, k+1}}{m_{\tau k}}$ есть p или 1, мы заключаем, что $m_{\tau\, k+1}p^{l-(k+1)} \mid m_{\tau k}p^{l-k}$ и, следовательно, $p^{l-k}E_k \subset p^{l-(k+1)}E_{k+1}$, как было показано для почти вполне разложимых групп общего вида в (3.4) и следствии 4.5.

Замечание 5.9. Мы использовали одно и то же обозначение E_k для кольца $\operatorname{End} X_k$, $k = 0, 1, \dots, l$, в (3.2) и (3.4), а также для его матричного представления при обсуждении групп с циклическим регуляторным фактором.

Литература

[1] Благовещенская Е. А. О прямых разложениях абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 17—25.

[2] Благовещенская Е. А. Разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения в прямые суммы неразложимых групп // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, вып. 2. — С. 62—69.

[3] Благовещенская Е. А. Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых групп // Фундам. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 23—50.

[4] Благовещенская Е. А., Яковлев А. В. Прямые разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 111—127.

[5] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[6] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск, 2002.

[7] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[8] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[9] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[10] Яковлев А. В. О прямых разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1987. — Т. 160. — С. 272—285.

[11] Arnold D. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[12] Blagoveshchenskaya E. Direct decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // D. M. Arnold (ed.) et al. Abelian Groups and Modules. Proc. Int. Conf. at Colorado Springs, CO, USA, August 7–12, 1995. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 163—179.

[13] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of almost completely decomposable groups // A. Facchini (ed.) et al. Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups. Proc. Algebra Conf., Venezia 2002, Venice, Italy, June 3–8, 2002. — New York: Marcel Dekker, 2004. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 236). — P. 45—54.

[14] Blagoveshchenskaya E. Dualities between almost completely decomposable groups and their endomorphism rings // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 131, no. 5. — P. 5948—5961.

[15] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[16] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decompositions of almost completely decomposable abelian groups // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 21—36.

[17] Corner A. L. S. A note on rank and decomposition of torsion-free Abelian groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1961. — Vol. 57. — P. 230—233; 1969. — Vol. 66. — P. 239—240.

[18] Faticoni T., Schultz P. Direct decompositions of ACD groups with primary regulating index // D. M. Arnold (ed.) et al. Abelian Groups and Modules. Proc. Int. Conf. at Colorado Springs, CO, USA, August 7—12, 1995. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 233—241.

[19] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).

[20] Mader A., Schultz P. Endomorphism rings and automorphism groups of almost completely decomposable groups // Comm. Algebra. — 2000. — Vol. 28. — P. 51—68.

[21] Reid J. Some matrix rings associated with ACD groups // P. C. Eklof (ed.) et al. Abelian Groups and Modules. Proc. Int. Conf. in Dublin, Ireland, August 10–14, 1998. — Basel: Birkhäuser, 1999. — (Trends in Mathematics). — P. 191—198.