

Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами

Е. И. БУНИНА, А. В. МИХАЛЁВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.534.7+510.67

Ключевые слова: линейно упорядоченное кольцо, обратимые матрицы, неотрицательные элементы, элементарная эквивалентность.

Аннотация

В работе доказано, что полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над линейно упорядоченным ассоциативным кольцом элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда размерности матриц совпадают, а кольца элементарно эквивалентны как упорядоченные кольца.

Abstract

E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, Elementary equivalence of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 39–53.

In this paper, we prove that the semigroups of invertible matrices with nonnegative elements over linearly ordered associative rings are elementarily equivalent if and only if the matrices have the same dimension and the rings are elementarily equivalent as ordered rings.

Пусть R — линейно упорядоченное кольцо, содержащее $1/2$, $G_n(R)$ ($n \geq 3$) — подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В [6] дано описание автоморфизмов полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R — тело и $n \geq 2$. В [4] дано описание автоморфизмов группы $G_n(R)$, когда R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geq 3$. Целью данной работы является классификация полугрупп $G_n(R)$ с точностью до элементарной эквивалентности.

Две модели $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы, полугруппы или два кольца, полукольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}_1$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}_2$.

Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 39–53.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\mathbb{Q}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны (так как имеют различную мощность).

Первые результаты по элементарной эквивалентности линейных групп были получены А. И. Мальцевым в [5]. Он доказал, что группы $\mathcal{G}_m(K)$ и $\mathcal{G}_n(K')$ (где $\mathcal{G} = \text{GL}, \text{PGL}, \text{SL}, \text{PSL}$, $m, n > 2$, K и K' — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и K' элементарно эквивалентны.

В 1992 г. К. И. Бейдар и А. В. Михалёв [7], используя некоторые результаты теории моделей (а именно конструкцию ультрастепени и теорему Кейслера—Шелаха об изоморфизме), сформулировали общий подход к задаче элементарной эквивалентности различных алгебраических структур. Взяв на вооружение некоторые результаты теории линейных групп над кольцами, они получили лёгкие доказательства теорем, подобных теореме Мальцева, в довольно общих ситуациях (для линейных групп над примарными кольцами, мультипликативных полугрупп, решёток подмодулей и т. д.).

В 1998—2004 гг. Е. И. Бунина продолжила исследования элементарных свойств линейных групп. В 1998 г. результаты А. И. Мальцева были обобщены на унитарные линейные группы над полями с инволюциями [2], а затем на унитарные линейные группы над кольцами и телами с инволюциями [1]. В 2001—2004 гг. аналогичные результаты были получены для групп Шевалле над полями [3].

Мы сохраняем все обозначения работы [4]. Ниже мы приведём самые необходимые из них.

Предположим, что R — линейно упорядоченное кольцо, R_+ — множество положительных элементов, $R_+ \cup \{0\}$ — множество неотрицательных элементов кольца R , через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $\text{GL}_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^* , множество $R_+ \cap R^*$ — через R_+^* . Если $T \subset R$, то $Z(T)$ обозначает центр множества T , $Z^*(T) = Z(T) \cap R^*$, $Z_+(T) = Z(T) \cap R_+$, $Z_+^*(T) = Z(T) \cap R_+^*$.

Пусть

$$I = I_n,$$

$\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из обратимых матриц из $G_n(R)$,

Σ_n — симметрическая группа порядка n ,

S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ (т. е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$),

$$S_n = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\},$$

$\text{diag}[d_1, \dots, d_n]$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \dots, d_n$ на диагонали, $d_1, \dots, d_n \in R_+^*$,

$D_n(R)$ — группа всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$,

$D_n^Z(R)$ — центр группы $D_n(R)$.

Через $K_n(R)$ обозначается подполугруппа в $G_n(R)$, состоящая из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_{n-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad X_{n-1} \in G_{n-1}(R), \quad x \in R_+^*.$$

Пусть E_{ij} — матрица с единственным ненулевым элементом $e_{ij} = 1$. Через $B_{ij}(x)$ обозначается матрица $I + xE_{ij}$, $x \in R_+$, $i \neq j$.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Полугруппы $G_n(R)$, $G_m(S)$ ($n, m \geq 3$, $1/2 \in R$, $1/2 \in S$) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.

Лемма 1. Формула

$$\text{Invert}(M) := \exists X (MX = XM = 1)$$

истинна в полугруппе $G_n(R)$ для элементов группы $\Gamma_n(R)$ и только для них.

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 2. Формула

$$\text{Inv}(M) := ((M^2 = 1) \wedge (M \neq 1))$$

истинна в полугруппе $G_n(R)$ для инволюций и только для них. Эти инволюции имеют вид $\text{diag}[t_1, \dots, t_n]S_\sigma$, где $\sigma^2 = 1$, $t_i \cdot t_{\sigma(i)} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна, а вторая следует из [4, лемма 3]. $\square$

Лемма 3.

1. Существует формула $\text{Diag}(M)$, истинная в полугруппе $G_n(R)$ для матриц $M \in D_n(R)$ и только для них.
2. Существует формула $\text{CDiag}(M)$, истинная в полугруппе $G_n(R)$ для матриц $M \in D_n^Z(R)$ и только для них.

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\text{ComCon}(A) := (\text{Invert}(A) \wedge \forall M (\exists N (M = N A N^{-1}) \implies A M = M A)).$$

Эта формула утверждает, что матрица A обратима и коммутирует со всеми матрицами, с ней сопряжёнными. По [4, лемма 4] формула $\text{ComCon}(A)$ выполняется для всех $A \in D_n^Z(R)$, может выполняться для некоторых элементов из $D_n(R) \setminus D_n^Z(R)$ и никогда не выполняется для элементов из $\Gamma_n(R) \setminus D_n(R)$.

Рассмотрим теперь новую формулу

$$\text{NComInv}(A) := (\text{ComCon}(A) \wedge \forall M (\text{Inv}(M) \implies A M \neq M A)).$$

Этой формулой мы вводим дополнительное условие «матрица A не коммутирует ни с одной инволюцией». Как следует из [4, доказательство леммы 4], эта формула всегда истинна для матриц $M \in D_n^Z(R)$, имеющих различные собственные значения, может быть истинна для некоторых матриц $M \in D_n(R) \setminus D_n^Z(R)$, имеющих различные собственные значения, и не может быть истинна ни для каких других матриц.

Рассмотрим теперь формулу

$$\text{Diag}(M) := \exists A (\text{NComInv}(A) \wedge MA = AM \wedge \text{Invert}(M)).$$

Формула $\text{Diag}(M)$ истинна для матриц из множества $\mathcal{X} = D_n(R)$ (см. [4, доказательство леммы 4]), т. е. удовлетворяет первому условию леммы.

Формула

$$\text{CDiag}(M) := (\text{Invert}(M) \wedge \forall A (\text{Diag}(A) \implies AM = MA))$$

является искомой для второго пункта леммы. $\square$

Лемма 4. Для любого $n \geq 2$ существует предложение Size_n , истинное во всех полугруппах $G_n(R)$, $1/2 \in R$, и ложное во всех полугруппах $G_m(S)$, $m \neq n$, $1/2 \in S$.

Доказательство. Рассмотрим предложение

$$\begin{aligned} \text{Size}_n := \exists X_1 \dots \exists X_{n!} \Big(& \forall M \left(\text{Diag}(M) \implies \bigwedge_{i,j=1; i \neq j}^{n!} X_i \neq MX_j \right) \wedge \\ & \wedge \forall X \left(\text{Invert}(X) \implies \exists M \left(\text{Diag}(M) \wedge \bigvee_{i=1}^{n!} (X = MX_i) \right) \right) \Big). \end{aligned}$$

Очевидно, что оно является искомым. $\square$

Теперь мы можем считать, что размерность n полугруппы $G_n(R)$ нам известна, т. е. мы можем использовать её в формулах.

Лемма 5. Существует формула $\text{CDOneMany}_n(M)$, истинная для всех матриц

$$\text{diag}[\alpha, \dots, \alpha, \beta, \alpha, \dots, \alpha] \in D_n^Z(R), \quad \alpha \neq \beta,$$

и только для них.

Доказательство. Из [4, леммы 5] следует, что искомые матрицы M характеризуются условием

$$C_{\Gamma_n(R)}(M)/D_n(R) \cong \Sigma_{n-1}.$$

Пусть элементы $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ ($N = (n-1)!$) группы Σ_{n-1} некоторым определённым фиксированным образом пронумерованы, причём $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_{\gamma(i,j)}$. Тогда формула

$$\begin{aligned} \text{CDOneMany}_n(M) := \exists X_1 \dots \exists X_N \Big(& \left(\bigwedge_{i=1}^N X_i M = M X_i \right) \wedge \\ & \wedge \left(\bigwedge_{i \neq j, i,j=1}^N \forall A (\text{Diag}(A) \implies X_i \neq X_j A) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^N \text{Invert}(X_i) \right) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \wedge \forall X \left(\text{Invert}(X) \wedge XM = MX \implies \exists A \left(\text{Diag}(A) \wedge \bigvee_{i=1}^N (X = AX_i) \right) \right) \wedge \\ & \wedge \left(\bigwedge_{i,j=1}^N \exists A (\text{Diag}(A) \wedge X_i \cdot X_j = AX_{\gamma(i,j)}) \right) \end{aligned}$$

искомая. $\square$

Аналогично можно ввести формулу $\text{CDAll}_n(M)$, характеризующую матрицы $\alpha I \in D_n^Z(R)$.

Лемма 6. Для любой матрицы

$$M = \text{diag}[\alpha, \dots, \alpha, \underbrace{\beta}_i, \alpha, \dots, \alpha] \in D_n^Z(R), \quad \alpha \neq \beta,$$

формула

$$\begin{aligned} \text{DSame}_{1,n-1}(A, M) &:= \text{COneMany}_n(A) \wedge \text{COneMany}_n(M) \wedge \\ &\wedge (\text{COneMany}_n(AM) \vee \text{CDAll}_n(AM)) \wedge \\ &\wedge (\text{COneMany}_n(AM^{-1}) \vee \text{CDAll}_n(AM^{-1})) \end{aligned}$$

характеризует матрицы

$$A = \text{diag}[\gamma, \dots, \gamma, \underbrace{\delta}_i, \gamma, \dots, \gamma] \in D_n^Z(R), \quad \gamma \neq \delta.$$

Доказательство. Если

$$A = \text{diag}[\gamma, \dots, \gamma, \underbrace{\delta}_i, \gamma, \dots, \gamma] \in D_n^Z(R), \quad \gamma \neq \delta,$$

то по лемме 5 выполняется подформула $\text{COneMany}_n(A)$,

$$AM = \text{diag}[\alpha\gamma, \dots, \alpha\gamma, \beta\delta, \alpha\gamma, \dots, \alpha\gamma] \in D_n^Z(R),$$

и если $\alpha\gamma = \beta\delta$, то выполняется подформула $\text{CDAll}_n(AM)$, а если $\alpha\gamma \neq \beta\delta$, то выполняется подформула $\text{COneMany}_n(AM)$. Аналогичные утверждения справедливы для AM^{-1} .

Обратно, пусть для

$$M = \text{diag}[\alpha, \dots, \alpha, \beta, \alpha, \dots, \alpha]$$

и для некоторой формулы A выполняется формула $\text{DSame}_{1,n-1}(A, M)$. Так как в этом случае выполняется подформула $\text{COneMany}_n(A)$, то

$$A = \text{diag}[\gamma, \dots, \gamma, \delta, \gamma, \dots, \gamma] \in D_n^Z(R), \quad \delta \neq \gamma.$$

Если β и δ находятся на одном и том же i -м месте, то всё доказано. Пусть это не так. Тогда без ограничения общности можно считать, что

$$M = \text{diag}[\beta, \alpha, \dots, \alpha], \quad A = \text{diag}[\gamma, \delta, \gamma, \dots, \gamma].$$

В этом случае

$$MA = \text{diag}[\beta\gamma, \alpha\delta, \gamma\alpha, \dots, \gamma\alpha].$$

Очевидно, что $\beta\gamma \neq \alpha\gamma$ и $\alpha\delta \neq \alpha\gamma$. Если $n > 3$, то мы сразу получаем

$$\neg(\text{CDOneMany}_n(AM) \vee \text{CDAll}_n(AM))$$

и приходим к противоречию. Если $n = 3$, то может оказаться, что $\beta\gamma = \alpha\delta$, и тогда выполняется формула $\text{CDOneMany}_n(AM)$. В этом случае рассмотрим матрицу

$$AM^{-1} = \text{diag}[\beta\gamma^{-1}, \alpha\delta^{-1}, \alpha\gamma^{-1}].$$

Так как $\beta\gamma^{-1} \neq \alpha\gamma^{-1}$ и $\alpha\delta^{-1} \neq \alpha\gamma^{-1}$, то должно быть $\beta\gamma^{-1} = \alpha\delta^{-1}$. Тогда из $\beta\gamma = \alpha\delta$ и $\beta\gamma^{-1} = \alpha\delta^{-1}$ следует, что $\alpha = \beta$, получаем противоречие. $\square$

Лемма 7. Существует формула $\text{KOneMany}_n(X, M)$ от двух переменных, такая что для любой матрицы A , удовлетворяющей формуле $\text{CDOneMany}_n(A)$, множество матриц M , удовлетворяющих формуле $\text{KOneMany}_n(A, M)$, есть группа $\Phi_N(K_n(R)) = N(K_n(R))N^{-1}$ для некоторой матрицы $N \in \Gamma_n(R)$.

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\text{KOneMany}_n(X, M) := \exists M' (XM' = M'X \wedge \text{DSame}_{1,n-1}(M', M)).$$

Эта формула утверждает, что

$$X \in \bigcup_{A=\text{diag}[\alpha, \dots, \alpha, \beta, \alpha, \dots, \alpha] \in D_n^Z(R), \alpha \neq \beta} C_{G_n(R)}(A),$$

откуда по [4, лемма 5] мы получаем наше утверждение. $\square$

Лемма 8. Существуют формулы $\text{Cycle}_n(X)$, $\text{Trans}_n(X, Y)$ и $\text{Perm}_n(X, Y, Z)$, такие что для любых матриц M_1 , M_2 , M_3 , для которых выполняются формулы $\text{Cycle}_n(M_1)$, $\text{Trans}_n(M_1, M_2)$ и $\text{Perm}_n(M_1, M_2, M_3)$, существует матрица $N \in \Gamma_n(R)$, такая что

$$M_1 = \Phi_N(S_{(1,2,\dots,n)}), \quad M_2 = \Phi_N(S_{(1,2)}), \quad M_3 = \Phi_N(S_\sigma)$$

для некоторой перестановки $\sigma \in \Sigma_n$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу M , удовлетворяющую формуле

$$\text{Cycle}_n(M) := (M^n = 1) \wedge \forall X (\text{CDiag}(X) \wedge MX = XM \implies \text{CDAll}_n(X)).$$

Эта формула утверждает, что матрица M имеет порядок n и коммутирует только со скалярными матрицами из $D_n^Z(R)$. Отсюда следует, что матрица $M = D_\rho S_\rho$, где ρ есть цикл длины n . Без ограничения общности можно считать, что $\rho = (1, 2, \dots, n)$. Из [4, лемма 7] тогда следует, что $M = \Phi_{N'}(S_\rho)$ для некоторого $N' \in \Gamma_n(R)$.

Фиксируем матрицу M , удовлетворяющую формуле $\text{Cycle}_n(M)$ (тогда матрица N' будет выбрана с точностью до умножения на матрицы, коммутирующие с S_ρ).

Рассмотрим матрицу M' , удовлетворяющую формуле (относительно M)

$$\text{Trans}_n(M, M') := (M'^2 = 1) \wedge ((MM')^{n-1} = 1) \wedge \exists X (\text{COneMany}_n(X) \wedge \text{KOneMany}_n(X, MM')).$$

Рассмотрим матрицу $\Phi_{N'}^{-1}(M') = D_\sigma S_\sigma$. Из того, что она удовлетворяет условию $(D_\sigma S_\sigma)^2 = 1$, следует, что $\sigma^2 = 1$, поэтому $\sigma = (i, j)$, $D_\sigma = \text{diag}[d_1, \dots, d_n]$, $d_k = 1$ при $k \neq i, k \neq j$, $d_i d_j = 1$. Из остальных условий следует, что элемент $\sigma\rho$ является циклом длины $n - 1$. С другой стороны,

$$\sigma\rho = (i, j)(1, 2, \dots, n) = (1, 2, \dots, i-1, j, j+1, \dots, n)(i, i+1, \dots, j-1),$$

следовательно, $j = i + 1$. Значит, $S_\sigma = S_{(i, i+1)}$, $\sigma\rho = (1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$. Из условия $(MM')^{n-1} = 1$ получаем

$$(\text{diag}[d_1, \dots, d_n] S_{(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)})^{n-1} = 1,$$

откуда $d_i^{n-1} = 1$, поэтому $d_i = 1$. Таким образом, $\Phi_{N'}^{-1}(M') = S_{(i, i+1)}$ для некоторого $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим теперь матрицу $N'' = S_{\rho'}$, где $\rho' = \rho^{i-1}$. Очевидно, что $\Phi_{N''}(S_\rho) = S_\rho$. При этом $\Phi_{N''}(S_{(i, i+1)}) = S_{(1, 2)}$. Таким образом, мы получили матрицы M_1 и M_2 , для которых существует такая матрица $N = N''N'$, что $M_1 = \Phi_N(S_{(1, 2, \dots, n)})$, $M_2 = \Phi_N(S_{(1, 2)})$. Матрица M_1 — это любая матрица, удовлетворяющая формуле $\text{Cycle}_n(M)$. Матрица M_2 — это любая матрица, удовлетворяющая формуле $\text{Trans}_n(M_1, M)$.

Формула $\text{Perm}_n(M_1, M_2, M)$ строится следующим образом: для данной группы Σ_n для каждого её элемента σ рассмотрим разложение

$$\sigma = (1, 2)^{i_1} (1, 2, \dots, n)^{j_1} \dots (1, 2)^{i_k} (1, 2, \dots, n)^{j_k}.$$

Пусть элементы группы Σ_n — это $\sigma_1, \dots, \sigma_N$,

$$\sigma_l = (1, 2)^{i_1^l} (1, \dots, n)^{j_1^l} \dots (1, 2)^{i_{k(l)}^l} (1, \dots, n)^{j_{k(l)}^l}.$$

Тогда

$$\text{Perm}_n(M_1, M_2, M) := \bigvee_{l=1}^N (M = M_2^{i_1^l} M_1^{j_1^l} \dots M_2^{i_{k(l)}^l} M_1^{j_{k(l)}^l}).$$

Например, для $n = 3$ имеем $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = (1, 2, 3)$, $\sigma_3 = (1, 2)$, $\sigma_4 = (3, 2, 1) = (1, 2, 3)^2$, $\sigma_5 = (1, 3) = (1, 2, 3)(1, 2)$, $\sigma_6 = (2, 3) = (1, 2)(1, 2, 3)$,

$$\begin{aligned} \text{Perm}_3(M_1, M_2, M) := & (M = 1) \vee (M = M_1) \vee (M = M_2) \vee (M = M_1^2) \vee \\ & \vee (M = M_1 M_2) \vee (M = M_2 M_1). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Теперь предположим, что матрицы M_1 и M_2 фиксированы. Тогда с точностью до умножения на матрицу $\alpha I \in D_n^Z(R)$ фиксирована и матрица N .

Лемма 9. Существуют формулы

$$\text{GOneMany}_n(M_1, M_2, M), \quad \text{DOneMany}_n(M_1, M_2, M),$$

истинные в полугруппе $G_n(R)$ для тех и только тех матриц M , которые имеют вид $\Phi_N(\text{diag}[\alpha, \beta, \dots, \beta])$, $\alpha, \beta \in R_+^*$, и $\Phi_N(\text{diag}[\alpha, \beta, \dots, \beta])$, $\alpha, \beta \in R_+^*$, $\alpha \neq \beta$, соответственно.

Доказательство. Очевидно, что формулы

$$\text{GOneMany}_n(M_1, M_2, M) := ((M_2 M_1) \cdot M = M \cdot (M_2 M_1)) \wedge \text{Diag}(M)$$

и

$$\text{DOneMany}_n(M_1, M_2, M) := \text{GOneMany}_n(M_1, M_2, M) \wedge (M_2 M \neq M M_2)$$

(см. [4, лемма 8]) являются искомыми. $\square$

Лемма 10. Существует формула $\text{G}_2\text{CD}_{n-2}(M_1, M_2, M)$, истинная в полугруппе $G_n(R)$ для тех и только тех матриц M , которые имеют вид $\Phi_N(\text{diag}[X, a, \dots, a])$, где $X \in G_2(R)$, $a \in Z_+^*(R^*)$.

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме мы можем написать формулу $\text{DTwoMany}_n(M_1, M_2, M)$, истинную в полугруппе $G_n(R)$ для тех и только тех матриц M , которые имеют вид

$$\Phi_N(\text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \dots, \beta]) \in D_n(R), \quad \alpha \neq \beta.$$

Формула

$$\text{DTransp}_{1,2}(M_1, M_2, M) := (M^2 = 1) \wedge \exists X (\text{Diag}(X) \wedge M = X M_2)$$

выделяет инволюции вида

$$\Phi_N(\text{diag}[\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1]S_{(1,2)}), \quad \xi \in R_+^*$$

(см. [4, начало доказательства леммы 9]).

Аналогично формула

$$\text{CDTransp}_{1,2}(M_1, M_2, M) := (M^2 = 1) \wedge \exists X (\text{CDiag}(X) \wedge M = X M_2)$$

выделяет инволюции

$$\Phi_N(\text{diag}[\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1]S_{(1,2)}), \quad \xi \in Z_+^*(R^*).$$

Формула

$$\text{CD}_2\text{D}_{n-2}(M_1, M_2, M) :=$$

$$:= \text{DTwoMany}(M_1, M_2, M) \wedge \forall X (\text{DTransp}_{1,2}(M_1, M_2, X) \implies XM = MX)$$

выделяет множество матриц вида

$$\Phi_N(\text{diag}[\mu, \mu, \eta, \dots, \eta]), \quad \mu \in Z_+^*(R^*), \quad \eta \in R^*.$$

Как мы помним, формула $\text{CDAll}(M)$ выделяет матрицы αI , $\alpha \in Z_+^*(R^*)$.

Выпишем теперь формулу

$$\begin{aligned} G_2CD_{n-2}(M_1, M_2, M) &:= \forall X (CD_2D_{n-2}(M_1, M_2, X) \implies \\ &\implies \exists Y (CD_{All}(Y) \wedge MXY = XYM \wedge \\ &\wedge (M_1^{i_1} M_2^{j_2} \dots M_1^{i_k} M_2^{j_k})M = M(M_1^{i_1} M_2^{j_1} \dots M_1^{i_k} M_2^{j_k}))), \end{aligned}$$

где

$$(1, 2, \dots, n)^{i_1} (1, 2)^{j_1} \dots (1, 2, \dots, n)^{i_k} (1, 2)^{j_k} = (3, \dots, n)$$

(при $n = 3$ это последнее условие не нужно). Эта формула равносильна условию (2) [4, доказательство леммы 9]. В [4] доказано, что в этом случае

$$M = \Phi_N(\text{diag}[X, a, \dots, a]), \quad X \in G_2(R), \quad a \in Z_+^*(R^*),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 11. Существует формула $ZDOneMany_n(M_1, M_2, M)$, истинная в полугруппе $G_n(R)$ для тех и только тех матриц M , которые имеют вид

$$\Phi_N(\text{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta]), \quad \xi, \eta \in Z_+^*(R).$$

Доказательство. Аналогично формуле $G_2CD_{n-2}(M_1, M_2, M)$ можно написать формулу $CD_{n-2}G_2(M_1, M_2, M)$, истинную для тех и только тех матриц M , которые имеют вид

$$\Phi_N(\text{diag}[a, \dots, a, X]), \quad X \in G_2(R), \quad a \in Z_+^*(R).$$

Формула

$$ZDAll(M) := \forall X (XM = MX)$$

выделяет центр полугруппы $G_n(R)$, состоящий из матриц αI , $\alpha \in Z_+^*(R)$.

Пусть для $n \geq l \geq 2$

$$(1, l) = (1, 2, \dots, n)^{i_1^l} (1, 2)^{j_1^l} \dots (1, 2, \dots, n)^{i_{k(l)}^l} (1, 2)^{j_{k(l)}^l}.$$

Тогда формула

$$\begin{aligned} ZDOneMany_n(M_1, M_2, M) &:= DOneMany_n(M_1, M_2, M) \wedge \\ &\wedge \forall X (CD_{n-2}G_2(M_1, M_2, X) \implies MX = XM) \wedge \\ &\wedge ZDAll_n(M \cdot (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2} \cdot M M_2^{-j_{k(2)}^2} M_1^{-i_{k(2)}^2} \dots \\ &\dots (M_1^{i_1^n} M_2^{j_1^n} \dots M_1^{i_{k(n)}^n} M_2^{j_{k(n)}^n} M M_2^{-j_{k(n)}^n} M_1^{-i_{k(n)}^n} \dots M_2^{-j_1^n} M_1^{-i_1^n))) \end{aligned}$$

удовлетворяет условию (см. [4, доказательство леммы 10]). $\square$

Лемма 12. Существует формула $Main(M_1, M_2, M)$, истинная для тех и только тех матриц M , которые имеют либо вид

$$\Phi_N B_{12}(x) = N B_{12}(x) N^{-1},$$

либо вид

$$\Phi_N B_{21}(x) = N B_{21}(x) N^{-1}$$

для некоторого $x \in R_+$.

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \text{Main}(M_1, M_2, M) &:= \text{G}_2\text{CD}_{n-2}(M_1, M_2, M) \wedge \\ &\wedge \exists X (\text{ZDOneMany}(M_1, M_2, X) \wedge M^2 = XMX^{-1}) \wedge \\ &\wedge \forall X (\text{ZDOneMany}(M_1, M_2, X) \implies M(XMX^{-1}) = (XMX^{-1})M). \end{aligned}$$

Матрица M удовлетворяет формуле $\text{G}_2\text{CD}_{n-2}(M_1, M_2, M)$, откуда следует, что

$$M = \Phi_N \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}, \quad a \in Z_+^*(R^*), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_2(R).$$

Матрица M удовлетворяет подформуле

$$\forall X (\text{ZDOneMany}(M_1, M_2, X) \implies M(XMX^{-1}) = (XMX^{-1})M),$$

поэтому справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \xi\eta^{-1}\beta & & & \\ \eta\xi^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \alpha & \xi\eta^{-1}\beta & & & \\ \eta\xi^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для всех $\eta, \xi \in Z_+^*(R)$, из которого следует соотношение

$$\eta\xi^{-1}\beta\gamma = \xi\eta^{-1}\beta\gamma$$

для любых $\eta, \xi \in Z_+^*(R)$, в том числе и для $\eta = 2, \xi = 1$. Таким образом, получаем

$$2\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta\gamma \implies \left(2 - \frac{1}{2}\right)\beta\gamma = 0.$$

Значит, либо $\beta = 0$, либо $\gamma = 0$.

Условие

$$\exists X (\text{ZDOneMany}(M_1, M_2, X) \wedge M^2 = XMX^{-1}), \quad X = \text{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta],$$

даёт либо соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta + \beta\delta & & & \\ 0 & \delta^2 & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \xi\eta^{-1}\beta & & & \\ 0 & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix},$$

откуда $\alpha = \delta = a = 1$, либо соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & & & \\ \alpha\gamma + \gamma\delta & \delta^2 & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & & & \\ \eta\xi^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix},$$

откуда $\alpha = \delta = a = 1$. Следовательно, либо $M = B_{12}(\beta)$, либо $M = B_{21}(\gamma)$. $\square$

Лемма 13. Существует формула $\text{MainUnit}_{1,2}(M_1, M_2, M)$, истинная только для матрицы $M = \Phi_N B_{12}(1)$.

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \text{MainUnit}_{1,2}(M_1, M_2, M) &= \text{Main}(M_1, M_2, M) \wedge (M \neq 1) \wedge \\ &\wedge ((M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \cdot M \cdot (M_2^{-j_{k(1)}^1} M_1^{-i_{k(1)}^1} \dots M_2^{-j_1^1} M_1^{-i_1^1}) \times \\ &\times (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) \cdot M \cdot (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) = \\ &= (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) \cdot M \times \\ &\times (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) (M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \cdot M \times \\ &\times (M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \cdot M), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (2, 3) &= (1, 2, \dots, n)^{i_1^1} (1, 2)^{j_1^1} \dots (1, 2, \dots, n)^{i_{k(1)}^1} (1, 2)^{j_{k(1)}^1}, \\ (1, 3) &= (1, 2, \dots, n)^{i_1^2} (1, 2)^{j_1^2} \dots (1, 2, \dots, n)^{i_{k(2)}^2} (1, 2)^{j_{k(2)}^2}. \end{aligned}$$

Так как любая матрица, удовлетворяющая формуле $\text{Main}(M_1, M_2, M)$, может иметь либо вид $\Phi_N B_{12}(x)$, либо вид $\Phi_N B_{21}(x)$, то мы получаем одно из двух соотношений: либо

$$\begin{aligned} S_{(2,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(2,3)} S_{(1,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(1,3)} &= \\ &= S_{(1,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(1,3)} S_{(2,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(2,3)} \Phi_N^{-1}(M), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, $x^2 = x$, поэтому $x = 1$ и $M = \Phi_N B_{12}(1)$, либо

$$\begin{aligned} S_{(2,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(2,3)} S_{(1,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(1,3)} &= \\ &= S_{(1,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(1,3)} S_{(2,3)} \Phi_N^{-1}(M) S_{(2,3)} \Phi_N^{-1}(M), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 + x & 1 & x \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, $x^2 + x = 0$, что невозможно. $\square$

Лемма 14. Существует формула $\text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, M)$, истинная в полугруппе $G_n(R)$ для матриц $\Phi_N(B_{12}(x))$, $x \in R \cup \{0\}$, и только для них.

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, M) &:= \\ &:= \text{Main}(M_1, M_2, M) \wedge \forall X (\text{MainUnit}_{1,2}(X) \implies XM = MX). \end{aligned}$$

Из того, что матрица M удовлетворяет формуле $\text{Main}(M_1, M_2, M)$, следует, что $M = \Phi_N(B_{12}(x))$ или $M = \Phi_N(B_{21}(x))$ для некоторого $x \in R$. Во втором случае из второй части формулы получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 1+x \end{pmatrix}$$

и $x = 0$. $\square$

Лемма 15. Существуют формулы

$$\text{Addit}_n(M_1, M_2, X_1, X_2, X_3), \quad \text{Multipl}_n(M_1, M_2, X_1, X_2, X_3),$$

истинные в полугруппе $G_n(R)$ для тех и только тех матриц X_1, X_2, X_3 , которые имеют вид $X_1 = \Phi_N(B_{12}(x_1))$, $X_2 = \Phi_N(B_{12}(x_2))$, $X_3 = \Phi_N(B_{12}(x_3))$, где $x_1, x_2, x_3 \in R_+ \cup \{0\}$ и соответственно либо $x_3 = x_1 + x_2$, либо $x_3 = x_1 \cdot x_2$.

Доказательство. Искомые формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Addit}_n(M_1, M_2, X_1, X_2, X_3) &:= \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X_1) \wedge \\ &\wedge \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X_2) \wedge \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X_3) \wedge X_3 = X_1 \cdot X_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{Multipl}_n(M_1, M_2, X_1, X_2, X_3) &:= \\ &:= \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X_1) \wedge \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X_2) \wedge \text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X_3) \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge (M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \cdot X_1 \cdot (M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \times \\
& \times (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) \cdot X_2 \cdot (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) = \\
& = (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) \cdot X_2 \cdot (M_1^{i_1^2} M_2^{j_1^2} \dots M_1^{i_{k(2)}^2} M_2^{j_{k(2)}^2}) \times \\
& \times (M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \cdot X_1 \cdot (M_1^{i_1^1} M_2^{j_1^1} \dots M_1^{i_{k(1)}^1} M_2^{j_{k(1)}^1}) \cdot X_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(2, 3) &= (1, 2, \dots, n)^{i_1^1} (1, 2)^{j_1^1} \dots (1, 2, \dots, n)^{i_{k(1)}^1} (1, 2)^{j_{k(1)}^1}, \\
(1, 3) &= (1, 2, \dots, n)^{i_1^2} (1, 2)^{j_1^2} \dots (1, 2, \dots, n)^{i_{k(2)}^2} (1, 2)^{j_{k(2)}^2}.
\end{aligned}$$

Первая формула очевидна, а вторая следует из соотношения

$$B_{13}(x_1)B_{32}(x_2) = B_{32}(x_2)B_{13}(x_1)B_{12}(x_1x_2).$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. Пусть R и S — линейно упорядоченные кольца с $1/2$, $G_n(R)$ и $G_m(S)$ — полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами, $n, m \geq 3$. Тогда полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда $n = m$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.

Доказательство.

1. Пусть $R_+ \equiv S_+$. Покажем, что $G_n(R) \equiv G_n(S)$.

Действительно, рассмотрим полугруппу $G_n(R)$ ($n \geq 3$) и какое-нибудь предложение группового языка

$$\mathcal{U} = (Q_1 X_1) \dots (Q_r X_r) \mathcal{B}(X_1, \dots, X_r) \quad (Q_i = \exists, \forall).$$

Матрица $X \in G_n(R)$ есть набор $\{x_{ij}\}$ из n^2 элементов полукольца $R_+ \cup \{0\}$ с условием существования в $\text{GL}_n(R)$ обратной матрицы. Это условие можно выразить следующим образом ($\mathcal{J}_n$ — множество $\{1, \dots, n\}$):

$$\begin{aligned}
\exists y_{11} \dots \exists y_{nn} \bigvee_{S \subseteq \mathcal{J}_n \times \mathcal{J}_n} \bigwedge_{i, k \in \mathcal{J}_n \times \mathcal{J}_n} \left(\delta_{ik} + \sum_{\langle j, k \rangle \in S} x_{ij} y_{jk} = \sum_{\langle j, k \rangle \notin S} x_{ij} y_{jk} \wedge \right. \\
\left. \wedge \delta_{ik} + \sum_{\langle i, j \rangle \in S} y_{ij} x_{jk} = \sum_{\langle i, j \rangle \notin S} y_{ij} x_{jk} \right).
\end{aligned}$$

Обозначим это условие на матрицу X через $\mathbf{G}(X)$. Тогда истинность $\mathcal{U}$ на $G_n(R)$ очевидна и равносильна истинности на R_+ предложения $\mathcal{U}_R$, получающегося из $\mathcal{U}$ следующим процессом (ср. [5]):

а) в формуле $\mathcal{B}(X_1, \dots, X_r)$ отношения вида $X_i = X_j$ и $X_i = X_j X_k$ заменяем соответственно формулами

$$\bigwedge_{\lambda, \mu} (x_{i\lambda\mu} = x_{j\lambda\mu}) \quad \text{и} \quad \bigwedge_{\lambda, \mu} (x_{i\lambda\mu} = x_{j\lambda 1} x_{k 1 \mu} + \dots + x_{j\lambda n} x_{k n \mu});$$

- б) если формула $\mathcal{B}_{i+1} = (Q_{i+1}X_{i+1}) \dots (Q_rX_r)\mathcal{B}$ преобразовывается в формулу $\mathcal{Q}_{i+1}$, то формула $\mathcal{B}_i = \forall X_i \mathcal{B}_{i+1}$ преобразовывается в формулу

$$\forall x_{i11} \dots \forall x_{inn} (\mathbf{G}(x_{i11}, \dots, x_{inn}) \implies \mathcal{Q}_{i+1}),$$

- а формула $\mathcal{B}_i = \exists X_i \mathcal{B}_{i+1}$ преобразовывается в формулу

$$\exists x_{i11} \dots \exists x_{inn} (\mathbf{G}(x_{i11}, \dots, x_{inn}) \wedge \mathcal{Q}_{i+1}).$$

Следовательно, каждое предложение $\mathcal{U}$ группового языка можно указанным выше способом преобразовать в предложение $\mathcal{U}_R$ кольцевого языка. Вид предложения $\mathcal{U}_R$ не зависит от базисного кольца. Таким образом, истинность $\mathcal{U}$ на $G_n(R)$ равносильна истинности $\mathcal{U}_R$ на R . Истинность же $\mathcal{U}_R$ на R равносильна истинности $\mathcal{U}_R$ на S , так как $R \equiv S$. Поэтому истинность $\mathcal{U}$ на $G_n(R)$ равносильна истинности $\mathcal{U}$ на $G_n(S)$, и следовательно, $G_n(R) \equiv G_n(S)$.

2. Теперь докажем обратную импликацию. Пусть полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ элементарно эквивалентны. Из леммы 4 тогда следует, что $m = n$, поэтому мы можем считать, что имеем дело с полугруппами $G_n(R)$ и $G_n(S)$.

Теперь докажем, что $R_+ \equiv S_+$. Пусть мы имеем некоторое предложение φ кольцевого языка. Переведём его в предложение $\bar{\varphi}$ группового языка по следующему алгоритму. Предложение $\bar{\varphi}$ имеет вид

$$\exists M_1 \exists M_2 (\text{Cycle}_n(M_1) \wedge \text{Transp}_n(M_1, M_2) \wedge \varphi'(M_1, M_2)),$$

где формула φ получается из предложения φ следующими заменами подформул, входящих в φ :

- 1) подформула $\forall x \psi$ переводится в подформулу

$$\forall X (\text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X) \implies \psi');$$

- 2) подформула $\exists x \psi$ переводится в подформулу

$$\exists X (\text{Main}_{1,2}(M_1, M_2, X) \wedge \psi');$$

- 3) подформула $x = y$ переводится в подформулу $X = Y$;

- 4) подформула $x = y + z$ переводится в подформулу $\text{Addit}_n(M_1, M_2, X, Y, Z)$;

- 5) подформула $x = yz$ переводится в подформулу $\text{Multipl}_n(M_1, M_2, X, Y, Z)$.

Очевидно, что предложение φ истинно в полукольце R_+ тогда и только тогда, когда предложение $\bar{\varphi}$ истинно в полугруппе $G_n(R)$. Так как полугруппы $G_n(R)$ и $G_n(S)$ элементарно эквивалентны, то истинность предложения $\bar{\varphi}$ в полугруппе $G_n(R)$ равносильна его истинности в полугруппе $G_n(S)$, что, в свою очередь, равносильно истинности предложения φ в полукольце S_+ . Значит, полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны. $\square$

Литература

- [1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

- [2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // *Фундам. и прикл. мат.* — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265—1278.
- [3] Бунина Е. И. Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства // *Успехи мат. наук.* — 2004. — Т. 59, № 5. — С. 952—953.
- [4] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Фундам. и прикл. мат.* — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.
- [5] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // *Проблемы математики и механики.* — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.
- [6] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Мат. сб.* — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.
- [7] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // *Contemp. Math.* — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

