Изоморфизмы унитарных групп над кольцами

А. С. ИСМАГИЛОВА
Башкирский государственный
педагогический университет
e-mail: IsmagilovaAS@rambler.ru

УДК 512.743

Ключевые слова: унитарные группы группы, идемпотенты, изоморфизмы.

Аннотация

В статье описаны изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами с обратимой двойкой, содержащими плотную систему идемпотентов.

Abstract

A. S. Ismagilova, Isomorphisms of the unitary group over a ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 55—70.

We describe isomorphisms of unitary groups over associative rings with 1/2 that contain a compact system of idempotents.

Пусть R, S — ассоциативные кольца с единицей, $\frac{1}{2} \in R$, $\frac{1}{2} \in S$.

Определение 1. Элемент $\Omega \in R$ называется инволюцией, если $\Omega^2 = 1$.

Определение 2. Элемент $f \in R$ называется идемпотентом, если $f^2 = f$.

Определение 3. Сопряжением τ кольца R называется антиавтоморфизм мультипликативного второго порядка.

Пусть $\{f_i \in R \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\}$ — плотная ортогональная система идемпотентов, т. е.

$$Rf_iR = R, \quad f_i \cdot f_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i = 1, \quad f_k^\tau = f_{k+3}, \tag{1}$$

где $1 \leqslant i \neq j \leqslant 6$, $1 \leqslant k \leqslant 3$, τ — сопряжение в R. Пусть центр кольца R содержит обратимый элемент α, для которого элемент $\alpha\alpha^\tau - 1$ обратим в R. Пусть $U(R,\tau) = \{A \in R \mid A^\tau \cdot A = A \cdot A^\tau = 1\}$ — унитарная группа, $E(R,\tau)$ — её подгруппа, порождённая элементами $1+f_irf_j-(f_irf_j)^\tau$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant 6$, $r \in R$. Пусть I — идеал в R, $E(R,I,\tau)$ — нормальный делитель в $E(R,\tau)$, порождённый элементами $1 + f_irf_j - (f_irf_j)^\tau$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant 6$, $r \in I$. Пусть $C(R,I,\tau)$ — прообраз центра при каноническом гомоморфизме $\varphi_I \colon U(R,\tau) \to U(R/I,\tau)$.

Пусть τ_1, $\{g_i \in S \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\}$, $U(S,\tau_1)$, $E(S,\tau_1)$, $E(S,J,\tau_1)$ — второй набор объектов с аналогичными свойствами.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 55—70.

Замечание. Условие $1 \leqslant i \neq j \leqslant 6$ значительно упрощает доказательство. Общий случай $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2n$ сводится к рассматриваемому, поскольку можно взять суммы идемпотентов и осуществить переход от $2n$ к 6:

$$f_1' = f_1, \quad f_2' = f_2, \quad f_3' = f_3 + \ldots + f_n,$$
$$f_4' = f_1^\tau = f_{n+1}, \quad f_5' = f_2^\tau = f_{n+2}, \quad f_6' = f_{n+3} + \ldots + f_{2n}.$$

Отметим также, что в нашем случае идемпотенты не сопряжены и, как и в [1], наложено условие на центр.

Основной в настоящей работе является следующая теорема.

Теорема. *Пусть R и S — ассоциативные кольца, удовлетворяющие всем условиям, сформулированным выше. Пусть $\varphi\colon U(R,\tau) \to U(S,\tau_1)$ — изоморфизм унитарных групп. Тогда существует такой изоморфизм колец $\theta\colon R \to S$, что*

$$\varphi(A) = \theta(A), \quad \text{где} \quad A \in E(R,\tau).$$

Полученный результат, в частности, распространяется на ортогональные и симплектические группы.

Нам потребуются вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Если идемпотент $e \in R$ перестановочен со всеми обратимыми элементами кольца R, то он лежит в центре кольца R.*

Доказательство. Для любого элемента $x \in R$ имеем следующее разложение Пирса:

$$e(1 + ex(1-e)) = e + ex(1-e) = (1 + ex(1-e))e = e.$$

Значит, $eR(1-e) = 0$. Аналогично $(1-e)Re = 0$. Таким образом,

$$R = eRe \oplus (1-e)R(1-e).$$

Лемма доказана. □

Полное доказательство леммы 1 можно найти в [2].

Лемма 2. *Пусть R — ассоциативное кольцо с сопряжением τ и идемпотентом e, таким что $ReR = R$, $e^\tau = 1 - e$, $\frac{1}{2} \in R$. Пусть центр кольца содержит такой обратимый элемент α, что элемент $\alpha\alpha^\tau - 1$ обратим в R. Пусть существует инволюция $\Omega \in U(R,\tau)$, $\Omega^2 = 1$, перестановочная со всеми элементами из $U(R,\tau)$. Тогда $\Omega = 1 - 2f$, где $f^2 = f$, $f \in Z(R)$.*

Доказательство. Каждый элемент $A \in R$ будем рассматривать как матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} eAe & eA(1-e) \\ (1-e)Ae & (1-e)A(1-e) \end{pmatrix}.$$

Для любых матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} eA_1e & eA_1(1-e) \\ (1-e)A_1e & (1-e)A_1(1-e) \end{pmatrix} \in R,$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} eA_2e & eA_2(1-e) \\ (1-e)A_2e & (1-e)A_2(1-e) \end{pmatrix} \in R$$

имеем

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} eA_1A_2e & eA_1A_2(1-e) \\ (1-e)A_1A_2e & (1-e)A_1A_2(1-e) \end{pmatrix} \in R.$$

Рассмотрим элемент

$$A = \begin{pmatrix} \alpha e & 0 \\ 0 & (\alpha^{-1})^\tau e^\tau \end{pmatrix},$$

где элемент α определён в условии леммы. По определению $A \in U(R,\tau)$

$$A^\tau \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}e & 0 \\ 0 & \alpha^\tau e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e & 0 \\ 0 & (\alpha^{-1})^\tau e^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^{-1}e & 0 \\ 0 & (\alpha^{-1}\alpha)^\tau e^\tau \end{pmatrix} = 1.$$

Пусть

$$\Omega = \begin{pmatrix} e\omega e & e\omega e^\tau \\ e^\tau\omega e & e^\tau\omega e^\tau \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Omega \cdot A = A \cdot \Omega,$$
$$\begin{pmatrix} e\omega e\alpha e & e\omega e^\tau(\alpha^{-1})^\tau e^\tau \\ e^\tau\omega e\alpha e & e^\tau\omega e^\tau(\alpha^{-1})^\tau e^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e e\omega e & \alpha e e\omega e^\tau \\ (\alpha^{-1})^\tau e^\tau e^\tau\omega e & (\alpha^{-1})^\tau e^\tau e^\tau\omega e^\tau \end{pmatrix}.$$

Приравнивая в последнем равенстве элементы матриц на местах $(1,2)$ и $(2,1)$, получаем

$$e\omega e^\tau(\alpha^{-1})^\tau e^\tau = \alpha e e\omega e^\tau, \quad e^\tau\omega e\alpha e = (\alpha^{-1})^\tau e^\tau e^\tau\omega e,$$
$$e\omega e^\tau(\alpha^{-1})^\tau e^\tau - \alpha e e\omega e^\tau = 0, \quad e^\tau\omega e\alpha e - (\alpha^{-1})^\tau e^\tau e^\tau\omega e = 0.$$

Вынесем общие множители за скобки:

$$((\alpha^{-1})^\tau - \alpha)e\omega e^\tau = 0, \quad e^\tau\omega e(\alpha - (\alpha^{-1})^\tau) = 0.$$

Умножая последние равенства на α^τ, получаем

$$(1 - \alpha\alpha^\tau)e\omega e^\tau = 0, \quad e^\tau\omega e(\alpha\alpha^\tau - 1) = 0.$$

По условию леммы элемент $\alpha\alpha^\tau - 1$ обратим в R. Следовательно,

$$e\omega e^\tau = 0, \quad e^\tau\omega e = 0.$$

Таким образом,

$$\Omega = \begin{pmatrix} e\omega e & 0 \\ 0 & e^\tau\omega e^\tau \end{pmatrix} \in U(R,\tau). \tag{2}$$

Покажем, что инволюция Ω перестановочна со всеми обратимыми элементами кольца R и $\Omega \in Z(R)$.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} ebe & 0 \\ 0 & e^\tau c^\tau e^\tau \end{pmatrix} \in U(R,\tau),$$

где $ece = (ebe)^{-1}$ в eRe и $ebece = e$, т. е. ebe — произвольный обратимый элемент в eRe. Тогда $B \in U(R,\tau)$. Действительно,

$$B^\tau \cdot B = \begin{pmatrix} ece & 0 \\ 0 & e^\tau b^\tau e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ebe & 0 \\ 0 & e^\tau c^\tau e^\tau \end{pmatrix} = 1.$$

Далее,

$$\left[\begin{pmatrix} e\omega e & 0 \\ 0 & e^\tau \omega e^\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ebe & 0 \\ 0 & e^\tau c^\tau e^\tau \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} e\omega e & 0 \\ 0 & e^\tau \omega e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ece & 0 \\ 0 & e^\tau b^\tau e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e\omega e & 0 \\ 0 & e^\tau \omega e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ebe & 0 \\ 0 & e^\tau c^\tau e^\tau \end{pmatrix} = 1.$$

Так как $\Omega^2 = 1$, то $(e\omega e)^2 = 1$ и $e\omega e = e - 2\bar{f}$, $\bar{f} \in eRe$. По лемме 1 $\bar{f}$ — центральный идемпотент в eRe. Из условия леммы $ReR = R$ следует, что

$$\bar{f} = f \cdot e, \tag{3}$$

где

$$f = \sum_i r_i e\bar{f}es_i, \quad \sum_i r_i e s_i = 1, \quad r, s \in R.$$

Покажем, что f — центральный идемпотент. Пусть $a \in R$,

$$a = \sum_{i,j} r_j e s_j a r_i e s_i.$$

Тогда

$$f \cdot a = \sum_{i,j} r_i e\bar{f}(es_i r_j e s_j a r_i e)s_i = \sum_{i,j} r_i e s_i r_j e s_j a r_i e \bar{f} e s_i = a \cdot f$$

и

$$f^2 = \left(\sum_i r_i e\bar{f}es_i\right)^2 = \sum_{i,j} r_i e\bar{f}(es_i r_j e)\bar{f}es_j =$$

$$= \sum_{i,j} r_i e(es_i r_j e)\bar{f}^2 s_j = \sum_i r_i e s_i \sum_j r_j e\bar{f}es_j = f.$$

Рассмотрим разложения Пирса

$$e_3 = ff^\tau, \quad e_1 = f - ff^\tau, \quad e_2 = f^\tau - ff^\tau. \tag{4}$$

Ясно, что e_1, e_2, e_3 — центральные ортогональные идемпотенты.

Из формул (4) следует, что

$$e_1^\tau = (f - ff^\tau)^\tau = f^\tau - f^\tau f = e_2, \quad e_3^\tau = (ff^\tau)^\tau = f^\tau f = e_3, \tag{5}$$

$$f = e_1 + e_3, \quad f^\tau = e_2 + e_3. \tag{6}$$

Рассмотрим элемент

$$x = 1 + e_1er(1-e) - e_2(er(1-e))^\tau = \begin{pmatrix} e & e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e \\ 0 & e^\tau \end{pmatrix}.$$

Поскольку $x \in U(R,\tau)$, то x перестановочен с

$$\Omega = \begin{pmatrix} e\omega e & 0 \\ 0 & e^\tau \omega e^\tau \end{pmatrix},$$

где

$$e\omega e = e - 2\bar{f}, \quad e^\tau \omega e^\tau = e - 2\bar{f}^\tau. \tag{7}$$

Таким образом,

$$x \cdot \sigma = \sigma \cdot x,$$
$$(e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e)e^\tau \omega e^\tau = e\omega e(e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e). \tag{8}$$

Подставляя значения $e\omega e$ и $e^\tau \omega e^\tau$ из (7) в равенство (8), получаем

$$(e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e)(\bar{f}^\tau - \bar{f}) = 0.$$

По (3)

$$(e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e)(f^\tau e - fe) = 0,$$

и, применяя (6), получаем

$$(e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e)(e_1e - e_2e) = 0.$$

Следовательно,

$$e_1er(1-e) - e_2(1-e)r^\tau e = 0. \tag{9}$$

Умножая равенство (9) поочередно на e_1 и e_2, получаем соответственно

$$e_1er(1-e) = 0, \quad e_2(1-e)r^\tau e = 0.$$

Поскольку $er(1-e)$, $(1-e)r^\tau e$ — произвольные элементы кольца, то

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0. \tag{10}$$

Таким образом, из формул (2), (7), (6), (10) получаем

$$\Omega = \begin{pmatrix} e - 2e_3e & 0 \\ 0 & e^\tau - 2e_3e^\tau \end{pmatrix} = 1 - 2e_3,$$

где e_3 — центральный идемпотент. Итак, $\Omega \in Z(R)$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть R — ассоциативное кольцо с сопряжением τ, $\frac{1}{2} \in R$. Пусть центр кольца содержит обратимый элемент α, такой что элемент $(\alpha\alpha^\tau - 1)$ обратим в R. Пусть $\{e_i \in R \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\}$ — система идемпотентов, определённая условием (1). Пусть G, H — нормальные делители группы $U(R,\tau)$, такие что $U(R,\tau) = G \oplus H$, $G \cap H = \{1\}$. Тогда существуют идеалы I и J кольца R, для которых $R = I \oplus J$, $I^\tau = I$, $J^\tau = J$, $E(I,\tau) \subseteq G \subseteq C(R,I,\tau)$, $E(J,\tau) \subseteq H \subseteq C(R,J,\tau)$.*

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon_1 = 1 - 2e_1, \quad \varepsilon_2 = 1 - 2(e_2 + e_3),$$

где e_1, e_2, e_3 — идемпотенты из условия леммы. Очевидно, что

$$\varepsilon_i = a_i b_i, \tag{11}$$

где $a_i \in G$, $b_i \in H$, $i = 1, 2$. Заметим, что

$$\varepsilon_i^2 = 1. \tag{12}$$

Действительно,

$$\varepsilon_1^2 = (1 - 2e_1)^2 = 1 - 4e_1 + 4e_1^2 = 1,$$
$$\varepsilon_2^2 = (1 - 2(e_2 + e_3))^2 = 1 - 4(e_2 + e_3) + 4(e_2 + e_3)^2 = 1.$$

Из формул (11), (12) получаем

$$a_i^2 b_i^2 = 1, \quad a_i^2 = b_i^{-2},$$

где $a_i^2 \in G \cap H$, $b_i^2 \in G \cap H$. Нетрудно заметить, что $a_i^2 = 1$, $b_i^2 = 1$, следовательно, элементы a_i, b_i можно представить в виде

$$a_i = 1 - 2f_i, \quad b_i = 1 - 2g_i,$$

где $f_i^2 = f_i$, $g_i^2 = g_i$.

Если элемент $1 - 2f_i$, где $f_i^2 = f_i$, перестановочен с обратимыми, то f_i централен: $(1 - 2f_i)r = r(1 - 2f_i)$, где $r \in U(R, \tau)$. Тогда $f_i r = r f_i$. Итак,

$$r = f_i r f_i + (1 - f_i) r f_i + f_i r (1 - f_i) + (1 - f_i) r (1 - f_i),$$
$$f_i r = f_i r f_i + f_i r (1 - f_i), \quad r f_i = f_i r f_i + (1 - f_i) r f_i.$$

Таким образом, $f_i r = r f_i$ тогда и только тогда, когда $f_i r (1 - f_i) = 0$ и $(1 - f_i) r f_i = 0$. Аналогичные рассуждения проводятся для $b_i = 1 - 2g_i$.

Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \sigma\varepsilon_i = \sigma\varepsilon_i.$$

Если элемент σ обратим, то

$$\sigma a_i \sigma^{-1} = a_i, \quad \sigma b_i \sigma^{-1} = b_i,$$

иначе

$$\sigma(a_i b_i)\sigma^{-1} = a_i b_i,$$
$$\sigma a_i \sigma^{-1} \sigma b_i \sigma^{-1} = a_i b_i. \tag{13}$$

Отсюда $\sigma a_i \sigma^{-1} \in G$, $\sigma b_i \sigma^{-1} \in H$, где $a_i \in G$, $b_i \in H$. Из равенства (13) получаем

$$a_i^{-1} \sigma a_i \sigma^{-1} = b_i \sigma^{-1} b_i^{-1} \sigma, \tag{14}$$

где $a_i^{-1} \sigma a_i \sigma^{-1} \in G$, $b_i \sigma^{-1} b_i^{-1} \sigma \in H$. Из (14) выводим

$$a_i^{-1} \sigma a_i \sigma^{-1} \in G \cap H = \{1\}, \quad b_i \sigma^{-1} b_i^{-1} \sigma \in G \cap H = \{1\}.$$

Так как $\sigma \in U(R,\tau)$, $a_i^2 = 1$, $b_i^2 = 1$ и эти элементы перестановочны со всеми унитарными элементами, то по лемме 2 они центральны. Таким образом, a_i централен в e_1Re_1, b_i централен в $(e_2+e_3)R(e_2+e_3)$.

Покажем, что a_i, b_i могут быть представлены в виде

$$a_i = \lambda_1 + \mu_1 = \bar\lambda_1 e_1 + \bar\mu_1(e_2+e_3), \quad b_i = \lambda_2 + \mu_2 = \bar\lambda_2 e_1 + \bar\mu_2(e_2+e_3), \tag{15}$$

где $\lambda_i, \mu_i \in Z(R)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

Если $1 = \sum\limits_j r_j e_1 s_j$, то элемент $\bar\lambda_i = \sum\limits_i r_i \lambda_i s_i = \sum\limits_i r_i e_1 a e_1 s_i$ централен в R. Действительно,

$$r\bar\lambda_i = 1\cdot r\cdot\bar\lambda_i = \sum_j r_j e_1 s_j r \sum_i r_i\lambda_i s_i = \sum_j r_j \lambda_i e_1 s_j r \sum_i r_i e_1 s_i = \bar\lambda_i r$$

и $\bar\lambda_i \in Z(R)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

Аналогично $\bar\mu_i \in Z(R)$, где $\bar\mu_i = \sum\limits_i r_i(e_2+e_3)b(e_2+e_3)s_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

Заметим, что

$$\bar\lambda_i e_1 = \lambda_i, \quad \bar\mu_i(e_2+e_3) = \mu_i, \tag{16}$$

где $1 \leqslant i \leqslant 2$. Действительно,

$$\bar\lambda_i e_1 = \sum_i r_i\lambda_i s_i e_1 = \sum_i r_i e_1 \lambda_i e_1 s_i e_1 = \sum_i r_i e_1 s_i \lambda_i = \lambda_i.$$

Аналогично $\bar\mu_i(e_2+e_3) = \mu_i$.

Покажем, что

$$\lambda_i^{-1} = \lambda_i, \quad \mu_i^{-1} = \mu_i. \tag{17}$$

Возводя (11) в квадрат, получаем $\lambda_i^2 = e_1$, $\mu_i^2 = e_2+e_3$. Из (16) выводим

$$(\bar\lambda_i e_1)^2 = e_1, \quad (\bar\mu_i(e_2+e_3))^2 = e_2+e_3,$$

$$\bar\lambda_i^2 \sum_i r_i e_1 s_i = \sum_i r_i e_1 s_i, \quad \bar\lambda_i^2 = 1, \quad \bar\lambda_i^{-1} = \bar\lambda_i,$$

$$\bar\mu_i^2 \sum_i r_i(e_2+e_3)s_i = \sum_i r_i(e_2+e_3)s_i, \quad \bar\mu_i^2 = 1, \quad \bar\mu_i^{-1} = \bar\mu_i.$$

Применяя (16), получаем (17).

По (15) имеем

$$\begin{aligned}
&a_i(1+f_1rf_2 - f_2^\tau r^\tau f_1^\tau)a_i^{-1}(1+f_1rf_2 - f_2^\tau r^\tau f_1^\tau)^{-1} = \\
&\quad = 1 + (\bar\lambda_1\bar\mu_1^{-1} - 1)(f_1rf_2 - f_2^\tau r^\tau f_1^\tau) \in G, \\
&a_i(1+f_2rf_1 - f_1^\tau r^\tau f_2^\tau)a_i^{-1}(1+f_2rf_1 - f_1^\tau r^\tau f_2^\tau)^{-1} = \\
&\quad = 1 + (\bar\lambda_1^{-1}\bar\mu_1 - 1)(f_2rf_1 - f_1^\tau r^\tau f_2^\tau) \in G, \\
&b_i(1+f_1rf_2 - f_2^\tau r^\tau f_1^\tau)b_i^{-1}(1+f_1rf_2 - f_2^\tau r^\tau f_1^\tau)^{-1} = \\
&\quad = 1 + (\bar\lambda_2\bar\mu_2^{-1} - 1)(f_1rf_2 - f_2^\tau r^\tau f_1^\tau) \in H, \\
&b_i(1+f_2rf_1 - f_1^\tau r^\tau f_2^\tau)b_i^{-1}(1+f_2rf_1 - f_1^\tau r^\tau f_2^\tau)^{-1} = \\
&\quad = 1 + (\bar\lambda_2^{-1}\bar\mu_2 - 1)(f_2rf_1 - f_1^\tau r^\tau f_2^\tau) \in H.
\end{aligned}$$

Нормальный делитель, порождённый элементом $1+f_1rf_2-f_2^\tau r^\tau f_1^\tau$, содержит $E(I,\tau)$. Таким образом, $E(I,\tau)\subseteq G$, где $I=R(1-\lambda_1\mu_1)R$. Аналогично $E(J,\tau)\subseteq H$, $J=R(1-\lambda_2\mu_2)R$.

Из формул (11), (15) следует

$$\bar\lambda_1\bar\mu_1=-1,\quad \bar\lambda_2\bar\mu_2=1,$$
$$\bar\mu_1=-\bar\lambda_1^{-1},\quad \bar\mu_2=\bar\lambda_2^{-1}.$$

По определению идеалов I и J

$$1-\bar\lambda_1\bar\lambda_2^{-1}\in I,\quad 1-\bar\mu_1\bar\mu_2^{-1}=1+\bar\lambda_1^{-1}\bar\lambda_2\in J,$$
$$\bar\lambda_1(1+\bar\lambda_1^{-1}\bar\lambda_2)\bar\lambda_2^{-1}=1+\bar\lambda_1\bar\lambda_2^{-1}\in J.$$

Следовательно,

$$1=\frac{1}{2}(1-\bar\lambda_1\bar\lambda_2^{-1}+1+\bar\lambda_1\bar\lambda_2^{-1})\in I+J,\quad R=I+J.$$

Так как $G\cap H=\{1\}$, $E(I\cap J)\subseteq G\cap H$, то $I\cap J=\{0\}$. Действительно, если $x\in I\cap J$, $r=sxt$, то $(1+f_1rf_2-f_2^\tau r^\tau f_1^\tau)\in G\cap H=\{1\}$. Значит, $f_1rf_2-f_2^\tau r^\tau f_1^\tau=0$, следовательно, $x=0$. Тогда $I\cap J=\{0\}$, $R=I\oplus J$.

Если $a\in G$, то $a=a_1a_2$, $a_1\in U(R,I,\tau)$, $a_2\in U(R,J,\tau)$. При этом $[a,E(J,\tau)]\subseteq G\cap H=\{1\}$. Следовательно, a — центральный элемент $U(R,I,\tau)$ и $G\subseteq C(R,I,\tau)$. Аналогично $H\subseteq C(R,J,\tau)$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с сопряжениями τ и τ' соответственно, $\frac12\in R$, $\frac12\in S$. Пусть центр кольца R содержит обратимый элемент α, такой что элемент $(\alpha\alpha^\tau-1)$ обратим в R. Пусть $\{e_i\in R\mid 1\leqslant i\leqslant 6\}$, $\{g_k\mid 1\leqslant k\leqslant 6\}$ — две системы идемпотентов, определённые условием* (1). *Пусть $\varphi\colon U(R,\tau)\to U(S,\tau')$ — изоморфизм унитарных групп. Тогда существуют элементы $c_{ij}\in Z(S)$ и ортогональная система идемпотентов*

$$\Big\{h_t\in S\ \Big|\ \sum_t h_t=1,\ h_t^{\tau'}=h_t,\ 1\leqslant t\leqslant 3\Big\},$$

такие что

$$\varphi(1-2(e_i+e_i^\tau+e_j+e_j^\tau))=c_{ij}(1-2(h_i+h_j)),\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant 3.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(1-2(e_i+e_i^\tau+e_j+e_j^\tau))=1-2(f_i+f_j),\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant 3.$$

Очевидно, $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ — ортогональная система идемпотентов. Действительно, ясно, что

$$\varphi(1-2(e_1+e_1^\tau+e_2+e_2^\tau))=1-2f_{12},$$
$$\varphi(1-2(e_1+e_1^\tau+e_3+e_3^\tau))=1-2f_{13},$$
$$f_{12}\cdot f_{13}=f_1,\quad f_{12}=f_1+f_2,\quad f_{13}=f_1+f_3,\quad 1-f_1-f_2-f_3=f_4.$$

Тогда $f_i \cdot f_j = 0$ при $i \neq j$, т. е. система идемпотентов $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ортогональная.

Обозначим через

$$A = \varphi \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

элемент, который перестановочен с элементами

$$1 - 2(f_1 + f_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 - 2(f_2 + f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$1 - 2(f_1 + f_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент A действительно коммутирует с указанными элементами, поскольку элемент

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

перестановочен с их прообразами $1 - 2(e_1 + e_1^\tau + e_2 + e_2^\tau)$, $1 - 2(e_2 + e_2^\tau + e_3 + e_3^\tau)$, $1 - 2(e_1 + e_1^\tau + e_3 + e_3^\tau)$.

Очевидно, что $\varphi^{-1}(1 - 2f_4)$ можно представить в диагональном виде:

$$\varphi^{-1}(1 - 2f_4) = \begin{pmatrix} {d_1}' & 0 & 0 \\ 0 & {d_2}' & 0 \\ 0 & 0 & d_3' \end{pmatrix}.$$

Элемент $1 - 2f_4$ перестановочен с $1 - 2(f_i + f_j)$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$. Поэтому $\varphi^{-1}(1 - 2f_4)$ перестановочен с $1 - 2(e_i + e_i^\tau + e_j + e_j^\tau)$. С ним перестановочны диагональные элементы. Элемент A перестановочен с $1 - 2(f_i + f_j)$, поэтому A перестановочен с $f_i + f_j$, значит, он перестановочен с каждым f_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Поскольку $1 - f_1 - f_2 - f_3 = f_4$, A перестановочен с $1 - 2f_4$, а значит, перестановочен и с диагональными элементами.

Покажем, что $(d_i')^2 = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, тогда d_i' центральны в $e_i R e_i$.

Ясно, что

$$(1 - 2f_4)^2 = 1, \quad (\varphi^{-1}(1 - 2f_4))^2 = 1.$$

Отсюда $(d_i')^2 = e_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$. Далее,

$$r d_i' = \sum_j r_j e_i s_j r \sum_i r_i d_i s_i = \sum_j r_j d_i e_i s_j r \sum_i r_i e_i s_i = \sum_j r_j d_i s_j r = d_i' r$$

для любого $r \in R$, т. е. d_i' централен в $e_i R e_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Легко видеть, что $d_i = d'_i e_i$. Действительно,

$$d'_i e_i = \sum_i r_i e_i d_i e_i s_i e_i = \sum_i r_i e_i s_i e_i d_i = d_i.$$

Очевидно, что $(d'_i)^2 e_i = e_i$. Элемент d'_i централен в R, и $d_i^2 = 1$.

Итак, f_1, f_2, f_3, f_4 — центральные идемпотенты.

Рассмотрим ортогональное замыкание идемпотентов f_1, f_2, f_3:

$$\begin{aligned}\{f_1, f_2, f_3\} = \{&f_1 f_2 f_3, f_1 f_2 (1-f_3), f_1(1-f_2)f_3, f_1(1-f_2)(1-f_3),\\ &(1-f_1)f_2 f_3, (1-f_1)f_2(1-f_3), (1-f_1)(1-f_2)f_3, (1-f_1)(1-f_2)(1-f_3)\}.\end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$(f_1 + (1-f_1))(f_2 + (1-f_2))(f_3 + (1-f_3)) = 1.$$

Если мы возьмём произведение двух различных элементов, то существует такое i, что в одном содержится сомножитель f_i, а в другом $1-f_i$. Их произведение равно нулю. Значит, все такие произведения будут равны нулю.

Имеем

$$d_i f_i = (1-2f_i)f_i = -f_i, \quad d_i(1-f_i) = (1-2f_i)(1-f_i) = 1-f_i.$$

Остальные два не равных f_i идемпотента домножаются на это равенство:

$$d_i \tilde{f} = \tilde{f}, \quad d_i \tilde{f} = -\tilde{f}. \tag{18}$$

Легко видеть, что

$$U(R,\tau) = U(f_1 R, \tau) \oplus U((1-f_1)R, \tau).$$

Пара (a,b) лежит в $U(R,\tau)$ тогда и только тогда, когда a и b обратимы, т. е. $(a,b) \in U(f_1 R,\tau) \oplus U((1-f_1)R,\tau)$. Из леммы 3 следует, что

$$\begin{gathered}E(J'_i) \subseteq \varphi(U(f_1 R)) \subseteq C(J'_i), \quad J'_i = g_i S,\\ E(J''_i) \subseteq \varphi(U((1-f_1)R)) \subseteq C(J''_i), \quad J''_i = (1-g_i)S.\end{gathered}$$

Далее,

$$\begin{gathered}U(f_1 R,\tau) \cap U((1-f_2)R,\tau) \cap U(f_3 R,\tau) = U(f_1(1-f_2)f_3 R,\tau),\\ J'_1 \cap J''_2 \cap J'_3 = \tilde{g}S.\end{gathered}$$

Итак,

$$E(\tilde{g}S,\tau') \subseteq \varphi(U(\tilde{f}R,\tau)) \subseteq C(\tilde{g}S,\tau'). \tag{19}$$

Из формулы (18) следует, что

$$\varphi^{-1}(1-2f_4)\tilde{f} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}\tilde{g}\tilde{c},$$

где $\tilde{c} \in Z(S)$. Элементу $\tilde{f}$ соответствует элемент $\tilde{g}$ из кольца S. Из (19) получаем

$$(1-2f_4)\tilde{g} = \varphi \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tilde{g}\tilde{c},$$

где $\tilde{c} \in Z(S)$. Используя разложение в прямую сумму, можно считать $\tilde{c} = \pm 1$.

Выделим следующие случаи.

1. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, то $(1-2f_4)\tilde{g}$ — центральный элемент. Рассмотрим систему идемпотентов

$$h_1 = f_1\tilde{g}, \quad h_2 = f_2\tilde{g}, \quad h_3 = (f_3 + f_4)\tilde{g}$$

и возьмём

$$c_{12} = 1, \quad c_{13} = c_{23} = 1 - 2h_4.$$

Тогда

$$\varphi(1 - 2(e_i + e_i^\tau + e_j + e_j^\tau)) = (1 - 2(h_i + h_j))c_{ij}.$$

2. Если $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$, то

$$\varphi^{-1}(1-2f_4)(1-2(e_2+e_3))\tilde{f} = \tilde{f}.$$

Значит, $f_4 = 0$, и мы приходим к противоречию с условием $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$.

3. Если $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$, то

$$\varphi^{-1}(1-2f_4)(1-2(e_2+e_3))\tilde{f} = -\tilde{f}.$$

Следовательно,

$$(1-2f_4) = c(1-2(f_2+f_3)), \quad c \in Z(S).$$

Таким образом, $cf_4 = -f_4$, откуда $c = -1$, $f_1 = 0$. Если же

$$h_1 = f_4\tilde{g}, \quad h_2 = f_3\tilde{g}, \quad h_3 = f_2\tilde{g}, \quad c_{32} = 1, \quad c_{13} = c_{12} = -1,$$

то

$$\varphi(1 - 2(e_i + e_i^\tau + e_j + e_j^\tau)) = c_{ij}(1 - 2(h_i + h_j)).$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Покажем справедливость формулы

$$\varphi(1 + e_ire_j - (e_ire_j)^\tau) = 1 + h_i\theta_1(e_ire_j)h_j - h_j\theta_2(e_ire_j)h_i,$$

где

$$\theta_1 \colon \bigcup_{i \neq j} e_iRe_j \to \bigcup_{i \neq j} f_iSf_j, \quad \theta_2 \colon \bigcup_{i \neq j} e_iRe_j \to \bigcup_{i \neq j} f_jSf_i \tag{20}$$

и для $i \in \{m, m+3\}$, $j \in \{n, n+3\}$, $k \in \{q, q+3\}$, $t \in \{p, p+3\}$, где m, n, q, p различные, выполнены условия

$$\theta_1(e_ire_jse_k) = \theta_1(e_ire_j)\theta_2(e_jse_k),$$
$$\theta_2(e_ire_jse_k) = \theta_2(e_jse_k)\theta_2(e_ire_j) \text{ при различных } i, j, k,$$
$$\theta_1(e_ire_j)\theta_2(e_kse_t) = 0, \quad \theta_2(e_kse_t)\theta_1(e_ire_j) = 0 \text{ при } i \neq k,\ j \neq t.$$

По определению $1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau \in E(R, \tau)$. Нетрудно заметить, что

$$[1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau, 1 - 2(e_1 + e_1^\tau + e_2 + e_2^\tau)] = 1.$$

Тогда

$$[\varphi(1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau), 1 - 2(h_1 + h_2)] = 1,$$

$$\varphi(1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \gamma & \delta & 0\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}.$$

Если

$$(1 - 2(e_1 + e_1^\tau + e_3 + e_3^\tau))(1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau)(1 - 2(e_1 + e_1^\tau + e_3 + e_3^\tau)) = \\ = (1 - e_1ae_2 + (e_1ae_2)^\tau),$$

то

$$(1 - 2(h_1 + h_3))(\varphi(1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau)(1 - 2(h_1 + h_3)) = \\ = (\varphi(1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau))^{-1}.$$

Таким образом,

$$(\varphi(1 + e_1ae_2 - (e_1ae_2)^\tau))^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \gamma & \delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta & 0\\ -\gamma & \delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\alpha^2 - \beta\gamma = h_1, \quad \alpha\beta = \beta\delta, \quad \gamma\alpha = \delta\gamma, \quad \delta^2 - \gamma\beta = h_2. \tag{21}$$

Аналогично для $1 + e_2be_3 - e_3^\tau b^\tau e_2^\tau$, $1 + e_1ce_3 - e_3^\tau c^\tau e_1^\tau$ получаем

$$\alpha_1^2 - \beta_1\gamma_1 = h_2, \quad \alpha_1\beta_1 = \beta_1\delta_1, \quad \gamma_1\alpha_1 = \delta_1\gamma_1, \quad \delta_1^2 - \gamma_1\beta_1 = h_3, \tag{22}$$

$$\alpha_2^2 - \beta_2\gamma_2 = h_1, \quad \alpha_2\beta_2 = \beta_2\delta_2, \quad \gamma_2\alpha_2 = \delta_2\gamma_2, \quad \delta_2^2 - \gamma_2\beta_2 = h_3. \tag{23}$$

Нетрудно получить, что

$$[1 + e_1ae_2 - e_2^\tau a^\tau e_1^\tau, 1 + e_2be_3 - e_3^\tau b^\tau e_2^\tau] = 1 + e_1ce_3 - e_3^\tau c^\tau e_1^\tau,$$

$$[1 + 2(e_1ae_2 - e_2^\tau a^\tau e_1^\tau), 1 + e_2be_3 - e_3^\tau b^\tau e_2^\tau] = 1 + 2(e_1ce_3 - e_3^\tau c^\tau e_1^\tau),$$

где $c = ae_2b$, $c^\tau = b^\tau e_2^\tau a^\tau$.

Далее,

$$(\varphi(1 + e_2be_3 - e_3^\tau b^\tau e_2^\tau))^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1 & \alpha_1\beta_1 + \beta_1\delta_1\\ 0 & \alpha_1\gamma_1 + \gamma_1\delta_1 & \beta_1\gamma_1 + \delta_1^2\end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$(\varphi(1 + e_2be_3 - e_3^\tau b^\tau e_2^\tau))^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x & y\\ 0 & z & w\end{pmatrix}.$$

Тогда, учитывая (22), получаем

$$x=\alpha_1^2+\beta_1\gamma_1=2\alpha_1^2-h_2,\quad y=\alpha_1\beta_1+\beta_1\delta_1=2\alpha_1\beta_1,$$
$$z=\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\delta_1=2\alpha_1\gamma_1,\quad w=\beta_1\gamma_1+\delta_1^2=2\delta_1^2-h_3.$$

Введём следующие обозначения:

$$1+K=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&1&0\\c&0&d\end{pmatrix},\quad 1+L=\begin{pmatrix}a&0&-b\\0&1&0\\-c&0&d\end{pmatrix},$$
$$1+M=\begin{pmatrix}x&y&0\\z&w&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad 1+N=\begin{pmatrix}x&-y&0\\-z&w&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$(1+K)(1+M)(1+L)(1+N)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&U&p\\0&q&V\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Умножим равенство (24) слева на h_2 и справа на h_1:

$$h_2K=0,\quad h_2(1+M)=\begin{pmatrix}z&w&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}z&w&0\end{pmatrix}L=\begin{pmatrix}z(a-1)&0&-zb\end{pmatrix},$$
$$(1+N)h_1=\begin{pmatrix}x\\-z\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}z(a-1)&0&-zb\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\-z\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z(a-1)x&0&0\end{pmatrix},$$
$$(1+M)^2=\begin{pmatrix}x^2+yz&xy+yw&0\\zx+wz&zy+w^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&y_1&0\\z_1&w_1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x_1=x^2+yz=2x^2-h_1,\quad y_1=xy+yw=2xy,$$
$$w_1=zy+w^2=2w^2-h_2,\quad z_1=zx+wz=2zx.$$

Итак, $z(a-1)x=0$. Тогда

$$z_1(a-1)x_1=0,\quad 2zx(a-1)(2x^2-h_1)=0,$$
$$z_1(a-1)h_1=0,\quad z_1(a-1)=0,\quad z(a-1)=0,$$

откуда

$$za=z. \tag{25}$$

Умножим равенство (24) слева на h_1 и справа на h_3:

$$Nh_3=0,\quad h_1(1+K)=\begin{pmatrix}a&0&b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a&0&b\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}a(x-1)&ay&0\end{pmatrix},$$
$$(1+L)h_3=\begin{pmatrix}-b\\0\\d\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a(x-1)&ay&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\\0\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a(x-1)b&0&0\end{pmatrix},$$

$$(1+L)^2 = \begin{pmatrix} a^2-bc & 0 & ab+bd \\ 0 & 1 & 0 \\ -ca-dc & 0 & -cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = a^2 - bc = 2a^2 - h_1, \quad b_1 = ab + bd = 2bd,$$

$$d_1 = -cb + d^2 = 2d^2 - h_3, \quad c_1 = -ca - dc = -2ca,$$

$$a(x-1)b = 0, \quad a_1(x-1)b_1 = 0, \quad (2a^2 - h_1)(x-1)2bd = 0,$$

$$2a^2(x-1)2bd - h_1(x-1)2bd = 0.$$

Поскольку $a(x-1)b = 0$, то $h_1(x-1)b_1 = 0$. Отсюда $(x-1)b_1 = 0$ и $(x-1)b = 0$,

$$xb = b. \tag{26}$$

Из справедливости формул (21), (24), (25) следует, что

$$U = -zay + w^2 = -zy + w^2 = h_2.$$

Аналогично

$$V = h_3. \tag{27}$$

Легко показать, что

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (27) следует, что

$$a_2 = h_1, \quad d_2 = h_3, \quad b_2 = p, \quad c_2 = q.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ q_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+pq_1 & 0 & p_1+p \\ 0 & 1 & 0 \\ q+q_1 & 0 & qp_1+1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (26) имеем

$$z(1+pq_1) = z, \quad zpq_1 = 0.$$

Поскольку r пробегает все кольцо R, то

$$\varphi(1 + e_i r e_j - (e_i r e_j)^\tau) =$$
$$= \varphi\left(1 + \sum_n e_i r_n e_k s_n e_i t_n e_j u_n e_j - \sum_n (e_i r_n e_k s_n e_i t_n e_j u_n e_j)^\tau\right) =$$
$$= \varphi\left(\prod_n (1 + e_i r_n e_k s_n e_i t_n e_j u_n e_j - (e_i r_n e_k s_n e_i t_n e_j u_n e_j)^\tau)\right) =$$
$$= 1 + h_i \sum_n \theta_1(e_i r_n e_k s_n e_i t_n e_j u_n e_j) h_j - h_j \sum_n \theta_2(e_j r_n e_k s_n e_j t_n e_i u_n e_i) h_i =$$
$$= 1 + h_i \theta_1(e_i r e_j) h_j - h_j \theta_2(e_i r e_j) h_i.$$

Итак,

$$\varphi(1 + e_i r e_j - (e_i r e_j)^\tau) = 1 + h_i\theta_1(e_i r e_j)h_j - h_j\theta_2(e_i r e_j)h_i. \tag{28}$$

Пусть

$$B = 1 + h_i p h_j - h_j q h_i,$$

где $p = \theta(e_i r e_j)$, $q = \theta_2(e_i r e_j)$. Выберем $i = 1$, $j = 2$, тогда

$$B = 1 + h_1 p h_2 - h_2 q h_1 = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = 1 - h_1 p h_2 + h_2 q h_1 = \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 \\ q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{\tau_1} = (1 + h_1 p h_2 - h_2 q h_1)^{\tau_1} = 1 + h_2 p^{\tau_1} h_1 - h_1 q^{\tau_1} h_2 = \begin{pmatrix} 1 & -q^{\tau_1} & 0 \\ p^{\tau_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $B \in U(R,\tau)$, т. е. $B \cdot B^{\tau_1} = E$, а также $B \cdot B^{-1} = E$, то $B^{\tau_1} = B^{-1}$. Следовательно, $p^{\tau_1} = q$, $q^{\tau_1} = p$. Тогда формулу (28) перепишем следующим образом:

$$\varphi(1 + e_i r e_j - (e_i r e_j)^\tau) = 1 + h_i\theta_1(e_i r e_j)h_j - h_j\theta_1^{\tau_1}(e_i r e_j)h_i. \tag{29}$$

Из (29) определяются θ_1 и θ_2 в виде (20).

Ясно, что

$$[\varphi(1 + e_i r e_j - e_j^\tau r^\tau e_i^\tau), \varphi(1 + e_j s e_k - e_k^\tau s^\tau e_j^\tau)] = \\ = \varphi[1 + e_i r e_j - e_j^\tau r^\tau e_i^\tau, 1 + e_j s e_k - e_k^\tau s^\tau e_j^\tau].$$

Поскольку

$$[1 + e_i r e_j - e_j^\tau r^\tau e_i^\tau, 1 + e_j s e_k - e_k^\tau s^\tau e_j^\tau] = 1 + e_i r e_j s e_k - e_k^\tau s^\tau e_j^\tau r^\tau e_i^\tau,$$

то

$$[\varphi(1+e_i r e_j - e_j^\tau r^\tau e_i^\tau), \varphi(1+e_j s e_k - e_k^\tau s^\tau e_j^\tau)] = \varphi(1+e_i r e_j s e_k - e_k^\tau s^\tau e_j^\tau r^\tau e_i^\tau). \tag{30}$$

Выберем $m = 1$, $n = 2$, $t = 3$, тогда $i \in \{1,4\}$, $j \in \{2,5\}$, $k \in \{3,6\}$. Из формулы (29) следует, что

$$\varphi(1 + e_1 r e_2 - (e_1 r e_2)^\tau) = \\ = 1 + h_1\theta(e_1 r e_2)h_2 - h_2\theta^{\tau_1}(e_1 r e_2)h_1 = \begin{pmatrix} 1 & \theta(e_1 r e_2) & 0 \\ -\theta^{\tau_1}(e_2 r e_1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(1 + e_2 s e_3 - (e_2 s e_3)^\tau) = \\ = 1 + h_2\theta(e_2 s e_3)h_3 - h_3\theta^{\tau_1}(e_3 s e_2)h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta(e_2 s e_3) \\ 0 & -\theta^{\tau_1}(e_3 s e_2) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(1 + e_1re_2se_3 - (e_1re_2se_3)^\tau) = 1 + h_1\theta(e_1re_2se_3)h_2 - h_2\theta^{\tau_1}(e_1re_2se_3)h_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta(e_1re_2se_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta^{\tau_1}(e_3re_2se_1) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти значения в формулу (30) и сравнивая левую и правую части, получим

$$\theta(e_1re_2se_3) = \theta(e_1re_2)\theta(e_2se_3), \quad \theta^{\tau_1}(e_1re_2se_3) = \theta^{\tau_1}(e_2se_3)\theta^{\tau_1}(e_2re_1).$$

Обобщая результат, можно записать

$$\theta(e_ire_jse_k) = \theta(e_ire_j)\theta(e_jse_k), \quad \theta^{\tau_1}(e_ire_jse_k) = \theta^{\tau_1}(e_jse_k)\theta^{\tau_1}(e_ire_j).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \theta^{\tau_1}(e_ire_j)\theta(e_jse_k) &= 0, & \theta^{\tau_1}(e_jse_k)\theta(e_ire_j) &= 0, \\ \theta(e_kse_i)\theta^{\tau_1}(e_jre_i) &= 0, & \theta(e_jre_i)\theta^{\tau_1}(e_kse_i) &= 0, \\ \theta(e_ise_k)\theta(e_ire_j) &= 0, & \theta^{\tau_1}(e_jre_i)\theta^{\tau_1}(e_kse_i) &= 0, \\ \theta(e_kse_i)\theta(e_jre_i) &= 0, & \theta^{\tau_1}(e_ire_j)\theta^{\tau_1}(e_ise_k) &= 0. \end{aligned}$$

Итак, θ и θ^{τ_1} однозначно определены на диагонали, $\theta\colon R \to e_1S$ — гомоморфизм колец, $e_1 = \theta(1)$ — центральный идемпотент кольца R. Из формулы (29) следует, что $\varphi(A) = \theta(A)$ для всех $A \in E(R, \tau)$.

Пусть I, J — идеалы кольца S,

$$I = e_1S, \quad J = (1 - e_1)S.$$

Следовательно,

$$[E(S, J, \tau), \varphi(E(R, \tau))] = 1,$$

откуда $J = 0$. Применяя обратное отображение $\varphi^{-1}\colon U(S, \tau_1) \to U(R, \tau)$, получим, что θ — изоморфизм. Это завершает доказательство теоремы. □

Настоящая работа выполнена под руководством профессора И. З. Голубчика, которому автор выражает свою благодарность.

Литература

[1] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[2] Зельманов Е. И. Изоморфизм линейных групп над ассоциативным кольцом // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.