Лемма о 3-секущих для многообразий с компонентами различной размерности

ДЖ. Й. КАМИНСКИЙ
Холонский академический технологический институт, Израиль
e-mail: kaminsj@macs.biu.ac.il

А. КАНЕЛЬ-БЕЛОВ
Еврейский университет, Иерусалим, Израиль
e-mail: kanel@mccme.ru

М. ТЕЙХЕР
Университет им. Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль
e-mail: teicher@macs.biu.ac.il

УДК 512.7

Ключевые слова: алгебраические кривые, генерические точки, многообразия.

Аннотация

Пусть X — неприводимое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. При $r \geqslant 3$ верно следующее: если любая $(r-2)$-плоскость $\overline{x_1, \ldots, x_{r-1}}$, где x_i — генерические точки, пересекает X также в точке x_r, отличной от $x_1, \ldots, x_{r-1}$, то X содержится в линейном подпространстве L, таком что $\operatorname{codim}_L X \leqslant r-2$. Цели этой статьи — во-первых, дать другой вывод этого результата для $r = 3$; во-вторых, обобщить его на многообразия с компонентами различной размерности. Ради большей ясности переформулируем нашу задачу следующим образом. Пусть Z — многообразие единой размерности n (т. е. имеющее компоненты только этой размерности), не являющееся линейным пространством и вложенное в $\mathbb{P}^r$, $r \geqslant n+1$; это многообразие может быть особым и/или приводимым. Многообразие 3-секущих в Z, скажем $V_{1,3}(Z)$, имеет размерность, строго меньшую, чем $2n$, за исключением случая, когда Z вложено в $(n+1)$-мерное линейное пространство и имеет размерность не ниже 3; в последнем случае $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$. Отсюда следует также, что если $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$, то можно вложить Z в $\mathbb{P}^{n+1}$. Затем мы исследуем более общий случай, когда Z может иметь компоненты различной размерности. В этой ситуации пусть Z — многообразие, возможно особое, размерности n, которое может быть приводимым или иметь компоненты меньшей размерности. Пусть Z вложено в $\mathbb{P}^r$, где $r \geqslant n+1$, и Y — его собственное подмногообразие размерности $k \geqslant 1$, S — компонента максимальной размерности в замыкании множества $\{l \in \mathbb{G}(1,r) \mid \exists p \in Y,\ q_1, q_2 \in Z \setminus Y,\ q_1, q_2, p \in l\}$. Мы показываем, что S имеет размерность, строго меньшую, чем $n = k$, за исключением случая, когда объединение прямых в S имеет размерность $n+1$; тогда $\dim S = n+k$. В последнем случае, если размерность пространства строго больше $n+1$, объединение прямых в S не может покрывать все пространство. Это основной результат нашей работы. Приведены также примеры, показывающие, что наша оценка является точной.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 71—87.

Abstract

J. Y. Kaminski, A. Kanel-Belov, M. Teicher, Trisecant lemma for nonequidimensional varieties, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 71—87.

Let X be an irreducible projective variety over an algebraically closed field of characteristic zero. For $r \geqslant 3$, if every $(r-2)$-plane $\overline{x_1, \ldots, x_{r-1}}$, where the x_i are generic points, also meets X in a point x_r different from $x_1, \ldots, x_{r-1}$, then X is contained in a linear subspace L such that $\operatorname{codim}_L X \leqslant r-2$. In this paper, our purpose is to present another derivation of this result for $r = 3$ and then to introduce a generalization to nonequidimensional varieties. For the sake of clarity, we shall reformulate our problem as follows. Let Z be an equidimensional variety (maybe singular and/or reducible) of dimension n, other than a linear space, embedded into $\mathbb{P}^r$, where $r \geqslant n+1$. The variety of trisecant lines of Z, say $V_{1,3}(Z)$, has dimension strictly less than $2n$, unless Z is included in an $(n+1)$-dimensional linear space and has degree at least 3, in which case $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$. This also implies that if $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$, then Z can be embedded in $\mathbb{P}^{n+1}$. Then we inquire the more general case, where Z is not required to be equidimensional. In that case, let Z be a possibly singular variety of dimension n, which may be neither irreducible nor equidimensional, embedded into $\mathbb{P}^r$, where $r \geqslant n+1$, and let Y be a proper subvariety of dimension $k \geqslant 1$. Consider now S being a component of maximal dimension of the closure of $\{l \in \mathbb{G}(1,r) \mid \exists p \in Y,\ q_1, q_2 \in Z \setminus Y,\ q_1, q_2, p \in l\}$. We show that S has dimension strictly less than $n+k$, unless the union of lines in S has dimension $n+1$, in which case $\dim S = n+k$. In the latter case, if the dimension of the space is strictly greater than $n+1$, then the union of lines in S cannot cover the whole space. This is the main result of our paper. We also introduce some examples showing that our bound is strict.

1. Введение

Согласно классической лемме о 3-секущих, если X — алгебраическая кривая в $\mathbb{P}^3$, то многообразие 3-секущих одномерно, за исключением случая, когда кривая плоская и её степень не ниже 3: тогда многообразие 3-секущих двумерно. Существует несколько обобщений этой леммы [2, 3, 5, 8, 10]. В [8] проведено дальнейшее исследование случая алгебраической кривой, вложенной в $\mathbb{P}^3$, что приводит к результату, относящемуся к плоским сечениям такой кривой. С другой стороны, в [10] рассмотрен случай многообразий высших размерностей, возможно приводимых. Для наших целей наиболее существенно, что, согласно [10], если размерность многообразия равна m, то объединение семейства $(m+2)$-секущих имеет размерность не выше $m+1$. Дальнейшие обобщения этого результата содержатся в [2, 3, 5]. В последнем случае постановка проблемы такова. Пусть X — неприводимое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. При $r \geqslant 3$ верно следующее: если любая $(r-2)$-плоскость $\overline{x_1, \ldots, x_{r-1}}$, где x_i — генерические точки, пересекает X также в точке x_r, отличной от $x_1, \ldots, x_{r-1}$, то X содержится в линейном подпространстве L, таком что $\operatorname{codim}_L X \leqslant r-2$.

Цели этой статьи — во-первых, дать другой вывод этого результата для $r = 3$; во-вторых, обобщить его на многообразия с компонентами различной размерности. Ради большей ясности переформулируем нашу первую задачу следующим образом. Пусть Z — многообразие *единой размерности* n (т. е. имеющее компоненты только этой размерности), не являющееся линейным пространством и вложенное в $\mathbb{P}^r$, $r \geqslant n+1$. Это многообразие может быть особым и/или приводимым. Многообразие 3-секущих в Z, скажем $V_{1,3}(Z)$, имеет размерность, строго меньшую, чем $2n$, за исключением случая, когда Z вложено в $(n+1)$-мерное линейное пространство и имеет размерность не ниже 3; в последнем случае $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$. Отсюда следует также, что если $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$, то можно вложить Z в $\mathbb{P}^{n+1}$.

Затем мы исследуем более общий случай, когда Z может иметь компоненты различной размерности. В этой ситуации пусть Z — многообразие, возможно особое, размерности n, которое может быть приводимым или иметь компоненты меньшей размерности. Пусть Z вложено в $\mathbb{P}^r$, где $r \geqslant n+1$, и Y — его собственное подмногообразие размерности $k \geqslant 1$. Далее, пусть S — компонента максимальной размерности в замыкании множества

$$\{l \in \mathbb{G}(1,r) \mid \exists p \in Y,\ q_1, q_2 \in Z \setminus Y,\ q_1, q_2, p \in l\}.$$

Мы показываем, что S имеет размерность, строго меньшую, чем $n = k$, за исключением случая, когда объединение прямых в S имеет размерность $n+1$; тогда $\dim S = n+k$. В последнем случае, если размерность пространства строго больше $n+1$, то объединение прямых в S не может покрывать всё пространство. Это основной результат нашей работы. Приведены также примеры, показывающие, что наша оценка является точной.

Для доказательства этих результатов мы используем чисто алгебраические методы, применимые над любым алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Доказательства состоят прежде всего в исследовании локальных ограничений на касательные пространства, при которых многообразие 3-секущих имеет полную размерность. Затем с помощью так называемой леммы Террачини [11] мы получаем результат для глобального случая.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем некоторые стандартные сведения, чтобы зафиксировать терминологию и обозначения. Затем в разделе 3 мы переходим к результатам: в п. 3.2 исследуется случай многообразий единой размерности, а в п. 3.3 рассматривается более общий случай.

2. Обозначения и предварительные сведения

В этом разделе мы напомним некоторые стандартные сведения о многообразиях инцидентности, используемые в дальнейшем. Всюду предполагается, что основное поле имеет характеристику 0.

2.1. Многообразия инцидентных прямых

Пусть $\mathbb{G}(1,n) = G(2,n+1)$ — грассманиан прямых пространства $\mathbb{P}^n$. Напомним, что $\dim \mathbb{G}(1,n) = 2n-2$ и что $\mathbb{G}(1,n)$ канонически вкладывается в $\mathbb{P}^{N_1}$, где $N_1 = \binom{2}{n+1} - 1$, посредством вложения Плюккера. Поэтому прямая в $\mathbb{P}^n$ может рассматриваться как точка в $\mathbb{P}^{N_1}$, удовлетворяющая так называемым соотношениям Плюккера. Это квадратные уравнения, порождающие однородный идеал, скажем $I_{\mathbb{G}(1,n)}$, который задаёт $\mathbb{G}(1,n)$ как замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}^{N_1}$. Точно так же грассманиан $\mathbb{G}(k,n)$ задаёт параметризацию k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^n$. Как и в случае $\mathbb{G}(1,n)$, грассманиан $\mathbb{G}(k,n)$ может быть вложен в проективное пространство $\mathbb{P}^{N_k}$, где $N_k = \binom{k+1}{n+1} - 1$. Поэтому для k-мерного линейного подпространства K в $\mathbb{P}^n$ мы будем обозначать через $[K]$ соответствующую проективную точку в $\mathbb{P}^{N_k}$. Прямая, проходящая через точки x и y, будет обозначаться $\overline{xy}$.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое многообразие. Тогда $\Delta(X)$ — многообразие всех инцидентных ему прямых:

$$\Delta(X) = \{l \in \mathbb{G}(1,n) \mid l \cap X \neq \varnothing\}.$$

Коразмерность c многообразия X и размерность многообразия $\Delta(X)$ связаны согласно следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое замкнутое многообразие коразмерности $c \geqslant 2$. Тогда $\Delta(X)$ — неприводимое подмногообразие в $\mathbb{G}(1,n)$ размерности $2n-1-c$.*

Доказательство. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Sigma = \{(l,p) \in \mathbb{G}(1,n) \times X \mid p \in l\} \subset \Delta(X) \times X$$

и канонические проекции $\pi_1 \colon \Sigma \to \Delta(X)$ и $\pi_2 \colon \Sigma \to X$. Генерический слой проекции π_1 конечен (иначе $X = \mathbb{P}^n$). Значит, $\dim \Sigma = \dim \Delta(X)$. Для всех $p \in X$ слой $\pi_2^{-1}(p)$ изоморфен $\mathbb{P}^{n-1}$ и имеет размерность $n-1$. Следовательно, многообразие Σ неприводимо и имеет размерность $n-c+n-1 = 2n-c-1$, как показано в [1,6]. Так как отображение π_1 сюръективно и непрерывно (в топологии Зариского), то $\Delta(X)$ также неприводимо и имеет размерность $2n-c-1$. □

Следующий простой факт используется в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть X_1 и X_2 — неприводимые замкнутые многообразия в $\mathbb{P}^n$ коразмерности не ниже 2. Тогда $\Delta(X_1) \not\subset \Delta(X_2)$, за исключением случая $X_1 \subset X_2$.*

Доказательство. Предположим, что $\Delta(X_1) \subset \Delta(X_2)$ и $X_1 \not\subset X_2$. Рассмотрим точку $p \in X_1 \setminus X_2$, гиперплоскость H, не проходящую через p, проекцию $\pi \colon \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to H$, $q \mapsto \overline{qp} \cap H$, которая отображает точку $q \in \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ в точку пересечения прямой $\overline{qp}$ с гиперплоскостью H. Проекция сюръективна, то же верно и для $\pi|_{X_2}$, поскольку $\Delta(X_1) \subset \Delta(X_2)$. Значит, $\dim X_2 \geqslant n-1$, что невозможно, поскольку $\operatorname{codim} X_i \geqslant 2$ при $i = 1, 2$. □

2.2. Соединяющие многообразия

Пусть даны $m < n$ замкнутых неприводимых многообразий $\{Y_i\}_{i=1,\dots,m}$, вложенных в $\mathbb{P}^n$ с коразмерностями $c_i \geqslant 2$. Рассмотрим *соединяющее многообразие*

$$J = J(Y_1, \ldots, Y_m) = \Delta(Y_1) \cap \ldots \cap \Delta(Y_m),$$

лежащее в $\mathbb{G}(1,n)$. Будем считать, что $\sum\limits_{i=1,\ldots,m} c_i \leqslant 2n-2+m$, так что J непусто. Прежде всего определим его неприводимые компоненты.

Пусть U — открытое подмножество в $Y_1 \times \ldots \times Y_m$, имеющее вид

$$\{(p_1, \ldots, p_m)\} \in Y_1 \times \ldots \times Y_m \mid \exists i \neq j \colon p_i \neq p_j\}.$$

Пусть V — локально замкнутое множество, составленное из m-ок элементов множества U, точки которых коллинеарны, $s \colon V \to \mathbb{G}(1,n)$ — морфизм, который отображает каждую m-ку коллинеарных точек в прямую, которую они порождают, $S \subset \mathbb{G}(1,n)$ — замыкание образа морфизма s.

Вначале рассмотрим неприводимые компоненты множества S. Их можно разбить на несколько классов в зависимости от количества различных точек, которые их порождают. Рассмотрим, например, случай $m = 3$. Локально замкнутое подмножество в $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$, состоящее из троек попарно различных коллинеарных точек, порождает одну компоненту в S. Пусть теперь Y_{12} — неприводимая компонента в $Y_1 \cap Y_2$, не содержащаяся в Y_3. Тогда прямые, порождённые точкой из $Y_{12} \setminus Y_3$ и другой точкой в Y_3, также порождают неприводимую компоненту в S. Далее, пусть Z — неприводимая компонента в $Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3$. Тогда прямые, порождённые точкой из Z и другой точкой из Y_1, составляют пересечение многообразия секущих для Y_1 с многообразием $\Delta(Z)$ и также образуют неприводимую компоненту в S. В общем случае для нашей цели будет достаточно следующей леммы.

Лемма 3. *Многообразие J имеет следующие неприводимые компоненты*:

1) $\Delta(Z)$, *где Z пробегает все неприводимые компоненты пересечения $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m$*;
2) *неприводимые компоненты в S, не содержащиеся ни в какой компоненте вида $\Delta(Z)$.*

Доказательство. Перечисленные множества — это все неприводимые замкнутые подмножества в J. Количество таких множеств конечно, и их объединение покрывает J. Поэтому все неприводимые компоненты последнего заведомо содержатся среди таких множеств.

Предположим, что $\Delta(Z) \subset S$ для некоторой неприводимой компоненты Z многообразия $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m$. Будем рассуждать, как в доказательстве леммы 2. Рассмотрим точку $p \in Z$, гиперплоскость H, не проходящую через p, проекцию $\pi \colon \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to H$, $q \mapsto \overline{qp} \cap H$, которая отображает точку $q \in \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ в точку пересечения прямой $\overline{qp}$ с гиперплоскостью H. Очевидно, что эта проекция сюръективна. Так как $\Delta(Z) \subset S$, то каждая прямая, содержащая p, является пределом прямых вида $\overline{p'q}$, где $p' \in Z$, а q — некоторая другая точка из $(Y_1 \cup \ldots \cup Y_m)$. Выбрав точки p' стремящимися к p, мы видим, что l — предел прямых $\overline{pq}$. Следовательно, проекция множества $(Y_1 \cup \ldots \cup Y_m)$ плотна в H. Но это невозможно, поскольку $\operatorname{codim}(Y_i) \geqslant 2$ для каждого i. Значит, $\Delta(Z) \not\subset S$.

По лемме 2 $\Delta(Z_1) \not\subset \Delta(Z_2)$ для любых двух неприводимых компонент Z_1 и Z_2 многообразия $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m$. Так как множество прямых, пересекающих неприводимое многообразие, неприводимо, то $\Delta(Z)$ — максимальное неприводимое замкнутое подмножество в J для каждой неприводимой компоненты Z многообразия $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m$.

Каждая неприводимая компонента S_1 множества S, не содержащаяся ни в какой компоненте вида $\Delta(Z)$, является максимальным неприводимым замкнутым множеством также и в J. □

Для простоты будем называть неприводимые компоненты множества S *соединяющими компонентами* многообразия J, а компоненты вида $\Delta(Z)$ для некоторой неприводимой компоненты Z многообразия $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m$ — *компонентами, отвечающими пересечению.*

Приведём лемму Террачини в той форме, в какой она позже будет применяться. Соответственно на протяжении всей статьи используются следующие обозначения. Если X — проективное подмногообразие в $\mathbb{P}^n$, то $T_p(X)$ обозначает проективно вложенное касательное пространство к X в точке p. Касательное пространство по Зарискому обозначается $\Theta_p(X)$. Если CX — аффинный конус над X, то $T_p(X)$ — проективное пространство одномерных подпространств в $\Theta_q(CX)$, где $q \in A^{n+1}$ — любая точка, лежащая над p. Пусть f — морфизм между проективными многообразиями X и Y, который может также рассматриваться как морфизм между CX и CY. Тогда дифференциал $df_p\colon T_p(X) \setminus \mathbb{P}(\ker(\phi)) \to T_{f(p)}(Y)$ индуцируется дифференциалом ϕ между касательными пространствами по Зарискому $\Theta_q(CX)$ и $\Theta_{f(q)}(CY)$. Для простоты будем писать $df_p\colon T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$, подразумевая, что df_p может быть определён на собственном подмножестве пространства $T_p(X)$.

Лемма 4 (лемма Террачини). *Пусть X и Y — неприводимые проективные многообразия, вложенные в $\mathbb{P}^n$, над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, $W(X,Y)$ — объединение всех прямых в $J(X,Y)$, z — точка в $W(X,Y)$, не принадлежащая ни X, ни Y. Тогда касательное пространство к $W(X,Y)$ в точке z определяется следующим равенством*:

$$T_z(W(X,Y)) = \langle T_x(X), T_y(Y) \rangle,$$

где (x,y) — такая точка в $X \times Y$, что $z \in \langle x,y \rangle = \overline{xy}$, а $\langle\ \rangle$ обозначает линейную оболочку.

Несколько более общее утверждение и его доказательство можно найти в [11].

3. Обобщения леммы о 3-секущих

В этом разделе мы рассмотрим два обобщения леммы о 3-секущих. Первое относится к многообразиям единой размерности, а во втором рассматривается более общая ситуация.

В терминах соединяющих многообразий классическая лемма о 3-секущих и обобщения, которые мы вводим, связаны с соединяющими компонентами. Нетрудно рассмотреть аналогичным образом компоненты, отвечающие пересечению. Результатом является следующая лемма, непосредственно вытекающая из леммы 2.

Лемма 5. *Пусть Y_1 и Y_2 — два различных неприводимых многообразия, вложенных в некоторое проективное пространство, а Y — некоторое третье неприводимое многообразие. Тогда $\Delta(Y)$ не может содержать отвечающую пересечению компоненту $\Delta(Z)$ многообразия $J(Y_1, Y_2) = \Delta(Y_1) \cap \Delta(Y_2)$, за исключением случая $Z \subset Y$.*

Предварительно докажем некоторые результаты, полезные в дальнейшем.

3.1. Предварительные сведения

Следующее предложение типично по своему методу для этой статьи. Его можно считать обобщением общеизвестного результата Самуэля [7, с. 312], относящегося к гладким кривым.

Предложение 1. *Пусть X — неприводимое замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}^n$ размерности k. Если существует $L \in \mathbb{G}(k-1, n)$, такое что $L \subset T_h(X)$ для всех точек $p \in U_0$, где U_0 — плотное открытое множество в X, то X является k-мерным линейным пространством, содержащим L.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}X$ — замыкание в $\mathbb{G}(k, n)$ множества

$$\{[T_p(X)] \mid p \text{ — регулярная точка в } X\}.$$

Оно является замыканием образа плотного открытого множества в X при гауссовом отображении. Поэтому $\mathcal{T}X$ неприводимо. Рассмотрим рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{G}(k, n)$, $p \mapsto p \vee L$, где $\vee$ — соединяющий оператор [4], эквивалентный классическому внешнему произведению (как и в [4], отказ от классических обозначений вполне оправдывается геометрическим смыслом оператора). Пусть σ_L — подмногообразие в $\mathbb{G}(k, n)$, состоящее из линейных пространств, которые содержат L. Тогда $\dim \sigma_L = n - k$.

Пусть U — открытое множество в X, которое состоит из регулярных точек множества U_0, не принадлежащих L. Рассмотрим морфизм $f \colon U \to \sigma_L$, $p \mapsto p \vee L$. Для каждого $p \in U$ множество $f(p)$ — это просто касательное пространство к X в точке p. Поэтому образ морфизма f плотен в $\mathcal{T}X$. Так как мы предположили, что основное поле имеет характеристику 0, то существует плотное открытое множество $V \subset X$, такое что для каждой его точки p дифференциал df_p сюръективен (см. [7, с. 271]).

Этот дифференциал имеет простой вид $df_p \colon T_p(X) \to T_{f(p)}(\mathcal{T}X)$, $a \mapsto a \vee L$. Поэтому он постоянен на $T_p(X) \setminus L$ со значением $[T_p(X)] = df_p(p)$. Отсюда $\dim(\mathcal{T}X) = 0$. Так как $\mathcal{T}X$ неприводимо, то оно сводится к единственной точке, которая отвечает k-мерному линейному пространству, скажем T, содержащему L. Наконец, $X \subset T$, $\dim X = k$ и X замкнуто, откуда $X = T$. $\square$

Отметим, что в положительной характеристике это неверно, как показывает следующий пример. Рассмотрим кривую в $\mathbb{P}^3$ над полем K характеристики p, заданную идеалом

$$\langle y^p - zt^{p-1},\, x^p - yt^{p-1}\rangle \subset K[x, y, z, t],$$

где $t = 0$ задаёт бесконечно удалённую плоскость. Касательное пространство в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) определяется следующей системой линейных уравнений:

$$\{t_0^{p-1}z + (p-1)z_0t_0^{p-2}t = 0,\ t_0^{p-1}y + (p-1)y_0t_0^{p-2}t = 0\}.$$

Любые два касательные пространства параллельны, поэтому все они содержат одну и ту же бесконечно удалённую точку. Однако такая кривая не является прямой. Заметим, что $(0, 0, 1, 0)$ — её особая точка.

Следующее предложение будет применено в статье несколько раз. В его основе лежит следующая идея. Пусть L обозначает k-линейное пространство. Если касательное пространство к неприводимому многообразию в генерической точке всегда вместе с L порождает $(k+1)$-мерное линейное пространство, то можно включить само многообразие в $(k+1)$-мерное линейное пространство, содержащее L.

Предложение 2. *Пусть X — неприводимое замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^n$ размерности r. Предположим, что существует пространство $L \in \mathbb{G}(k, n)$, такое что $\dim(L \cap T_p(X)) \geqslant r-1$ для всех точек $p \in U_0$, где U_0 — плотное открытое подмножество в X. Тогда X лежит в некотором $(k+1)$-мерном линейном пространстве, содержащем L.*

Доказательство. Если $X \subset L$, то доказательство не требуется. Поэтому будем считать, что $X \not\subset L$. Пусть $\sigma_L \subset \mathbb{G}(k+1, n)$ — множество всех $(k+1)$-мерных линейных пространств, содержащих L. Рассмотрим рациональное отображение $f\colon X \dashrightarrow \sigma_L$, $p \mapsto p \vee L$. Это отображение определено над открытым множеством U всех регулярных точек в $(X \setminus L) \cap U_0$. Каждая такая точка отображается в $(k+1)$-мерное пространство, которое порождают p и L. Так как $\dim(T_p(X) \cap L) = r-1$, то для $p \in U$ выполнено включение $T_p(X) \subset p \vee L = f(p)$. Пусть Y — замыкание множества $f(U)$ в σ_L. Тогда Y неприводимо.

Так как мы предположили, что основное поле имеет характеристику 0, то существует плотное открытое множество $V \subset X$, такое что для любой точки $p \in V$ дифференциал df_p сюръективен [7, с. 271].

Этот дифференциал имеет простой вид $df_p\colon T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$, $a \mapsto a \vee L$. Так как $T_p(X) \subset p \vee L$, то df_p постоянен на $T_p(X) \setminus L$ со значением $p \vee L = df_p$. Поэтому $\dim Y = 0$. Так как Y неприводимо, то Y состоит из единственной точки, отвечающей $(k+1)$-мерному линейному пространству, скажем K, содержащему L. Следовательно, $X \subset K$. □

Это предложение не выполнено в положительной характеристике. Действительно, пусть кривая в $\mathbb{P}^3$ над полем характеристики p задана идеалом

$\langle yt^{p-1} - x^p, zt^{p^2-1} - x^{p^2}\rangle$. Тогда все касательные параллельны и потому проходят через одну и ту же бесконечно удалённую точку. Но данная кривая не является прямой.

Прежде чем приступить к нашему исходному вопросу, покажем для случая двух многообразий, вложенных в $\mathbb{P}^n$ при $n \geqslant 3$, что соединяющее многообразие всегда содержит единственную соединяющую компоненту, которая имеет нужную размерность, а именно $2n-(c_1+c_2)$.

Лемма 6. *Пусть Y_1 и Y_2 — два различных неприводимых многообразия, вложенных в $\mathbb{P}^n$, и пусть $c_i \geqslant 2$ — коразмерность Y_i. Тогда соединяющее многообразие $J = J(Y_1, Y_2)$ имеет единственную соединяющую компоненту S, размерность которой равна $2n-(c_1+c_2)$.*

Доказательство. Пусть $\Delta = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \mid y_1 = y_2\}$, U — открытое множество в $Y_1 \times Y_2$ вида $U = (Y_1 \times Y_2) \setminus \Delta$. Пусть $s\colon U \to \mathbb{G}(1,n)$, $(p,q) \mapsto \overline{pq}$, — морфизм, отображающий элементы из U в порождаемые ими прямые, S — замыкание множества $s(U)$ в $\mathbb{G}(1,n)$. Так как U неприводимо, это верно и для S. Поэтому S — единственная соединяющая компонента в J. Так как общий слой отображения s конечен, то $\dim S = \dim U = \dim(Y_1 \times Y_2) = 2n-(c_1+c_2)$. □

В итоге получаем также следующую лемму, полезную в дальнейшем.

Лемма 7. *Пусть Y_1 и Y_2 — два неприводимых многообразия, вложенных в P^n, размерностей d_1 и d_2, не превосходящих $n-2$. Пусть S — единственная соединяющая компонента в $J = J(Y_1, Y_2)$. Тогда $\dim S = s = d_1 + d_2$.*

Объединение всех прямых в S является неприводимым многообразием, размерность которого строго больше $\max(d_1, d_2)$. Для генерической точки p в Y_i размерность многообразия прямых в S, проходящих через p, равна d_{3-i}.

Если, кроме того, существует неприводимое многообразие Y размерности $d \leqslant \max(d_1, d_2)$, такое что $S \subset \Delta(Y)$, то $d = \max(d_1, d_2)$ и для генерической точки p из Y размерность многообразия прямых в S, проходящих через p, равна $\min(d_1, d_2)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $d_1 \geqslant d_2$.

Шаг 1. Вначале рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Sigma = \{(l,p) \in S \times \mathbb{P}^n \mid p \in l\}$$

и канонические проекции $\pi_1\colon \Sigma \to S$, $\pi_2\colon \Sigma \to \mathbb{P}^n$. Для всех $l \in S$ слой $\pi_1^{-1}(l)$ неприводим и одномерен, а S неприводимо. Поэтому Σ неприводимо и $\dim \Sigma = \dim S + 1 = s + 1$. Положим

$$W = \pi_2(\pi_1^{-1}(S)) = \bigcup_{l \in S} l.$$

Из неприводимости Σ следует неприводимость W. Так как $Y_i \subset W$ при каждом i, то $\dim W \geqslant \max(d_1, d_2)$. При этом генерический слой проекции π_2 имеет размерность не выше d_2. Действительно, прообраз генерической точки p содержится в $\{(\overline{qp}, p) \mid q \in Y_2\}$. Следовательно, $\dim W > \max(d_1, d_2)$.

Шаг 2. Пусть $p \in Y_1$. Рассмотрим открытое множество $U = Y_2 \setminus \{p\}$ и морфизм $f\colon U \to S$, $q \mapsto \overline{pq}$. Из неприводимости U следует неприводимость $f(U)$. Если l — генерическая прямая в $f(U)$, то слой $f^{-1}(l)$ конечен (в противном случае Y_2 — конус с вершиной p, что невозможно для генерической точки $p \in Y_1$). Следовательно, $\dim f(U) = \dim Y_2$. Аналогичное утверждение верно и для генерической точки в Y_2. Поэтому размерность многообразия прямых в S, проходящих через точку общего положения в Y_i, равна d_{3-i}.

Шаг 3. Обозначим через X_p, где $p \in Y$, многообразие всех прямых в S, проходящих через p. Пусть Z — подмногообразие в Y, состоящее из всех тех точек, для которых X_p непусто. Тогда $S \subset \Delta(Z)$.

Покажем, что Z неприводимо. Пусть $Z = E \cup F$, где E и F — замкнутые подмножества в Z. Единственные соединяющие компоненты в $J(E, Y_2)$ и $J(F, Y_2)$ обозначим S_1 и S_2. Тогда $\dim S_1 = \dim E + d_2$ и $\dim S_2 = \dim F + d_2$. При этом $S \subset S_1 \cup S_2$, поэтому $\max(\dim E + d_2, \dim F + d_2)) \geqslant d_1 + d_2$, откуда $\max(\dim E, \dim F) \geqslant d_1$. Однако $\dim Z \leqslant \dim Y \leqslant d_1$. Значит, либо $E = Z$, либо $F = Z$, откуда $\dim Z = d_1$. Поэтому $Z = Y_1$ и $\dim Y = d_1$.

Пусть S' — единственная соединяющая компонента в $J(Z, Y_2)$. Тогда $S \subset S'$. Но $\dim S = \dim S'$ и оба многообразия неприводимые и замкнутые, поэтому $S = S'$. Рассуждая аналогично шагу 2, получаем, что для генерической точки p в Y размерность многообразия X_p равна $d_2 = \min(d_1, d_2)$. □

3.2. Многообразия единой размерности

Теперь мы готовы к тому, чтобы дать вывод общей леммы о 3-секущих, выполненной для многообразий единой размерности. Сначала рассмотрим следующую ситуацию. Пусть Y_1 и Y_2 — неприводимые многообразия, вложенные в $\mathbb{P}^n$ для некоторого $n \in 2\mathbb{N} + 1$. Предположим, что $\dim Y_1 = \dim Y_2 = k = \frac{n-1}{2}$. Соединяющее многообразие $J(Y_1, Y_2)$, как показано в лемме 6, обязательно содержит соединяющую компоненту S размерности $n - 1$. Покажем, что если третье неприводимое многообразие Y той же размерности таково, что $S \subset \Delta(Y)$, то все три многообразия лежат в одном и том же $(k+1)$-мерном линейном пространстве. Затем мы обобщим результат на произвольные многообразия единой размерности.

3.2.1. Два многообразия равной размерности в нечётномерном пространстве

Теорема 1. *Пусть n — нечётное натуральное число. Рассмотрим два различных неприводимых замкнутых многообразия Y_1 и Y_2 размерности $k = \frac{n-1}{2}$ в пространстве $\mathbb{P}^3$. Пусть S — соединяющая компонента размерности $n - 1$ в многообразии $J(Y_1, Y_2)$, существующая согласно лемме 6. Если существует третье неприводимое многообразие Y размерности k, отличное от Y_1 и Y_2 и такое, что $S \subset \Delta(Y)$, то все три многообразия лежат в одном и том же $(k + 1)$-мерном линейном пространстве, которое является объединением всех прямых из S.*

Доказательство. Шаг 1. Положим

$$W = \bigcup_{l \in S} l.$$

По лемме 7 многообразие W имеет размерность, строго большую, чем k. При этом та же лемма показывает, что многообразие всех прямых в S, проходящих через генерическую точку $p \in Y$, имеет размерность k.

Шаг 2. Пусть l_0 — генерическая прямая в S, $q_i = l_0 \cap Y_i$, $p_0 = l_0 \cap Y$. Так как l_0 — генерическая прямая, то можно считать, что эти точки регулярны и $p_0 \notin Y_1 \cap Y_2$.

Пусть $\sigma_{p_0} \subset \mathbb{G}(1, n)$ — множество прямых, проходящих через p_0. В общем случае многообразие $X_{p_0} = \sigma_{p_0} \cap S$ имеет размерность k.

Теперь рассмотрим морфизм $f\colon Y_1 \to \sigma_{p_0}$, $a \mapsto a \vee p_0$. Ясно, что $X_{p_0} \subset f(Y_1)$. Поскольку общий слой морфизма f конечен, $\dim X_{p_0} = \dim Y_1$ и $f(Y_1)$ неприводимо, то верно даже равенство $X_{p_0} = f(Y_1)$. Поэтому можно рассматривать f как морфизм из Y_1 в X_{p_0}, а именно $f\colon Y_1 \to X_{p_0}$, $a \mapsto a \vee p$. Здесь, как и выше, дифференциал морфизма f в точке q_1 допускает простое выражение $df_{p_1}\colon T_{q_1}(Y_1) \to T_{l_0}(X_{p_0})$, $a \mapsto a \vee p_0$. Поскольку прямая l_0 генерическая, то будем считать, что $\dim T_{l_0}(X_{p_0}) = \dim X_{p_0} = k$.

Рассмотрим теперь линейное пространство

$$H_0 = \bigcup_{l \in T_{l_0}(X_{p_0})} l.$$

Его размерность равна $k+1$. Выражение для df_{p_1} показывает, что $T_{q_1}(Y_1) \subset H_0$. Аналогично получаем, что $T_{q_2}(Y_2) \subset H_0$. Поэтому справедливо неравенство $\dim(T_{q_1}(Y_1) \cap T_{q_2}(Y_2)) \geqslant k - 1$.

Аналогичное рассуждение показывает, что существует плотное открытое множество $U \subset Y_1$, такое что $\dim(T_q(Y_1) \cap T_{q_2}(Y_2)) \geqslant k - 1$ для каждой точки $q \in U$.

Шаг 3. Если Y_2 — линейное пространство размерности k, то согласно предложению 2 оно лежит в $(k+1)$-мерном линейном пространстве, содержащем Y_2. Аналогичное утверждение верно, если линейным пространством является Y_1.

Шаг 4. Предположим теперь, что ни Y_1, ни Y_2 не являются линейными пространствами. Применим рассуждение из шага 2 к множествам X_{q_1} и X_{q_2}, которые состоят из прямых в S, проходящих через q_1 и q_2 соответственно. Получаем следующее:

1) существует открытое множество U_1 в Y_1, такое что $\dim(T_q(Y_1) \cap T_{p_0}(Y)) \geqslant$ $\geqslant k - 1$ для всех $q \in U_1$;
2) существует открытое множество U_2 в Y_2, такое что $\dim(T_q(Y_2) \cap T_{p_0}(Y)) \geqslant$ $\geqslant k - 1$ для всех $q \in U_2$.

При $k = 1$ (например, для кривых в $\mathbb{P}^3$) эти неравенства в точности означают, что пересечение непусто. Тогда по предложению 2 каждое Y_i лежит в $(k+1)$-мерном линейном пространстве Q_i, содержащем $T_{p_0}(Y)$. Эти два линейных пространства Q_1 и Q_2 совпадают, поскольку оба они порождаются прямой в S, а именно l_0, и пространством $T_{p_0}(Y)$. Обозначим это линейное пространство через Q.

Многообразие W является объединением всех прямых в S и содержится в Q. Поэтому Y также содержится в Q. Значит, каждая прямая в Q пересекает три многообразия Y_1, Y_2 и Y. Поэтому многообразие Фано пространства Q — это единственная соединяющая компонента в $J(Y_1, Y_2)$. Объединение всех этих прямых совпадает с Q. □

3.2.2. Обобщённая лемма о 3-секущих для многообразий единой размерности

Проведённое доказательство сохраняется, если некоторые из многообразий Y_1, Y_2 и Y совпадают, так что мы получаем обобщение леммы о 3-секущих. Будем использовать следующее обозначение: если X — многообразие, то $V_{1,3}(X)$ — замыкание в $\mathbb{G}(1,n)$ множества

$$\{l \in \mathbb{G}(1,n) \mid \exists p,q,r \in X,\ p \neq q,\ p \neq r,\ q \neq r,\ p,q,r \in l\}.$$

Теорема 2 (первое обобщение леммы о 3-секущих). *Пусть Z — многообразие единой размерности n (возможно, особое и/или приводимое), отличное от линейного пространства и вложенное в $\mathbb{P}^r$, $r \geqslant n+1$. Тогда многообразие всех 3-секущих многообразия Z, т. е. $V_{1,3}(Z)$, имеет размерность строго меньше, чем $2n$, за исключением случая, когда Z содержится в $(n+1)$-мерном линейном пространстве и имеет степень не ниже 3: тогда $\dim V_{1,3}(Z) = 2n$.*

Доказательство. Возможны два случая.

Случай 1. Если $r < 2n+1$, то можно вложить $\mathbb{P}^r$ в $\mathbb{P}^{2n+1}$, пользуясь проективной эквивалентностью. Мы оказываемся в условиях теоремы 1 и немедленно получаем нужный результат.

Случай 2. Пусть $r \geqslant 2n+1$. Положим $s = r - 2n - 1 \geqslant 0$ и докажем наше утверждение индукцией по s. При $s = 0$ оно составляет содержание теоремы 1.

Теперь остаётся показать, что если наш результат верен для некоторого s, то он верен и для $s+1$. Пусть p — генерическая точка в $\mathbb{P}^r$, где $r = 2n+1+s+1$, H — произвольная гиперплоскость в $\mathbb{P}^r$, не проходящая через p, Z' — проекция многообразия Z на H с центром p. Можно канонически отождествить H с $\mathbb{P}^{2n+1+s}$. Так как проекция генерическая и $\dim Z < r-1$, то общий слой проекции $\pi\colon Z \to H$ пуст. Однако над $\pi(Z)$ общий слой непуст и конечен. Поэтому размерность $V_{1,3}(Z')$ оказывается равной $2n$. В силу предположения индукции Z' лежит в линейном пространстве $L' \subset H$ размерности $n+1$.

Пусть L — линейное пространство, которое порождают p и L'. Тогда $\dim L = n+2$ и $Z \subset L$. Так как $n+2 < 2n+1$ при $n+1$, то остаётся сослаться на доказательство для первого случая. Отметим, что при $n = 1$ результат легко выводится из классической леммы о 3-секущих. □

Полученный результат можно также сформулировать следующим образом.

Следствие. *Пусть Z — многообразие размерности n. Если многообразие его 3-секущих $V_{1,3}(Z)$ имеет размерность $2n$, то Z вкладывается в $\mathbb{P}^{n+1}$.*

3.3. Случай компонент различной размерности

В этом разделе мы рассмотрим более общий случай. Наша цель — обобщить теорему 2 на случай, когда многообразие Z имеет компоненты различной размерности. Как и выше, мы прежде всего выясним, что происходит с двумя неприводимыми многообразиями взаимно дополнительной размерности.

3.3.1. Результат для двух многообразий

Пусть Y_1 и Y_2 — неприводимые замкнутые многообразия, вложенные в $\mathbb{P}^n$, причём $\dim Y_1 = k$ и $\dim Y_2 = n-1-k$, где $\frac{n-1}{2} \leqslant k \leqslant n-2$. Многообразия Y_1 и Y_2 предполагаются различными. Пусть Y — неприводимое многообразие размерности не выше k, отличное от Y_1 и Y_2. По лемме 6 многообразие $J(Y_1, Y_2)$ содержит соединяющую компоненту S размерности $n-1$. Пусть W — подмногообразие в $\mathbb{P}^n$, состоящее из всех прямых в S. Эта ситуация рассматривается до конца п. 3.3. Мы хотим показать, что W имеет размерность $k+1$.

Y имеет размерность k

Лемма 8. *Пусть Y_1, Y_2 и Y — многообразия, определённые выше. Если $S \subset \Delta(Y)$, то Y имеет размерность k.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 7. □

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить размерность многообразия W.

W имеет размерность $k+1$

Лемма 9. *Пусть Y_1, Y_2 и Y — многообразия из леммы 8, q_1 и q_2 — генерические точки в Y_1 и Y_2 соответственно, $p(q_1, q_2) = \overline{q_1 q_2} \cap Y$ — точка пересечения прямой $\overline{q_1 q_2}$ с Y. Предполагается, что точки q_1, q_2 и $p(q_1, q_2)$ регулярны. Тогда касательные пространства $T_{q_1}(Y_1)$, $T_{q_2}(Y_2)$ и $T_{p(q_1,q_2)}(Y)$ содержатся в некотором $(k+1)$-мерном линейном пространстве.*

Доказательство. Шаг 1. Точки q_1, q_2 и $p(q_1, q_2)$ действительно можно считать регулярными, поскольку множество особых точек алгебраического многообразия является собственным замкнутым подмногообразием [1, с. 116].

Вначале докажем, что прямая $\overline{q_1 q_2}$ и касательные пространства $T_{q_1}(Y)$ и $T_{p(q_1,q_2)}(Y)$ содержатся в некотором $(k+1)$-мерном линейном пространстве.

Пусть $\sigma_{q_2} \subset \mathbb{G}(1, n)$ — множество прямых, проходящих через q_2. В общем случае X_{q_2} имеет размерность k (по лемме 7).

Рассмотрим теперь морфизм $f\colon Y_1 \to \sigma_{q_2}$, $a \mapsto a \vee q_2$. Для каждого $a \in Y_1$ прямая $a \vee q_2$ лежит в S. Поэтому можно рассматривать f как морфизм из Y_1 в X_{q_2} вида $f\colon Y_1 \to X_{q_2}$, $a \mapsto a \vee q_2$. Его дифференциал в точке q_1 имеет вид $df_{q_1}\colon T_{q_1}(Y_1) \to T_{\overline{q_1 q_2}}(X_{q_2})$, $a \mapsto a \vee q_2$.

Рассмотрим теперь линейное пространство

$$H_{q_1,q_2} = \bigcup_{l \in T_{\overline{q_1 q_2}}(X_{q_2})} l.$$

Его размерность равна $k+1$. Из выражения для df_{q_1} видно, что $T_{q_1}(Y_1) \subset H_{q_1,q_2}$. Таким образом, H_{q_1,q_2} — линейное пространство размерности $k+1$, порождённое пространством $T_{q_1}(Y_1)$ и прямой $\overline{q_1 q_2}$:

$$H_{q_1,q_2} = \langle T_{q_1}(Y_1), \overline{q_1 q_2} \rangle,$$

где $\langle\ \rangle$, как и в лемме Террачини, обозначает линейную оболочку. Точно так же можно показать, что $T_{p(q_1,q_2)}(Y) \subset H_{q_1,q_2}$.

Шаг 2. Рассмотрим теперь множество $\sigma_{p(q,q_2)}$ всех прямых, проходящих через $p(q_1, q_2)$; ниже оно обозначается просто σ_p.

Пусть $X_p = \sigma_p \cap S$. Из леммы 7 получаем $\dim X_p = n - k - 1$. Пусть $g\colon Y_2 \to \sigma_p$ — морфизм, отображающий точку $a \in Y_2$ в прямую $a \vee p$, где $p = p(q_1, q_2)$. Так как $X_p \subset g(Y_2)$, общий слой морфизма g конечен, $g(Y_2)$ неприводимо и $\dim Y_2 = \dim X_p$, то образом g служит X_p. Поэтому можно рассмотреть морфизм $g\colon Y_2 \to X_p$, $a \mapsto a \vee p$. Его дифференциал в точке q_2 порождает морфизм $dg_{q_2}\colon T_{q_2}(Y_2) \to T_{\overline{q_1 q_2}}(X_p)$, который имеет вид $a \mapsto a \vee p$.

Пусть

$$K_{q_1,q_2} = \bigcup_{l \in T_{\overline{q_1 q_2}}(X_p)} l \, —$$

объединение прямых из $T_{\overline{q_1 q_2}}(X_p)$. Его размерность равна $n-k$. Выражение для dg_{q_2} показывает, что $T_{q_2}(Y) \subset K_{q_1,q_2}$.

Пусть теперь Z_1 — подмногообразие в Y_1, имеющее вид

$$Z_1 = \{q \in Y_1 \mid \overline{qp} \in S\}.$$

Его можно рассматривать как след пространства X_p на Y_1. Пусть h — морфизм $h\colon Z_1 \to X_p$, $a \mapsto a \vee p$. Вычисление его дифференциала в точке q_1 показывает, что $T_{q_1}(Z_1) \subset K_{q_1,q_2}$.

Так как $\dim T_{q_1}(Z_1) \geqslant n - k - 1$ и в общем случае $\overline{q_1 q_2} \not\subset T_{q_1}(Z_1)$, а $\dim K_{q_1,q_2} = n - k$, то $K_{q_1,q_2} = \langle T_{q_1}(Z_1), \overline{q_1 q_2} \rangle$. Так как $T_{q_1}(Z_1) \subset T_{q_1}(Y_1)$, то $K_{q_1,q_2} \subset H_{q_1,q_2}$, откуда $T_{q_2}(Y_2) \subset H_{q_1,q_2}$.

Таким образом, $T_{q_1}(Y_1)$, $T_{q_2}(Y_2)$ и $T_{p(q_1,q_2)}(Y)$ действительно порождают $(k+1)$-мерное линейное пространство. □

Теперь с помощью леммы Террачини получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть Y_1, Y_2 и Y — многообразия из леммы 8. Тогда W имеет размерность $k+1$.*

Доказательство. Рассмотрим неособые точки $q_1 \in Y_1$ и $q_2 \in Y_2$. Согласно лемме 9 касательные пространства $T_{q_1}(Y_1)$ и $T_{q_2}(Y_2)$ вместе с прямой $\overline{q_1 q_2}$ порождают $(k+1)$-мерное линейное пространство, которое мы обозначим K_{q_1,q_2}.

Согласно лемме Террачини (лемма 4) касательное пространство к W в точке $\alpha q_1 + q_2$ при некотором $\alpha \neq 0$ лежит в K_{q_1,q_2}. Поэтому $\dim W \leqslant k+1$. Из леммы 7 получаем, что $\dim W > k$. Таким образом, $\dim W = k+1$. □

Эта теорема, в частности, показывает, что если W покрывает все пространство, то не существует многообразия Y, отличного от Y_1 и Y_2, которое пересекало бы любую прямую в S.

Пример

Теперь покажем, как построить многообразия из п. 3.3. Для каждого k, такого что $\frac{n-1}{2} < k \leqslant n-2$, можно построить многообразия Y_1, Y_2 и Y, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\dim Y_1 = \dim Y = k$;
2) $\dim Y_2 = n-1-k$;
3) $J(Y_1, Y_2)$ содержит соединяющую компоненту S размерности $n-1$;
4) $S \subset \Delta(Y)$.

Действительно, положим $d = k-(n-1-k) = 2k-n+1 > 0$. Пусть $m > d$ — натуральное число, Z_1 — неприводимое многообразие размерности d в $\mathbb{A}^m$, не содержащее начало координат, Z_2 — многообразие, состоящее только из начала координат в $\mathbb{A}^m$. Пусть отображение f имеет вид $f\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$, $(a_1, \ldots, a_m) \mapsto (a_1/2, \ldots, a_m/2)$, $Z = f(Z_1)$. Рассмотрим теперь $\hat{Y}_1 = Z_1 \times \mathbb{A}^s$, $\hat{Y}_2 = Z_2 \times \mathbb{A}^s$ и $\hat{Y} = Z \times \mathbb{A}^s$.

Если положить $s = k-d = n-k-1$ и $m = n-s = k+1 > d$, то выполнены следующие условия: $\dim \hat{Y}_1 = \dim \hat{Y} = k$, $\dim \hat{Y}_2 = n-k-1$ и $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y} \subset \mathbb{A}^n$.

Теперь возьмём в качестве Y_1, Y_2, Y проективные замыкания многообразий $\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_2$, $\hat{Y}$. Тогда $J(Y_1, Y_2)$ в силу леммы 6 имеет соединяющую компоненту S размерности $n-1$. При этом по построению $S \subset \Delta(Y)$ и многообразие $W = \bigcup\limits_{l \in S} l$ имеет размерность $k+1$.

3.3.2. Общая формулировка

Поскольку доказательство теоремы остаётся справедливым при $Y_2 \subset Y_1$ и $Y_1 = Y$, мы получаем следствие, которое можно рассматривать и как обобщение леммы о 3-секущих.

Теорема 4 (второе обобщение леммы о 3-секущих). *Пусть Z — многообразие размерности n (которое может быть особым, приводимым и иметь компоненты различной размерности), вложенное в $\mathbb{P}^r$, где $r \geqslant n+1$, Y — собственное подмногообразие в Z размерности $k \geqslant 1$, S — неприводимая компонента максимальной размерности в $V_{1,3}(Y, Z)$, где $V_{1,3}(Y, Z)$ — замыкание множества*

$$\{l \in \mathbb{G}(1, r) \mid \exists p \in Y,\ q_1, q_2 \in Z \setminus Y,\ q_1 \neq q_2,\ p, q_1, q_2 \in l\}.$$

Тогда S имеет размерность строго выше $n+k$, за исключением случая, когда объединение прямых в S имеет размерность $n+1$: в этом случае S имеет размерность $n+k$.

Доказательство. Шаг 1. Размерность S не превосходит $n+k$, поскольку такова размерность соединяющего многообразия $J(Y,Z)$.

Шаг 2. Если $r < n+k+1$, то можно вложить $\mathbb{P}^r$ в $\mathbb{P}^{n+k+1}$ по проективной эквивалентности. Согласно теореме 3, если $\dim S = n+k$, то объединение прямых в S имеет размерность $n+1$.

Шаг 3. Если $r \geqslant n+k+1$, то пусть $s = r-(n+k+1)$. Если $s=0$, то наш результат следует из теоремы 3. Пусть теперь результат верен для некоторого $s \in N$, докажем его для $s+1$.

Размерность пространства r может быть выражена как $r = s+1+n+k+1$. Пусть p — генерическая точка в $\mathbb{P}^{s+1+n+k+1}$, H — гиперплоскость, не проходящая через p, Z' (Y') — проекция многообразия Z (соответственно Y) на H с центром p. Тогда Z' вкладывается в проективное пространство размерности $s+n+k+1$. Общий слой проекции $\pi\colon Z \to Z'$ конечен.

Каждая прямая в S проектируется на прямую в замыкании $V_{1,3}(Y',Z')$ множества

$$\{l \in \mathbb{G}(1,r-1) \mid \exists p \in Y',\ q_1,q_2 \in Z' \setminus Y',\ q_1 \neq q_2,\ p,q_1,q_2 \in l\}.$$

Пусть $S' \subset V_{1,3}(Y',Z')$ состоит из прямых, которые являются проекциями прямых из S. Так как общий слой проекции π конечен, то $\dim S' = \dim S$.

Таким образом, если $\dim S = n+k$, то $\dim S' = n+k$. В этом случае, так как $\dim J(Y',Z') = n+k$, то S' является неприводимой компонентой максимальной размерности в $V_{1,3}(Y'Z') \subset J(Y',Z')$. Тогда по предположению индукции $W' = \bigcup\limits_{l \in S} l$ имеет размерность $n+1$, и потому $\dim W = n+1$, поскольку общий слой проекции $\pi\colon W \to W'$ конечен. □

Отметим, что если $r > n+1$ и $\dim S = n+k$, то из теоремы следует, что объединение прямых из S не может покрыть все пространство.

Пример

В заключение приведём пример n-мерного многообразия, многообразие k-секущих которого при $k \geqslant 3$ имеет размерность $2n-1$. Этот пример усовершенствует общеизвестную (и приведённую в [10]) конструкцию n-мерного многообразия, для которого многообразие k-секущих n-мерно.

Пусть $p \in \mathbb{A}^3$ — начало координат. Рассмотрим неприводимую кривую $X_1 \subset \mathbb{A}^3$, не проходящую через p. При $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, пусть $X_m = f_m(X_1)$, где $f_m(x,y,z) = (mx,my,mz)$. Для каждого $m \geqslant 1$ положим $Y_m = X_m \times \mathbb{A}^{n-1}$. Для данного $k \geqslant 3$ положим $Z_k = \bigcup\limits_{1 \leqslant m \leqslant k} Y_m$. Тогда $\dim Z_k = n$ и Z_k обладает семейством k-секущих, имеющим размерность $2n-1$.

Можно также найти неприводимое многообразие Z, которое содержит Z_k и имеет размерность $n' = n+1$. В этом случае семейство прямых имеет размерность $2n'-3$.

Литература

[1] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1988. — Т. 1.

[2] Adlansvik B. Joins and higher secant varieties // Math. Scand. — 1987. — Vol. 61. — P. 213—222.

[3] Adlansvik B. Varieties with extremal number of degenerate higher secant varieties // J. Reine Angew. Math. — 1988. — Vol. 392. — P. 16—26.

[4] Barnabei M., Brini A., Rota G. C. On the exterior calculus of invariant theory // J. Algebra. — 1985. — Vol. 96. — P. 120—160.

[5] Flenner H., O'Carroll L., Vogel W. Joins and Intersections. — Springer, 1999.

[6] Harris J. Algebraic Geometry. — Springer, 1992.

[7] Hartshorne R. Algebraic Geometry. — Springer, 1997.

[8] Laudal O. A. A generalized trisecant lemma // Algebraic Geometry Proc. — Springer, 1977. — (Lect. Notes Math.; Vol. 687).

[9] Liu Q. Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. — Oxford University Press, 2002.

[10] Ran Z. The (dimension + 2)-secant lemma // Invent. Math. — 1991. — Vol. 106. — P. 65—71.

[11] Zak F. Tangents and Secants of Algebraic Varieties. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992.