О шпехтовых многообразиях правоальтернативных алгебр

А. М. КУЗЬМИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: amkuzmin@yandex.ru

УДК 512.554.5

Ключевые слова: правоальтернативная алгебра, метабелева алгебра, тождество, шпехтовость.

Аннотация

В работе доказана теорема, содержащая достаточное условие шпехтовости многообразия правоальтернативных метабелевых алгебр над полем характеристики, отличной от 2. В качестве следствия установлена шпехтовость некоторых многообразий, порождённых правоальтернативными метабелевыми алгебрами $\mathcal{A}$ с коммутаторным тождеством. В частности, доказано, что если $\mathcal{A}^{(-)}$ бинарно лиева, то многообразие $\operatorname{var}(\mathcal{A})$ шпехтово.

Abstract

A. M. Kuz'min, On Spechtian varieties of right alternative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 89—100.

A sufficient condition is proved for the Specht property of varieties of right alternative metabelian algebras over a field of characteristic distinct from 2. As a consequence, the Specht property of some varieties generated by right alternative metabelian algebras $\mathcal{A}$ satisfying a commutator identity is stated. In particular, it is proved that if $\mathcal{A}^{(-)}$ is a binary Lie algebra, then $\operatorname{var}(\mathcal{A})$ is Spechtian.

Введение

В 1987 г. А. Р. Кемер [6] решил известную проблему Шпехта [13], доказав, что произвольное многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 имеет конечный базис тождеств. Проблематика конечной базируемости вызывает интерес и для многообразий неассоциативных алгебр. В частности, среди результатов о шпехтовости многообразий алгебр Ли и алгебр, близких к ассоциативным, известны как положительные [7, 9—11, 14], так и отрицательные [2, 3, 5, 8, 15].

В 1968 г. Воон-Ли [14] доказал шпехтовость многообразия метабелевых алгебр Ли. Им же в работе [15] построен первый пример бесконечно базируемого многообразия алгебр Ли над полем характеристики 2. В. С. Дренски [3] распространил результат [15] на случай произвольного поля положительной ха-

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 89—100.

рактеристики. Ю. А. Медведев [7] получил обобщение результата [14], установив шпехтовость многообразия метабелевых алгебр Мальцева. Этот результат является одним из следствий доказанной Ю. А. Медведевым в 1978 г. теоремы о конечной базируемости многообразий с двучленным тождеством [7]. (В 1984 г. У. У. Умирбаев [10] получил обобщение теоремы Медведева [7] и доказал в качестве следствия шпехтовость многообразия метабелевых бинарно лиевых алгебр.) Другие следствия этой теоремы устанавливают шпехтовость многообразий метабелевых алгебр, близких к ассоциативным: альтернативных, йордановых, $(-1,1)$-алгебр и правоальтернативных алгебр с тождеством левой нильпотентности. Ю. А. Медведеву [8] принадлежит и первый пример бесконечно базируемого многообразия центрально-метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики 2. У. У. Умирбаев [11] доказал шпехтовость произвольного многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики, отличной от 2 и 3. С. В. Пчелинцев [9] построил почти шпехтово многообразие, т. е. бесконечно базируемое многообразие, всякое собственное подмногообразие которого имеет конечный базис тождеств, центрально-метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики 3. На сегодняшний день результат [9] является единственным известным примером почти шпехтова многообразия алгебр.

В 1976 г. В. П. Белкин [2] показал, что над любым полем существуют бесконечно базируемые многообразия правоальтернативных метабелевых алгебр. Как установил И. М. Исаев [5], порождающие алгебры таких многообразий могут быть и конечномерными. Естественным образом возникает необходимость установления достаточных условий конечной базируемости многообразий правоальтернативных метабелевых алгебр. Однако, кроме указанных выше следствий теоремы Медведева [7], каких-либо положительных результатов о шпехтовости многообразий правоальтернативных метабелевых алгебр до настоящего момента известно не было. В предлагаемой работе изучается вопрос о шпехтовости многообразий, определяемых тождествами присоединённой алгебры $\mathcal{A}^{(-)}$, полученной кососимметризацией $[x,y]=xy-yx$ умножения в правоальтернативной метабелевой алгебре $\mathcal{A}$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие правоальтернативных метабелевых алгебр над полем $\mathcal{F}$ характеристики, отличной от 2, с тождеством*

$$\begin{aligned}
&[x_1,x_2,x_3,\dots,x_{N-1},x_N]+[x_2,x_1,x_3,\dots,x_{N-1},x_N]=\\
&\quad=\sum_{\sigma\in\mathrm{A}_N}\sum_{i=1}^{[\frac{N-1}{2}]-1}\alpha_i^{(\sigma)}\big([x_{1\sigma},\dots,x_{(2i-1)\sigma},x_{(2i)\sigma},x_{(2i+1)\sigma},x_{(2i+2)\sigma},\dots,x_{N\sigma}]+\\
&\quad+[x_{1\sigma},\dots,x_{(2i-1)\sigma},x_{(2i+1)\sigma},x_{(2i)\sigma},x_{(2i+2)\sigma},\dots,x_{N\sigma}]\big),
\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$[x_1,x_2,x_3,\dots,x_{N-1},x_N]=[x_1,[x_2,[x_3,\dots,[x_{N-1},x_N]\dots]]],$$

A_N *— знакопеременная группа степени $N\geqslant 5$ и $\alpha_i^{(\sigma)}\in\mathcal{F}$. Тогда $\mathfrak{M}$ шпехтово.*

Из теоремы выводятся три следствия о шпехтовости многообразия $\mathrm{var}(\mathcal{A})$, порождённого правоальтернативной метабелевой алгеброй $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{F}$.

Следствие 1. *Если $\mathcal{A}^{(-)}$ бинарно лиева, то $\mathrm{var}(\mathcal{A})$ шпехтово.*

Следствие 1 также устанавливает шпехтовость многообразия метабелевых бинарно $(-1,1)$-алгебр над $\mathcal{F}$, поскольку можно показать, что $\mathcal{A}^{(-)}$ бинарно лиева тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является бинарно $(-1,1)$-алгеброй.

Следствие 2. *Пусть в $\mathcal{A}$ выполнено тождество*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \alpha[x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \ldots, x_{(n-1)\sigma}, x_{n\sigma}], \tag{2}$$

где $\alpha \in \mathcal{F}$ и σ — подстановка степени $n \geqslant 3$, удовлетворяющая следующим условиям: $1\sigma \neq 1$ и существует такое число $i \in [1, n-2]$, что число $|i\sigma - i|$ нечётно. Тогда $\mathrm{var}(\mathcal{A})$ шпехтово.

Ограничение $1\sigma \neq 1$ в условии следствия 2 принципиально, поскольку можно показать, что среди многообразий правоальтернативных метабелевых алгебр с тождеством

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = -[x_1, x_3, x_2, x_4, x_5]$$

существуют и бесконечно базируемые.

Следствие 3. *Пусть в $\mathcal{A}$ выполнено тождество*

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{C}_n} \alpha_\sigma [x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \ldots, x_{n\sigma}] = 0, \tag{3}$$

где C_n — группа подстановок степени $n \geqslant 3$, порождённая циклом $(1\,2\ldots n)$, и $\alpha_\sigma \in \mathcal{F}$. Тогда $\mathrm{var}(\mathcal{A})$ шпехтово.

В частности, $\mathrm{var}(\mathcal{A})$ шпехтово, если $\mathcal{A}^{(-)}$ удовлетворяет нетривиальному полилинейному тождеству степени 3.

Статья состоит из трёх разделов. В разделе 1 вводятся необходимые обозначения и устанавливаются основные операторные соотношения. Доказательству теоремы посвящается раздел 2. Следствия теоремы и существенность ограничения на характеристику поля $\mathcal{F}$ доказываются в разделе 3.

Автор благодарен профессору С. В. Пчелинцеву за постановку задач и полезные обсуждения работы.

1. Вспомогательные леммы

Всюду в работе $\mathcal{F}$ — поле характеристики, отличной от 2. Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathcal{F}$ называется *правоальтернативной метабелевой*, если в $\mathcal{A}$ справедливы тождества

$$(x, y, z) + (x, z, y) = 0, \tag{4}$$

$$(xy)(zt) = 0, \tag{5}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z.

Пусть $\mathcal{A}$ — *свободная* правоальтернативная метабелева алгебра над $\mathcal{F}$ от счётного множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Посредством L_x и R_x обозначим соответственно операторы левого и правого умножения на элемент $x \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}^*$ — ассоциативная алгебра над $\mathcal{F}$, порождённая всеми операторами L_x и R_x, действующими на идеале $\mathcal{A}^2$. Определим линейное отображение

$$\mathrm{s}\colon \mathcal{A}^* \mapsto \mathcal{A}^*, \quad \mathrm{s}(T^{(1)}_{x_1} T^{(2)}_{x_2} \ldots T^{(n)}_{x_n}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} T^{(1)}_{x_{1\sigma}} T^{(2)}_{x_{2\sigma}} \ldots T^{(n)}_{x_{n\sigma}},$$

где $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(n)} \in \{L, R\}$ и S_n — симметрическая группа степени n. Мы записываем операторные соотношения алгебры $\mathcal{A}^*$ в виде линейных комбинаций над $\mathcal{F}$ операторов

$$\Phi,\ \Phi\Phi',\ \Phi \circ \Phi',\ [\Phi, \Phi'],$$

где $\Phi, \Phi' \in \mathrm{Im}\, \mathrm{s}$ и

$$\Phi \circ \Phi' = \Phi\Phi' + \Phi'\Phi, \quad [\Phi, \Phi'] = \Phi\Phi' - \Phi'\Phi.$$

Чтобы не усложнять формулы, мы не пишем индексы переменных у операторов L и R. При этом отсутствующие индексы считаются произвольными элементами множества X, расставленными во всех операторных словах в одинаковом порядке. Например, очевидное равенство

$$L_x R_y + R_x L_y = \mathrm{s}(L_x R_y) + [R_x, L_y]$$

принимает вид

$$LR + RL = \mathrm{s}(LR) + [R, L]. \tag{6}$$

Лемма 1. *В алгебре $\mathcal{A}^*$ справедливы следующие соотношения*:

$$R \circ R = 0, \tag{7}$$
$$[R, L] = -L^2, \tag{8}$$
$$[R, L^2] = -(L \circ L)L, \tag{9}$$
$$[R^2, L] = 0, \tag{10}$$
$$R \circ (\mathrm{s}(LR)) = -L(\mathrm{s}(LR)), \tag{11}$$
$$\mathrm{s}(LR)L = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Положим $w \in \mathcal{A}^2$ и $x, y, z \in X$. Применяя тождества (4) и (5), имеем

$$wR_x \circ R_y = (wx)y + (wy)x = (w, x, y) + (w, y, x) = 0$$

и

$$w[R_x, L_y] = y(wx) - (yw)x = -(y, w, x) = (y, x, w) = -wL_x L_y.$$

Используя (8), получаем

$$[R_x, L_y L_z] = R_x L_y L_z - L_y L_z R_x = R_x L_y L_z - L_y R_x L_z + L_y R_x L_z - L_y L_z R_x = \\ = [R_x, L_y] L_z + L_y [R_x, L_z] = -(L_x \circ L_y) L_z.$$

Применяя (7), (8), (9) и тождество Якоби, имеем

$$
\begin{aligned}
2[R_xR_y, L_z] &= [[R_x, R_y], L_z] = -[[R_y, L_z], R_x] - [[L_z, R_x], R_y] = \\
&= [R_x, [R_y, L_z]] - [R_y, [R_x, L_z]] = -[R_x, L_yL_z] + [R_y, L_xL_z] = \\
&= (L_x \circ L_y)L_z - (L_y \circ L_x)L_z = 0.
\end{aligned}
$$

Используя (7) и (8), получаем

$$
\begin{aligned}
R_x \circ (\mathrm{s}(L_yR_z)) &= R_x(L_yR_z + L_zR_y) + \mathrm{s}(L_yR_z)R_x = \\
&= ([R_x, L_y] + L_yR_x)R_z + ([R_x, L_z] + L_zR_x)R_y + \mathrm{s}(L_yR_z)R_x = \\
&= [R_x, L_y]R_z + [R_x, L_z]R_y + L_y(R_x \circ R_z) + L_z(R_x \circ R_y) = \\
&= -L_xL_yR_z - L_xL_zR_y = -L_x(\mathrm{s}(L_yR_z)).
\end{aligned}
$$

Применяя (8) и (10), имеем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{s}(L_xR_y)L_z &= L_xR_yL_z + L_yR_xL_z = \\
&= (R_yL_x - [R_y, L_x])L_z + L_y(L_zR_x + [R_x, L_z]) = \\
&= (R_yL_x + L_yL_x)L_z + L_y(L_zR_x - L_xL_z) = \\
&= R_yL_xL_z + L_yL_zR_x = -R_y[R_x, L_z] - [R_y, L_z]R_x = \\
&= R_y([L_z, R_x] - L_zR_x) + L_zR_yR_x = -R_yR_xL_z + L_zR_yR_x = -[R_yR_x, L_z] = 0.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *В алгебре $\mathcal{A}^*$ для любого натурального n выполнено соотношение*

$$
RL^n = (-1)^{\delta(n)}L^{n-1}(LR - \mathrm{s}(LR)) - \delta(n)L^{n+1}, \tag{13}
$$

где

$$
\delta(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ 1, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}
$$

Доказательство. Проведём индукцию по n. В силу (6) и (8) имеем

$$
RL = -LR + \mathrm{s}(LR) + [R, L] = -LR + \mathrm{s}(LR) - L^2,
$$

что и доказывает справедливость (13) при $n = 1$. Используя индуктивное предположение

$$
RL^{n-1} = (-1)^{\delta(n-1)}L^{n-2}(LR - \mathrm{s}(LR)) - \delta(n-1)L^n,
$$

с учётом (12) получаем

$$
\begin{aligned}
RL^n &= (-1)^{\delta(n-1)}L^{n-2}(LR - \mathrm{s}(LR))L - \delta(n-1)L^{n+1} = \\
&= (-1)^{\delta(n-1)}L^{n-1}RL - \delta(n-1)L^{n+1} = \\
&= (-1)^{\delta(n)}L^{n-1}(LR - \mathrm{s}(LR) + L^2) - \delta(n-1)L^{n+1} = \\
&= (-1)^{\delta(n)}L^{n-1}(LR - \mathrm{s}(LR)) + ((-1)^{\delta(n)} - \delta(n-1))L^{n+1} = \\
&= (-1)^{\delta(n)}L^{n-1}(LR - \mathrm{s}(LR)) - \delta(n)L^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. □

Следствие. *В алгебре $\mathcal{A}^*$ для любого целого неотрицательного n справедливо соотношение*

$$RL^{2n}(L \circ L) = -L^{2n+1}(\mathrm{s}(LR)). \tag{14}$$

Доказательство. Применяя (13), получаем

$$RL^{2n}(L \circ L) = L^{2n+1}(\mathrm{s}(LR - \mathrm{s}(LR))) = -L^{2n+1}(\mathrm{s}(LR)).$$

Следствие доказано. □

Лемма 3. *Алгебра $\mathcal{A}^*$ обладает следующими свойствами*:

1) $\mathcal{A}^* = \mathrm{Esp}\langle L^l R^r \rangle$,
2) $\mathcal{I} = \mathrm{Esp}\langle L^l R^{r+2} \rangle$ *является идеалом в* $\mathcal{A}^*$,
3) $\mathcal{J} = \mathrm{Esp}\langle L^l(\mathrm{s}(LR))R^r \rangle$ *является идеалом в* $\mathcal{A}^*$,

где $\mathrm{Esp}\langle V \rangle$ — *векторное пространство над* $\mathcal{F}$, *порождённое множеством* V, *и* $l, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть Φ — произвольный оператор из $\mathcal{A}^*$.

Докажем первое свойство. С учётом (10) можем считать, что Φ имеет вид

$$\Phi = L^{l_1} R L^{l_2} R \ldots R L^{l_k} R^r.$$

Тогда, применяя (13), легко представить Φ как линейную комбинацию операторов вида $L^l R^r$.

Убедимся в справедливости второго свойства. Пусть $\Phi \in \mathcal{I}$. На основании (13) имеем $R\Phi \in \mathcal{I}$. Покажем, что $\Phi L \in \mathcal{I}$. Для этого достаточно проверить, что $R^n L \in \mathcal{I}$ для любого $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$. В силу (10) имеем $R^{2k} L \in \mathcal{I}$, где $k \in \mathbb{N}$, откуда, применяя (13), получаем

$$R^{2k+1} L = R^{2k}(-LR + \mathrm{s}(LR) - L^2) \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}}.$$

Докажем третье свойство. Пусть $\Phi \in \mathcal{J}$. Покажем, что $\Phi L = 0$. Для этого достаточно проверить, что $\mathrm{s}(LR)R^n L = 0$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. На основании (10) и (12) имеем $\mathrm{s}(LR)R^{2k}L = 0$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, откуда, используя (13), получаем

$$\mathrm{s}(LR)R^{2k+1}L = \mathrm{s}(LR)R^{2k}(-LR + \mathrm{s}(LR) - L^2) = 0.$$

Покажем, что $R\Phi \in \mathcal{J}$. Для этого достаточно проверить, что $RL^n(\mathrm{s}(LR)) \in \mathcal{J}$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. На основании (11) имеем $R(\mathrm{s}(LR)) \in \mathcal{J}$, откуда, применяя (13), получаем

$$RL^n(\mathrm{s}(LR)) = ((-1)^{\delta(n)} L^{n-1}(LR - \mathrm{s}(LR)) - \delta(n)L^{n+1})(\mathrm{s}(LR)) \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *В алгебре $\mathcal{A}^*$ для любого натурального n справедливо сравнение*

$$H^{2n} \equiv 2^n L^{2n} \pmod{\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}}, \quad \text{где} \quad H = L - R.$$

Доказательство. Применяя (13), имеем

$$H^2 = (L - R)^2 = L^2 - LR - RL + R^2 =$$
$$= L^2 - LR + LR - \mathrm{s}(LR) + L^2 + R^2 = 2L^2 - \mathrm{s}(LR) + R^2 \equiv 2L^2 \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}).$$

Тогда

$$H^{2n} = (H^2)^n \equiv 2^n L^{2n} \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}).$$

Лемма доказана. □

2. Доказательство теоремы

В этом разделе мы полагаем, что в свободной алгебре $\mathcal{A}$ выполнено тождество (1).

Лемма 5. *В алгебре* $\mathcal{A}^*$ *справедливы следующие сравнения*:

$$L^{2k}(L \circ L) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}), \tag{15}$$
$$L^{2k}[R, L^2] \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I}), \tag{16}$$

где $k = \left[\frac{N}{2}\right]$.

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько пунктов.

1°. В алгебре $\mathcal{A}^*$ выполнено соотношение

$$H_{y_1} H_{y_2} \ldots H_{y_{2k-2}} (H_{y_{2k-1}} \circ H_{y_{2k}}) =$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{A}_{2k}} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^{(\sigma)} H_{y_{1\sigma}} \ldots H_{y_{(2i-1)\sigma}} (H_{y_{(2i)\sigma}} \circ H_{y_{(2i+1)\sigma}}) H_{y_{(2i+2)\sigma}} \ldots H_{y_{(2k)\sigma}},$$

где $k = \left[\frac{N}{2}\right]$ и $\beta_i^{(\sigma)} \in \mathcal{F}$.

Пусть $w \in \mathcal{A}^2$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $N = 2k$. Тогда положим в (1)

$$x_1 = y_{2k},\ x_2 = y_{2k-1}, \ldots,\ x_{N-1} = y_2,\ x_N = [y_1, w].$$

Случай 2: $N = 2k + 1$. Тогда положим в (1)

$$x_1 = y_{2k},\ x_2 = y_{2k-1}, \ldots,\ x_{N-1} = y_1,\ x_N = w.$$

2°. Применяя лемму 4 к пункту 1°, имеем

$$L_{y_1} L_{y_2} \ldots L_{y_{2k-2}} (L_{y_{2k-1}} \circ L_{y_{2k}}) \equiv$$
$$\equiv \sum_{\sigma \in \mathrm{A}_{2k}} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^{(\sigma)} L_{y_{1\sigma}} \ldots L_{y_{(2i-1)\sigma}} (L_{y_{(2i)\sigma}} \circ L_{y_{(2i+1)\sigma}}) L_{y_{(2i+2)\sigma}} \ldots L_{y_{(2k)\sigma}} \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}). \tag{17}$$

3°. Домножая обе части сравнения (17) на RL слева и учитывая (14), получаем

$$RL^{2k-1}(L \circ L) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}).$$

4°. Применяя (8) и (14), с учётом пункта 3° доказываем (15):

$$L^{2k}(L\circ L) = -[R,L]L^{2k-2}(L\circ L) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{I}\oplus\mathcal{J}).$$

5°. Как было установлено при доказательстве третьего свойства в лемме 3,

$$\mathrm{s}(LR)R^nL = 0 \text{ для любого } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

6°. Используя (9) и (15), с учётом пункта 5° доказываем (16):

$$L^{2k}[R,L^2] = -L^{2k}(L\circ L)L \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{I}).$$

Лемма доказана. □

По первому свойству из леммы 3 каждый одночлен u, степень которого не ниже второй, в алгебре $\mathcal{A}$ может быть представлен в виде

$$u = (x_{t_1}x_{t_2})L_{x_{i_1}}\ldots L_{x_{i_l}}R_{x_{j_1}}\ldots R_{x_{j_r}}, \tag{18}$$

где, учитывая (7), можем считать $j_1 < \ldots < j_r$. Отсюда на основании (15) получаем

$$\mathcal{A} = \mathrm{Esp}\langle X\cup\Lambda\rangle,$$

где Λ — множество одночленов u вида (18), причём $l\leqslant 2k+1$ или $i_{2k+1}<\ldots<i_l$.

Весом одночлена $u\in\Lambda$, представленного в виде (18), назовём вектор

$$\mathrm{wt}(u) = \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_1(n),\, \phi(l),\, t_1,\, t_2,\, i_1,\ldots,i_{\phi(l)},\, \alpha\Bigr),$$

где

$$\phi(l) = \begin{cases} l, & \text{если } l\leqslant 2k,\\ 2k, & \text{если } l>2k\end{cases}$$

и α — последовательность $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{Z}_2^2$, определённая следующим образом:

$$\alpha(n) = (\alpha_1(n),\alpha_2(n)),\quad n\in\mathbb{N}:$$

$$\alpha_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } l\leqslant 2k,\\ \begin{cases} 1 & \text{при } n\in\{i_{2k+1},\ldots,i_l\},\\ 0 & \text{при } n\notin\{i_{2k+1},\ldots,i_l\},\end{cases} & \text{если } l>2k,\end{cases}$$

$$\alpha_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n\in\{j_1,\ldots,j_r\},\\ 0 & \text{при } n\notin\{j_1,\ldots,j_r\}.\end{cases}$$

Обозначим через W множество весов всех одночленов множества Λ. Определим на W порядок $\leqslant$ следующим образом. Рассмотрим множество Δ последовательностей $\alpha\colon\mathbb{N}\mapsto\mathbb{Z}_2^2$, содержащих конечное число ненулевых векторов

$$\alpha(n) = (\alpha_1(n),\alpha_2(n)).$$

Будем считать, что на множестве $\mathbb{Z}_2^2$ задан лексикографический порядок $\leqslant$. Пусть α и β — произвольные последовательности из множества Δ. Положим

$\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha = \beta$ или существует такое число $i \in \mathbb{N}$, что $\alpha(i) < \beta(i)$ и $\alpha(j) = \beta(j)$ для всех $j > i$. Ясно, что Δ является вполне упорядоченным в порядке $\leqslant$. Рассмотрим на W лексикографический порядок, индуцированный естественным порядком на $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и уже определённым порядком $\leqslant$ на Δ. Обозначим его также $\leqslant$. Легко понять, что W является вполне упорядоченным в порядке $\leqslant$.

Введём на W вполне частичный порядок $\ll$ следующим образом. Для произвольных последовательностей $\alpha, \beta \in \Delta$ положим $\alpha \ll \beta$, если $\alpha(n) \leqslant \beta(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Можно доказать (см. [1]), что $\ll$ — вполне частичный порядок на Δ. Пусть

$$\mathrm{wt}(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1(n),\, \phi(l),\, t_1,\, t_2,\, i_1, \ldots, i_{\phi(l)},\, \alpha \right),$$
$$\mathrm{wt}(u') = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_1(n),\, \phi(l'),\, t'_1,\, t'_2,\, i'_1, \ldots, i'_{\phi(l')},\, \alpha' \right).$$

Положим $\mathrm{wt}(u) \ll \mathrm{wt}(u')$, если $\phi(l) = \phi(l')$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha'_1(n) - \alpha_1(n))$ — чётное число и существует сохраняющее естественный порядок инъективное отображение $\xi\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, такое что

$$t_1\xi = t'_1,\ t_2\xi = t'_2,\ i_1\xi = i'_1, \ldots,\ i_{\phi(l)}\xi = i'_{\phi(l')}, \quad \alpha(n) \ll \alpha'(n\xi)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Следуя Хигману [1,12], можем считать, что $\ll$ — вполне частичный порядок на W.

Докажем, что каждый T-идеал свободной алгебры $\mathcal{A}$ конечно порождён. Пусть $\mathcal{T}$ — произвольный T-идеал в $\mathcal{A}$ и f — произвольный многочлен из $\mathcal{T}$. Через $\bar{f}$ обозначим такой одночлен в f, что $\mathrm{wt}(u) \leqslant \mathrm{wt}(\bar{f})$ для всех одночленов u в f. Рассмотрим множество $\bar{\mathcal{T}}$ всех одночленов $\bar{f}$, таких что $f \in \mathcal{T}$. Пусть $\mathrm{wt}(\bar{\mathcal{T}})$ — множество весов одночленов из $\bar{\mathcal{T}}$. В силу того что $\mathrm{wt}(\bar{\mathcal{T}})$ является подмножеством во вполне частично упорядоченном множестве W, существует конечная система

$$\bar{F} = \{\mathrm{wt}(\bar{f}_1), \mathrm{wt}(\bar{f}_2), \ldots, \mathrm{wt}(\bar{f}_n)\},$$

обладающая следующим свойством: для любого $\bar{g} \in \bar{\mathcal{T}}$ существует такой индекс $i \in [1, n]$, что $\mathrm{wt}(\bar{f}_i) \ll \mathrm{wt}(\bar{g})$. Поставим в соответствие системе $\bar{F}$ конечное множество многочленов

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{T}.$$

Докажем, что F является системой порождающих T-идеала $\mathcal{T}$. Пусть g — произвольный многочлен из $\mathcal{T}$. Достаточно показать, что g лежит в T-идеале $\mathcal{T}_F$, порождённом системой F.

Система F, по построению, содержит такой многочлен f, что $\mathrm{wt}(\bar{f}) \ll \mathrm{wt}(\bar{g})$. Рассмотрим инъективное отображение $\xi\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, соответствующее указанному отношению порядка $\ll$. Построим гомоморфизм $\hat{\xi}\colon \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$, индуцированный отображением $\hat{\xi}\colon X \mapsto X$, при котором $\hat{\xi}(x_i) = x_{i\xi}$. Легко понять, что для любых одночленов u и u', таких что $\mathrm{wt}(u) \leqslant \mathrm{wt}(u')$, имеем $\mathrm{wt}(u\hat{\xi}) \leqslant \mathrm{wt}(u'\hat{\xi})$. Поэтому справедливо равенство $\overline{f\hat{\xi}} = \bar{f}\hat{\xi}$. Пусть

$$\mathrm{wt}(\bar{f}\hat{\xi}) = \biggl(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1(n),\, \phi(l),\, t_1,\, t_2,\, i_1, \ldots, i_{\phi(l)},\, \alpha\biggr),$$
$$\mathrm{wt}(\bar{g}) = \biggl(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1'(n),\, \phi(l'),\, t_1',\, t_2',\, i_1', \ldots, i_{\phi(l')}',\, \alpha'\biggr).$$

Рассмотрим многочлен

$$f' = f\hat{\xi} \prod_{n=1}^{\infty} L_{x_n}^{\alpha_1'(n)-\alpha_1(n)} \prod_{n=1}^{\infty} R_{x_n}^{\alpha_2'(n)-\alpha_2(n)}.$$

Используя соотношения (7), (10) и сравнения (15), (16), представим f' в виде линейной комбинации одночленов множества Λ. Тогда по определению порядков $\leqslant$ и $\ll$ на W будет выполнено равенство $\bar{f}' = \bar{g}$. Следовательно, найдётся такой элемент $\gamma \in \mathcal{F}$, что

$$g - \gamma f' \equiv g \pmod{\mathcal{T}_F}, \quad \mathrm{wt}(\overline{g - \gamma f'}) < \mathrm{wt}(\bar{g}),$$

откуда в силу вполне упорядоченности множества $\mathrm{wt}(\bar{\mathcal{T}})$ стандартным образом следует, что $g \in \mathcal{T}_F$. Теорема доказана. $\square$

3. Следствия теоремы

Доказательство следствия 1. Достаточно проверить, что в алгебре $\mathcal{A}$ справедливо тождество

$$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] + [x_2,x_1,x_3,x_4,x_5] = ([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] + [x_1,x_3,x_2,x_4,x_5]) + {}$$
$${} + ([x_2,x_3,x_1,x_4,x_5] + [x_2,x_1,x_3,x_4,x_5]) - ([x_3,x_1,x_2,x_4,x_5] + [x_3,x_2,x_1,x_4,x_5]).$$

Запишем его в виде

$$\mathrm{J}(x_1,x_3,[x_2,x_4,x_5]) + \mathrm{J}(x_2,x_3,[x_1,x_4,x_5]) = 0,$$

где $\mathrm{J}(x,y,z) = [x,y,z] + [y,z,x] + [z,x,y]$ — якобиан от элементов x, y, z. Тогда легко видеть, что указанное тождество выполнено как линеаризация тождества

$$\mathrm{J}(y,z,[y,z]) = 0.$$

Следствие доказано. $\square$

Доказательство следствия 2. Если алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ не нильпотентна, то можем считать, что в (2) $\alpha \neq 0$, $(n-1)\sigma = n-1$ и $n\sigma = n$. Тогда нетрудно понять, что существуют такие $k, l, m \in \mathbb{N}$, что в алгебре $\mathcal{A}$ выполнено тождество

$$[x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{l-1},x_l] = \alpha^m[x_{1\varphi},x_{2\varphi},\ldots,x_{k\varphi},x_{k+1},\ldots,x_{l-1},x_l], \tag{19}$$

где φ — такая подстановка степени $k \leqslant l-2$, что $(2i)\varphi = 1$ для некоторого $i \in \left[1, \left[\frac{k}{2}\right]\right]$.

Поясним это на примере. Пусть тождество (2) имеет вид

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8] = \alpha[x_3, x_4, x_1, x_2, x_6, x_5, x_7, x_8].$$

Тогда, последовательно применяя его, получаем

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}] = \alpha[x_3, x_4, x_1, x_2, x_6, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}] = \\ = \alpha^2[x_3, x_4, x_6, x_5, x_1, x_2, x_8, x_7, x_9, x_{10}] = \alpha^3[x_6, x_5, x_3, x_4, x_2, x_1, x_8, x_7, x_9, x_{10}],$$

что и требуется.

Далее, применяя (19), легко показать, что существуют такие $p, q \in \mathbb{N}$, что в алгебре $\mathcal{A}$ выполнено тождество

$$[y, y, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{q-1}, x_q] = \\ = \alpha^{2m}[x_{1\psi}, \ldots, x_{(2i-1)\psi}, y, y, x_{(2i)\psi}, \ldots, x_{p\psi}, x_{p+1}, \ldots, x_{q-1}, x_q], \quad (20)$$

где ψ — подстановка степени $p \leqslant q-2$.

Вернёмся к примеру, в котором тождество (19) имеет вид

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}] = \alpha^3[x_6, x_5, x_3, x_4, x_2, x_1, x_8, x_7, x_9, x_{10}].$$

Последовательно применяя его, получаем

$$[y, y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}] = \\ = \alpha^3[y, x_5, x_4, x_2, x_3, x_1, y, x_7, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}] = \\ = \alpha^6[y, x_5, x_4, x_2, x_3, x_1, x_{10}, x_9, x_6, x_8, x_7, y, x_{12}, x_{11}, x_{13}, x_{14}] = \\ = \alpha^9[x_1, x_3, x_4, x_2, x_5, y, x_9, x_{10}, x_6, x_8, x_7, y, x_{12}, x_{11}, x_{13}, x_{14}] = \\ = \alpha^6[x_1, x_3, x_4, x_2, x_5, y, y, x_7, x_6, x_8, x_{10}, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}],$$

что и требуется.

Линеаризуя (20), получаем тождество вида (1). □

Доказательство следствия 3. В силу следствия 2 достаточно проверить, что в алгебре $\mathcal{A}$ выполнено тождество вида (2). Пусть в (3) $\alpha_{\mathrm{id}} \neq 0$, где id — тождественная подстановка степени n. Тогда, полагая в (3) $x_n = [y, z]$, имеем

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y, z] = \frac{\alpha_\sigma}{\alpha_{\mathrm{id}}}[x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1, y, z],$$

где $\sigma = (1\,2 \ldots n)$. □

В заключение покажем, что ограничение на характеристику поля $\mathcal{F}$ в формулировке теоремы является существенным. Для этого достаточно проверить, что во всякой правоальтернативной метабелевой алгебре над полем характеристики 2 выполнено тождество

$$[x, x, y, z] = 0.$$

Действительно, полагая $w = [y, z]$, имеем

$$[x, x, w] = x[x, w] + [x, w]x = \\ = x(xw) + x(wx) + (xw)x + (wx)x = (x, x, w) + (x, w, x) + (w, x, x) = 0.$$

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Белкин В. П. О многообразиях правоальтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 491—508.

[3] Дренски В. С. О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 3. — С. 265—290.

[4] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[5] Исаев И. М. Конечномерные правоальтернативные алгебры, порождающие не конечнобазируемые многообразия // Алгебра и логика. — 1986. — Т. 25, № 2. — С. 136—153.

[6] Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 597—641.

[7] Медведев Ю. А. Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 6. — С. 705—726.

[8] Медведев Ю. А. Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющего конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 3. — С. 300—313.

[9] Пчелинцев С. В. Об одном почти шпехтовом многообразии центрально-метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 6. — С. 127—144.

[10] Умирбаев У. У. О метабелевых бинарно-лиевых алгебрах // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 2. — С. 220—227.

[11] Умирбаев У. У. Шпехтовость многообразия разрешимых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 2. — С. 226—239.

[12] Higman G. Ordering by divisibility in abstract algebras // Proc. London Math. Soc. — 1952. — Vol. 2. — P. 326—336.

[13] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — Vol. 52. — P. 557—589.

[14] Vaughan-Lee M. R. Some varieties of Lie algebras. — Ph.D. Thesis. — Oxford, 1968.

[15] Vaughan-Lee M. R. Varieties of Lie algebras // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1970. — Vol. 21, no. 83. — P. 297—308.