Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств

В. Н. ЛАТЫШЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.554

Ключевые слова: Т-идеал, базис Грёбнера—Ширшова, проблема Шпехта, комбинаторные порождающие полилинейных тождеств.

Аннотация

В работе определяется базис Грёбнера—Ширшова (комбинаторная система порождающих) для множества полилинейных элементов Т-идеала свободной ассоциативной алгебры и формулируется комбинаторная версия известной проблемы Шпехта о конечной базируемости полиномиальных тождеств ассоциативной алгебры. Доказывается «комбинаторная шпехтовость» полилинейного произведения коммутаторов второй степени и полилинейного коммутатора третьей степени.

Abstract

V. N. Latyshev, Combinatorial generators of the multilinear polynomial identities, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 101—110.

A Gröbner—Shirshov basis (a combinatorial system of generators) is defined in the set of multilinear elements of a T-ideal of the free associative algebra with a countable set of indeterminates. A combinatorial version of the well-known Specht problem about the finite basedness of polynomial identities of an arbitrary associative algebra is formulated. A “combinatorial Spechtness” property of the multilinear product of commutators of degree 2 and the same property for the three-linear commutator are established.

Работа инспирирована известной проблемой Шпехта [8] о конечной порождаемости полиномиальных тождеств ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики. Положительное решение этой проблемы было дано А. Р. Кемером в 1986 г. [1] (см. также [2]). Над полями положительной характеристики проблема имеет отрицательное решение, и на этот счёт известно несколько примеров, принадлежащих различным авторам и основанных на различных идеях (см. [6]). Все полиномиальные тождества ассоциативной алгебры A над некоторым полем k образуют вполне характеристический идеал $T(A)$, коротко Т-идеал (total characteristic ideal), в свободной ассоциативной алгебре $k\langle X\rangle$ над полем k от счётного множества переменных $X=\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$. Обратно, всякий Т-идеал $T\lhd k\langle X\rangle$ является идеалом тождеств фактор-алгебры $k\langle X\rangle/T$. Упомянутый результат А. Р. Кемера означает, что если k — поле нулевой характеристики, то всякий Т-идеал в $k\langle X\rangle$ конечно порождён как вполне характеристический идеал.

Напротив, над полем k положительной характеристики Т-идеал алгебры $k\langle X\rangle$ может не иметь конечного числа порождающих.

Случай нулевой характеристики поля k в первую очередь отличается тем, что все Т-идеалы свободной алгебры $k\langle X\rangle$ порождаются их полилинейными элементами, т. е. элементами, линейными по каждой переменной, входящей в их запись. Из результата А. Р. Кемера следует, что в нулевой характеристике все полилинейные элементы Т-идеала T из $k\langle X\rangle$ порождаются их конечным числом, т. е. они лежат в Т-идеале, порождённом конечным числом полилинейных элементов из T. Справедливость соответствующего утверждения для полей положительной характеристики к настоящему времени является открытым вопросом (см., например, [6, с. 356, проблема 7]).

В нашей работе мы исследуем порождаемость полилинейных элементов Т-идеалов свободной ассоциативной алгебры. Мы усиливаем само понятие «порождения» в системе полилинейных элементов Т-идеала и вводим систему «комбинаторных» порождающих, аналогичную понятию стандартного базиса идеала свободной ассоциативной алгебры. Вопрос о наличии конечной системы комбинаторных порождающих в множестве полилинейных элементов Т-идеала не решён даже для полей нулевой характеристики. Таким образом, нами предложена новая более «жёсткая» версия проблемы Шпехта. Заметим, что комбинаторная система порождающих полилинейных элементов Т-идеала T в случае полей нулевой характеристики порождает T как вполне характеристический идеал. В заключение мы доказываем, что если Т-идеал содержит полилинейный коммутатор третьей степени или полилинейное произведение коммутаторов второй степени, то его полилинейные элементы обладают конечной системой комбинаторных порождающих. Коммутатор третьей степени является тождеством алгебры Грассмана, а некоторое произведение коммутаторов второй степени — тождеством любой конечно порождённой алгебры, в которой выполняется нематричное тождество, т. е. тождество, не выполняющееся в алгебре матриц порядка 2.

1. Метод частично упорядоченных множеств

В этом разделе для удобства читателя мы излагаем основные определения и утверждения о частично упорядоченных множествах, которые используются при построении порождающих Т-идеалов.

Упорядоченное множество P с упорядоченностью $\leqslant$ называется *вполне упорядоченным*, если любое подмножество в P обладает минимальным элементом. Множество P является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию минимальности, т. е. когда не существует бесконечных строго убывающих последовательностей элементов из P. Бесконечная последовательность различных элементов вполне упорядоченного множества P содержит строго возрастающую подпоследовательность. «Модельным» примером вполне упорядоченного множества является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с естественной упорядоченностью.

Частично упорядоченное множество P называется *вполне частично упорядоченным*, если любое его непустое подмножество содержит конечное ненулевое число минимальных элементов. Частично упорядоченное множество P является вполне частично упорядоченным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию минимальности и в нём нет бесконечных антицепей. Всякая бесконечная последовательность различных элементов вполне частично упорядоченного множества содержит бесконечную строго возрастающую подпоследовательность.

Будем говорить, что частично упорядоченное множество P удовлетворяет *условию Хигмана*, если для любой бесконечной последовательности его элементов $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ найдётся такая пара индексов $i < j$, что $a_i \leqslant a_j$.

Предложение 1.1. *Частично упорядоченное множество является вполне частично упорядоченным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию Хигмана.* □

Следствие 1.2. *Если $P_1, \ldots, P_m$ — вполне частично упорядоченные множества, $P = P_1 \times \ldots \times P_m$ — их декартово произведение с покомпонентной частичной упорядоченностью*

$$(a_1, \ldots, a_m) \leqslant (b_1, \ldots, b_m) \iff a_i \leqslant b_i,$$

$i = 1, \ldots, m$, $a_i, b_i \in P_i$, *то P является вполне частично упорядоченным.* □

Модельный пример вполне частично упорядоченного множества — решётка $\mathbb{N}^{(n)} = \underbrace{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{n}$ с покомпонентной упорядоченностью.

Пусть P — частично упорядоченное множество, P^* — множество слов от элементов P с *упорядоченностью типа делимости*: $u = a_1 \ldots a_s \leqslant v = b_1 \ldots b_t$, если $s \leqslant t$ и возможно представление вида $v = b_1 \ldots b_{r_1} \ldots b_{r_s} \ldots b_t$, где $a_i \leqslant b_{r_i}$, $i = 1, \ldots, s$.

Теорема 1.3 (Хигман, [5]). *Если P — вполне частично упорядоченное множество, то P^* также вполне частично упорядоченное множество.* □

Для дальнейшего интересен случай, когда P — конечный алфавит с упорядочением, являющимся равенством. Тогда P — конечная антицепь. В этом случае отношение типа делимости на P^* формулируется следующим образом: $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда слово u, рассматриваемое как конечная последовательность букв из P, является подпоследовательностью в слове v. Теорема 1.3 превращается в силу предложения 1.1 в следующее утверждение.

Следствие 1.4. *Пусть $u_1, \ldots, u_m, \ldots$ — бесконечная последовательность слов в конечном алфавите P. Тогда существует такая пара индексов $i < j$, что слово u_i содержится в слове u_j в качестве подпоследовательности.* □

Заметим, что двумерный аналог следствия 1.4 неверен. Можно указать бесконечную последовательность $(0,1)$-матриц, из которых ни одна не является подматрицей какой-либо из последующих матриц [4].

Доказательство конечной порождённости подобъекта алгебраического объекта с помощью теоремы 1.3 получило название *метода частично упорядоченных множеств*.

Продемонстрируем этот метод на примере классической алгебры. Обозначим через $k[x_1,\ldots,x_n]$ алгебру коммутативных многочленов над полем k от n переменных. На множестве всех коммутативных мономов, образующих свободных коммутативный моноид, порождённый переменными x_i, фиксируем любой допустимый порядок, т. е. порядок, согласованный с умножением в свободном моноиде и удовлетворяющий условию минимальности. В качестве такого порядка можно взять, например, лексикографический порядок. Из очевидных соображений в каждом полиномиальном идеале $I \lhd k[x_1,\ldots,x_n]$ можно выбрать систему порождающих полиномов, старшие мономы которых не делят друг друга. Такой системой порождающих заведомо является редуцированный базис Грёбнера—Ширшова идеала I. Полагая в теореме 1.3 $P=\mathbb{N}$, мы получим утверждение, известное в комбинаторике под названием леммы Диксона: множество коммутативных мономов, не делящихся друг на друга, конечно. Следовательно, выбранная система порождающих идеала I конечна. Тем самым доказана нётеровость алгебры полиномов.

Ниже аналогичная схема доказательства будет применена к некоторым Т-идеалам свободной ассоциативной алгебры (алгебры некоммутативных полиномов).

2. Комбинаторные порождающие полилинейных элементов Т-идеалов

Введём следующие обозначения. Как и прежде, $k\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра над полем k от счётного множества переменных $X = \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$. Элементы $k\langle X\rangle$ будем называть (некоммутативными) полиномами. Множество полилинейных полиномов Т-идеала $T \lhd k\langle X\rangle$ обозначается T_{mult}, а линейное пространство n-линейных полиномов Т-идеала T, зависящих от переменных $x_1,\ldots,x_n$, обозначается $T_{\mathrm{mult}(n)}$. Всякая система полиномов $F=\{f_1,\ldots,f_m,\ldots\}$ порождает в $k\langle X\rangle$ Т-идеал, обозначаемый F^T. Из результата А. Р. Кемера [1] следует, что в случае полей нулевой характеристики любой Т-идеал T порождается конечным числом элементов из пространств $T_{\mathrm{mult}(n)}$.

Наличие полилинейных полиномов в Т-идеале $T \lhd k\langle X\rangle$ не вызывает сомнений. В самом деле, пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in T$ и максимальная из степеней вхождения переменной x_1 в мономы из $\operatorname{supp} f$ равна m. Рассмотрим переменные $y_1,\ldots,y_m\in X$, не входящие в запись полинома f, и применим к f *процесс линеаризации по переменной* x_1:

$$L_1 f = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sum_{i_1,\ldots,i_{m-k} \in \overline{1,m}} f(y_{i_1} + \ldots + y_{i_{m-k}}, x_2, \ldots, x_n) = \\ = g(y_1, \ldots, y_m, x_2, \ldots, x_n) \in T.$$

Процесс линеаризации линеен, он «убивает» (аннулирует) мономы, у которых вхождений x_1 меньше m, и моном $u = u_1 x_1 u_2 x_1 \ldots u_m x_1 u_{m+1}$ степени m относительно x_1 он переводит в сумму

$$\sum_{\sigma \in S_m} u_1 y_{\sigma(1)} u_2 y_{\sigma(2)} \ldots u_m y_{\sigma(m)} u_{m+1}.$$

Таким образом, переменная x_1 не входит в запись g, полином g линеен по переменным $y_1, \ldots, y_m$ и $g(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n) = m! f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где f_1 — старшая компонента полинома f по переменной x_1. Над полем нулевой характеристики $f_1 \in \{g\}^T \subseteq T$, а потому $f - f_1 \in T$. Продолжая линеаризацию полинома g последовательно по переменным $x_2, \ldots, x_n$, мы получим полилинейный полином, лежащий в T. Заодно мы показали, что над полем нулевой характеристики Т-идеал порождается своими полилинейными элементами, более точно, элементами пространств $T_{\mathrm{mult}(n)}$.

Механизм порождения полилинейных тождеств рассмотрим более подробно. На свободном моноиде $\langle X \rangle$, состоящем из всех мономов, определим *степенно-лексикографический порядок* (deg-lex), удовлетворяющий условию минимальности: $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда либо u имеет меньшую степень, чем v, либо u меньше v в лексикографическом смысле. При этом переменные упорядочены по их индексам. Старший моном, входящий в запись полинома $f \in k\langle X \rangle$, будем обозначать $\bar{f} \in \langle X \rangle$. На множестве полилинейных мономов $\langle X \rangle_{\mathrm{mult}} \subset \langle X \rangle$ определим частичный порядок, называемый *накрытием*: $u \leqslant_0 v$ тогда и только тогда, когда $u = x_{i_1} \ldots x_{i_s}$, $v = \ldots x_{j_1} \ldots x_{j_s} \ldots$ и отображение $\varphi(x_{i_k}) = x_{j_k}$, $k = 1, \ldots, s$, является изотонным в смысле упорядочения переменных. Несложные рассмотрения показывают, что накрытие не удовлетворяет условию Хигмана, и потому множество полилинейных мономов с упорядоченностью $\leqslant_0$ не является вполне частично упорядоченным [4].

Определим три типа порождения в множестве полилинейных полиномов $k\langle X \rangle_{\mathrm{mult}}$.

2.1. Алгебраические порождающие полилинейных элементов Т-идеала

Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\} \subset k\langle X \rangle_{\mathrm{mult}}$ — система полилинейных полиномов, F^T — порождённый ими Т-идеал, F^T_{mult} — множество полилинейных элементов Т-идеала F^T. Элементы F^T_{mult} получаются из элементов F последовательным применением следующих простых правил.

1. Элементы F принадлежат F^T_{mult}.
2. Линейная комбинация элементов F^T_{mult} от одного набора переменных принадлежит F^T_{mult}.

3. Если $f \in F^T_{\text{mult}}$, а переменная x_i не входит в запись f, то $x_i f$, $f x_i$ принадлежат F^T_{mult}.
4. Если $f \in F^T_{\text{mult}}$, а переменная x_j не входит в запись f, то $f|_{x_i \mapsto x_i x_j}$, $f|_{x_i \mapsto x_j x_i}$ принадлежат F^T_{mult}.
5. В условиях 4 $f|_{x_i \mapsto x_j} \in F^T_{\text{mult}}$. Если мы считаем, что $1 \in k\langle X\rangle$, то $f|_{x_i \mapsto 1} \in F^T_{\text{mult}}$.

Если $T \lhd k\langle X\rangle$ — Т-идеал, то всякая система элементов из T_{mult}, порождающая всё множество T_{mult} с помощью правил 1—5, называется *алгебраической системой порождающих* T_{mult}. Другими словами, эта система элементов порождает Т-идеал, множество полилинейных элементов которого совпадает с T_{mult}. Мы уже отмечали, что над полем нулевой характеристики алгебраическая система порождающих T_{mult} является системой порождающих всего Т-идеала T. При этом из результата А. Р. Кемера [1] вытекает, что T_{mult} обладает конечной системой алгебраических порождающих. Справедливость аналогичного утверждения для полей положительной характеристики остаётся открытым вопросом.

2.2. Комбинаторные порождающие полилинейных элементов Т-идеала

Система полилинейных полиномов $F = \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}$, конечная или бесконечная, Т-идеала $T \lhd k\langle X\rangle$ называется *базисом Грёбнера—Ширшова* (или *комбинаторной системой порождающих*) в T_{mult}, если для всякого полинома $f \in T_{\text{mult}}$ его старший моном $\bar{f}$ относительно упорядоченности deg-lex накрывает старший моном $\bar{f}_i$ хотя бы одного полинома $f_i \in F$, $\bar{f}_i \leqslant_0 \bar{f}$.

В нулевой характеристике комбинаторную систему порождающих в T_{mult} следует называть базисом Грёбнера—Ширшова всего Т-идеала T. Такое определение полностью отвечает концепции базиса Грёбнера—Ширшова.

Комбинаторная система порождающих множества T_{mult} одновременно является и его алгебраической системой порождающих. Действительно, предположим, что существуют полиномы из T_{mult}, не принадлежащие Т-идеалу $\{F\}^T$. Тогда среди этих полиномов существует полином $f \in T_{\text{mult}} \setminus \{F\}^T$ с наименьшим старшим мономом $\bar{f}$ в смысле упорядоченности deg-lex. По условию существует такой полином $f_i \in F$, что $\bar{f}_i \leqslant_0 \bar{f}$. Это означает следующее. Если $\bar{f}_i = x_{r_1} \ldots x_{r_m}$, т. е. $f_i = f_i(x_{r_1}, \ldots, x_{r_m})$, то возможно представление вида $\bar{f} = u_1 x_{s_1} u_2 x_{s_2} \ldots u_m x_{s_m} u_{m+1}$, где отображение переменных $\varphi(x_{r_j}) = x_{s_j}$, $j = 1, \ldots, m$, является изотонным. Полиномы f и $g = \alpha\beta^{-1} u_1 f_i(x_{s_1} u_2, \ldots, x_{s_m} u_{m+1})$, где $\alpha \in k$ и $\beta \in k$ — старшие коэффициенты f и f_i соответственно, принадлежат T_{mult}, зависят от одинакового набора переменных и имеют одинаковые старшие члены, $g \in \{F\}^T$. Тогда $h = f - g \in T_{\text{mult}} \setminus \{F\}^T$ и $\bar{h} < \bar{f}$, противоречие.

Интересен вопрос о наличии в множестве полилинейных элементов всякого Т-идеала T конечной системы комбинаторных порождающих. Иными словами, не будет ли множество старших мономов $\{\bar{f} \mid f \in T_{\text{mult}}\}$ элементов из T_{mult}

обладать конечным числом минимальных элементов относительно частичной упорядоченности накрытия $\leqslant_0$. Ответ на этот вопрос неизвестен даже для полей нулевой характеристики.

2.3. Комбинаторно шпехтовы системы элементов свободной алгебры

Напомним, что в литературе по алгебрам с полиномиальными тождествами используются следующие понятия, введённые в [3].

Система полиномов $F \subseteq k\langle X\rangle$ свободной алгебры называется *шпехтовой*, если всякий T-идеал $T \lhd k\langle X\rangle$, содержащий F, обладает конечной системой порождающих как вполне характеристический идеал. Последовательность полиномов $g_1, \ldots, g_m, \ldots \in k\langle X\rangle$ называется *независимой по модулю* F (или просто *независимой*, когда $F = \varnothing$), если полином g_m ни для какого $m \in \mathbb{N}$ не принадлежит T-идеалу, порождённому полиномами F и предшествующими ему полиномами $g_1, \ldots, g_{m-1}$ (обозначение $g_m \notin \{F, g_1, \ldots, g_{m-1}\}^T$). В этих терминах результат Кемера [1] состоит в том, что над полем нулевой характеристики все системы полиномов шпехтовы и не существует бесконечных независимых последовательностей полиномов.

Мы определим комбинаторные аналоги этих понятий.

Система $F \subseteq k\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ полилинейных полиномов свободной ассоциативной алгебры называется *комбинаторно шпехтовой*, если всякий T-идеал $T \lhd k\langle X\rangle$, содержащий F, обладает конечной системой комбинаторных порождающих в множестве его полилинейных элементов T_{mult}.

Опишем наиболее характерное обстоятельство, при котором система полиномов $F \subseteq k\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ оказывается комбинаторно шпехтовой.

Конечный набор элементов $a_1, \ldots, a_m$ частично упорядоченного множества P назовём *ограничивающим снизу*, если всякое содержащее эти элементы подмножество в P обладает конечным множеством минимальных элементов. Это условие можно сформулировать в традиционных терминах. Со всяким элементом $a \in P$ частично упорядоченного множества P связывается его *ортант* $a^{\vee} = \{b \in P \mid b \geqslant a\}$. Система элементов a_i ограничивает снизу частично упорядоченное множество P тогда и только тогда, когда разность множеств $P \setminus \{a_1^{\vee} \cup \ldots \cup a_m^{\vee}\}$ является вполне частично упорядоченным множеством, т. е. она удовлетворяет условию Хигмана (см. раздел 1).

Предположим, что T-идеал F^T, порождённый системой полилинейных полиномов $F \subseteq k\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$, содержит конечное множество полилинейных полиномов $g_1, \ldots, g_m \in F^T_{\mathrm{mult}}$, множество старших мономов $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m$ которых в смысле порядка deg-lex ограничивает снизу множество всех полилинейных мономов $\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ относительно частичного упорядочения накрытия $\leqslant_0$. Тогда, из очевидных соображений, всякий T-идеал $T \subseteq k\langle X\rangle$, содержащий полиномы F, обладает конечным числом комбинаторных порождающих в множестве его полилинейных элементов T_{mult}, т. е. F — комбинаторно шпехтова система полиномов.

К настоящему времени неизвестно, существуют ли системы полилинейных полиномов, не являющихся комбинаторно шпехтовыми.

В заключение отметим, что в этом разделе изложена основная цель работы — формулировка комбинаторной версии проблемы Шпехта [8]. В следующем разделе мы приводим примеры двух Т-идеалов, для которых новая версия проблемы имеет положительное решение.

3. Стандартно шпехтовы полилинейные полиномы

В этом разделе мы доказываем комбинаторную шпехтовость двух полиномов, значение которой объяснено во введении.

Теорема 3.1 (см. [7]). *Полилинейное произведение коммутаторов второго порядка является комбинаторно шпехтовым полиномом.*

Доказательство. Рассматриваются полиномы вида

$$f(x_1, \ldots, x_{2k}) = [x_{j_1}, x_{i_1}] \ldots [x_{j_k}, x_{i_k}], \quad j_s > i_s,$$

со старшим мономом $u = x_{j_1}x_{i_1} \ldots x_{j_k}x_{i_k}$ и фиксированным набором переменных $x_1, \ldots, x_{2k}$. Всякий полилинейный моном $v \in \langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ от переменных $x_1, \ldots, x_{2k}$ единственным образом представляется в виде произведения $v = a_1b_1a_2b_2 \ldots a_mb_ma_{m+1}$, где a_s — возрастающая цепочка переменных (быть может, пустая или состоящая из одной буквы), b_t — «скачок», т. е. двубуквенное слово x_jx_i, $j > i$. Если слово v не накрывает ни одного из слов вида u, то $m \leqslant k - 1$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие слова v. Фиксируем «двусортный» алфавит $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{k-1}\}$ и припишем слову v шифр в виде слова в алфавите $\mathfrak{A}$, положив $\pi(v) = \pi(x_1)\pi(x_2) \ldots \pi(x_{2k})$, где

$$\pi(x_i) = \begin{cases} a_s, & \text{если } x_i \text{ входит в цепь с номером } s, \\ b_t, & \text{если } x_i \text{ входит в скачок с номером } t. \end{cases}$$

Заметим, что слово v однозначно определяется своим шифром $\pi(v)$.

Пусть $v_1, \ldots, v_n, \ldots$ — бесконечная последовательность слов рассматриваемого типа и $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_n), \ldots$ — последовательность их шифров. Из рассмотрений раздела 1 следует, что существует такая пара индексов $i < j$, что шифр $\pi(v_i)$ является подпоследовательностью в шифре $\pi(v_j)$. Но тогда, из очевидных соображений, имеет место неравенство $v_i \leqslant_0 v_j$. Таким образом, слова u ограничивают снизу множество всех полилинейных слов $\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ в смысле раздела 2. Тем самым доказана комбинаторная шпехтовость полинома f. ☐

Теорема 3.2. *Полилинейный коммутатор третьей степени является комбинаторно шпехтовым полиномом.*

Доказательство. В T-идеале, порождённом коммутатором третьей степени, лежат полилинейные полиномы $f_1 = [x_3, x_2, x_1]$ и $f_2 = [x_3, x_1, x_2]$ со старшими мономами соответственно $u_1 = x_3x_2x_1$ и $u_2 = x_3x_1x_2$. Мы пользуемся обозначениями $[a, b] = ab - ba$ и $[a, b, c] = [[a, b], c]$. Полилинейный моном $v \in \langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$, зависящий от переменных $x_1, \ldots, x_t$ и не накрывающий мономы u_1 и u_2, может быть построен применением следующих правил.

1. Рассматриваем слово $z = x_1 \ldots x_t$, являющееся возрастающей цепочкой переменных.
2. Разбиваем слово z на подслова следующим образом:
$$z = (w_1x_{i_1}w_2x_{j_1})(w_3x_{i_2}w_4x_{j_2})\ldots(w_{2s-1}x_{i_s}w_{2s}x_{j_s})w_{2s+1}.$$
Некоторые подслова w_p могут оказаться пустыми, и тогда им присваивается нулевая степень.
3. Полагаем
$$v = (w_1w_2x_{j_1}x_{i_1})(w_3w_4x_{j_2}x_{i_2})\ldots(w_{2s-1}w_{2s}x_{j_s}x_{i_s})w_{2s+1}.$$

Обозначим $m_p = \deg w_{2p-1}$, $n_p = \deg w_{2p}$ и присвоим слову v шифр $\pi(v) = (m_1, n_1)\ldots(m_s, n_s)(m_{s+1}, 0)$. Слово v однозначно определяется своим шифром.

Пары $d_p = (m_p, n_p)$ упорядочим покомпонентно:
$$(m_p, n_p) \leqslant (m_q, n_q) \iff m_p \leqslant n_p,\ m_q \leqslant n_q.$$
С этим упорядочением пары $d_p \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ образуют вполне частично упорядоченное множество. На шифрах $\pi(v) = d_1 \ldots d_sd_{s+1}$ определим частичный порядок типа делимости (см. раздел 1). Бесконечной последовательности $v_1, \ldots, v_n, \ldots$ слов рассматриваемого типа поставим в соответствие последовательность их шифров $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_n), \ldots$. По теореме 1.3 существует такая пара индексов $i < j$, что $\pi(v_i) \leqslant \pi(v_j)$ в смысле частичной упорядоченности типа делимости. Тогда несложные рассмотрения показывают, что $v_i \leqslant_0 v_j$. Тем самым слова u_1 и u_2 ограничивают снизу множество всех полилинейных слов $\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ относительно частичного порядка $\leqslant_0$ (см. раздел 2). Следовательно, полилинейный коммутатор третьей степени является комбинаторно шпехтовым полиномом. □

Литература

[1] Кемер А. Р. Конечные базисы для тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26. — С. 597—641.

[2] Кемер А. Р. Идеалы тождеств ассоциативных алгебр. — Барнаул: Наука, 1988.

[3] Латышев В. Н. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1969. — Т. 8, № 6. — С. 660—673.

[4] Латышев В. Н. Частично упорядоченные множества и нематричные тождества ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 1. — С. 53—70.

[5] Higman G. Ordering by divisibility in abstract algebras // Proc. London Math. Soc. — 1952. — Vol. 2. — P. 326—336.

[6] Kanel-Belov A., Rowen L. H. Computational Aspects of Polynomial Identities. — Wellesleg, 2004. — (Research Notes in Math.; Vol. 9).

[7] Latyshev V. N. A general version of standard basis and its application to T-ideals // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 85. — P. 219—221.

[8] Specht W. Gesetze in Ringen. I // Math. Z. — 1950. — Vol. 52. — P. 557—589.