О Σ-нильпотентных идеалах топологического PI-кольца

В. Т. МАРКОВ, В. В. ТЕНЗИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.556

Ключевые слова: топологическое кольцо, размерность Крулля, радикал Бэра, Σ-нильпотентный идеал.

Аннотация

Показано, что при определённых условиях на топологию топологически точного модуля M над топологическим PI-кольцом R, если M имеет не более чем счётную дуальную топологическую размерность Крулля, то замыкание суммы всех Σ-нильпотентных идеалов кольца R является также Σ-нильпотентным идеалом, а в случае ограниченности кольца R его топологический радикал Бэра Σ-нильпотентен.

Abstract

V. T. Markov, V. V. Tenzina, On Σ-nilpotent ideals of topological PI-rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 111—118.

We show that under certain conditions on the topology of a faithful module M over a topological PI-ring R, if M has at most countable dual topological Krull dimension, then the closure of the sum of all Σ-nilpotent ideals of the ring R is a Σ-nilpotent ideal too, and in the case of a bounded ring R its topological Baer radical is Σ-nilpotent.

В данной работе доказываются следующая теорема и её следствия.

Теорема 1. *Пусть R — топологическое PI-кольцо, обладающее топологическим R-модулем M с не более чем счётной дуальной топологической размерностью Крулля. Пусть на топологию модуля M наложено дополнительное условие: для любых трёх замкнутых подмодулей A, B, C, таких что $A \supseteq B$, верно $A \cap [B + C] = [B + A \cap C]$. Тогда замыкание суммы всех Σ-нильпотентных относительно модуля M идеалов кольца R является также Σ-нильпотентным идеалом относительно этого модуля.*

Следствие 1. *Пусть топологическое PI-кольцо R обладает топологически точным модулем M с не более чем счётной дуальной топологической размерностью Крулля и для этого модуля выполняются следующие два условия*:

1) *если P — Σ-нильпотентный идеал кольца R, то для всякой окрестности нуля W в M найдётся натуральное число m, такое что $P^n M \subset W$*;

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 111—118.

2) *для любых трёх замкнутых подмодулей A, B, C, таких что $A \supseteq B$, верно* $A \cap [B+C] = [B + A \cap C]$.

Тогда замыкание суммы всех Σ-нильпотентных идеалов кольца R является также Σ-нильпотентным идеалом.

Следствие 2. *Пусть для ограниченного кольца R выполняются условия теоремы 1. Тогда топологический радикал Бэра этого кольца Σ-нильпотентен.*

История этого результата такова. На IV Всесоюзном симпозиуме по теории колец, алгебр и модулей И. В. Львовым был задан вопрос: верно ли, что радикал Бэра PI-кольца, имеющего точный нётеров модуль, нильпотентен? Вскоре В. Т. Марков дал на него утвердительный ответ [2]. Позже К. И. Бейдар спросил у В. Т. Маркова, не будет ли верно то же самое, если потребовать только наличия точного модуля с размерностью Крулля. Оказалось, что и этот вопрос имеет положительный ответ [3]. Об интересе к этому вопросу со стороны К. И. Бейдара говорит и его работа [1] (совместно с В. Т. Марковым), в которой исследовался не радикал Бэра, а строение полупервичных PI-колец, обладающих таким модулем. Это утверждение также использовалось в работе К. И. Бейдара, Э. Пучиловского и П. Ф. Смита [7]. Позднее были доказаны относительный вариант [6] и топологический вариант [4] утверждения о нильпотентности радикала Бэра.

Основные результаты настоящей работы обобщают соответствующие результаты из [4] с заменой условия конечности дуальной топологической размерности Крулля модуля M на условие, что эта размерность не более чем счётна. Определения и обозначения можно найти в [4]. Дуальную топологическую размерность Крулля мы также будем называть N-размерностью.

Лемма 1 ([4, лемма 7.1]). *Пусть M — R-модуль, имеющий топологическую размерность Крулля, а идеалы N и P таковы, что $[NM]_M = [PM]_M$. Пусть также существует полилинейный полином f с целыми коэффициентами, один из которых равен единице, такой что для любых элементов $a_1, \ldots, a_d$ из идеала N выполняется $f(a_1, \ldots, a_d)M = 0$. Тогда если идеал P является Σ-нильпотентным относительно M, то и N — Σ-нильпотентный идеал относительно M.*

Лемма 2. *Если линейно упорядоченное множество L имеет не более чем счётную кодевиацию, то в L существует кофинальная последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. для любого элемента x из L найдётся такое натуральное число i, что $a_i > x$.*

Доказательство. Сначала докажем, что существует такой элемент a из L, что
$$\operatorname{codev}[a, b] < \operatorname{codev}[a, \infty) \ \forall b > a. \qquad (1)$$
Предположим противное. Существует элемент x из L, такой что кодевиация множества $[x, \infty)$ минимальна, пусть $\alpha = \operatorname{codev}[x, \infty)$. Но тогда можно выбрать такую возрастающую последовательность $x = x_1 < x_2 < \ldots$ элементов из L, что для каждого натурального числа i справедливо $\operatorname{codev}[x_i, x_{i+1}] \geqslant \alpha$. Поэтому $\operatorname{codev}[x, \infty) > \alpha$. Получили противоречие.

Пусть для элемента $a \in L$ выполнено (1), и пусть $\alpha = \operatorname{codev}[a, \infty)$.

Предположим, что порядковое число α не предельное. Тогда существует порядковое число $\alpha - 1$. Докажем, что

$$\forall b > a\ \exists c > b\colon\ \operatorname{codev}[b, c] = \alpha - 1.$$

Предположим противное. Тогда для любой возрастающей последовательности $b = b_0 < b_1 < \ldots$ справедливо

$$\operatorname{codev}[b_{i-1}, b_i] \leqslant \operatorname{codev}[b, b_i] < \alpha - 1,$$

где $i \in \mathbb{N}$, и поэтому $\operatorname{codev}[b, \infty) \leqslant \alpha - 1$. Следовательно,

$$\operatorname{codev}[a, \infty) = \max\{\operatorname{codev}[a, b], \operatorname{codev}[b, \infty)\} < \alpha,$$

но это противоречит определению α.

Из доказанного выше следует, что существует такая возрастающая последовательность $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ элементов из L, что $\operatorname{codev}[a_{i-1}, a_i] = \alpha - 1$. Предположим, что существует элемент b из L, который больше любого элемента этой последовательности. Но тогда $\operatorname{codev}[a, b] = \alpha$, а это противоречит выбору a. Поэтому последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ кофинальна.

Предположим теперь, что α — предельное порядковое число. Докажем, что

$$\forall \beta < \alpha\ \exists b > a\colon\ \operatorname{codev}[a, b] \geqslant \beta.$$

Предположим противное, т. е.

$$\exists \beta < \alpha\ \forall b > a\colon\ \operatorname{codev}[a, b] < \beta.$$

Но в таком случае $\operatorname{codev}[a, \infty) \leqslant \beta < \alpha$.

Итак, существует отображение $f\colon [0, \alpha) \mapsto [a, \infty)$, такое что для каждого $\beta < \alpha$ выполняется $\operatorname{codev}[a, f(\beta)] \geqslant \beta$. Не теряя общности, можно считать, что отображение f монотонно возрастает. Так как множество $[0, \alpha)$ счётно, то все его элементы можно занумеровать, т. е. существует последовательность порядковых чисел $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$, меньших α, такая что для каждого порядкового числа β, меньшего α, найдётся такое натуральное число i, что $\beta = \gamma_i$. Для любого натурального числа n определим порядковое число α_n как $\alpha_n = \max\limits_{i \leqslant n} \gamma_i$. Тогда последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ кофинальна в упорядоченном множестве $[0, \alpha)$.

Для всякого натурального числа i положим $a_i = f(\alpha_i)$, и пусть $a_0 = a$. Докажем, что последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ кофинальна в L. Пусть $x \in L$. Можно сразу считать, что $x > a = a_0$. Пусть $\beta_0 = \operatorname{codev}[a, b]$. Тогда по определению отображения f получаем, что $\operatorname{codev}[a, f(\beta_0 + 1)] \geqslant \beta_0 + 1$. Следовательно, $f(\beta_0 + 1) > x$. Благодаря тому что последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ кофинальна в $[0, \alpha)$, найдётся натуральное число i, такое что $\beta_0 + 1 < \alpha_i$. Таким образом, $x < f(\beta_0 + 1) < f(\alpha_i) = a_i$. □

Доказательство теоремы. Так как R является PI-кольцом, то существует полилинейный полином $f(x_1, \ldots, x_d)$ с целыми коэффициентами, такой что $f(a_1, \ldots, a_d)M = 0$ для всех $a_1, \ldots, a_d \in R$ и хотя бы при одном одночлене коэффициент равен единице.

Будем доказывать теорему индукцией по d. Если $d = 1$, то $R = 0$ и доказывать нечего. Для $d > 1$ проведём доказательство индукцией по $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim M$. При $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim M = -1$ доказывать также нечего. Пусть $\alpha = \operatorname{top}\mathrm{N}\dim M$. Предположим, что для любого топологического модуля M', такого что $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim M' < \alpha$, теорема верна.

Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество по включению, элементами которого являются все Σ-нильпотентные относительно M идеалы P, такие что множество $\{r \in R : rM \subset [PM]_M\}$ совпадает с P. По лемме 1 для любого Σ-нильпотентного относительно M идеала I существует идеал $P \in \mathcal{P}$, содержащий I. Заметим, что множество $\mathcal{P}$ можно биективно монотонно отобразить на некоторое множество замкнутых подмодулей модуля M, поставив в соответствие каждому идеалу P из $\mathcal{P}$ замкнутый подмодуль $[PM]$. Так как $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim M = \alpha$, то $\operatorname{codev}\mathcal{P} \leqslant \alpha$.

Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ — возрастающая последовательность Σ-нильпотентных идеалов относительно M. Докажем, что тогда идеал $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ также будет Σ-нильпотентным относительно M. Будем доказывать от противного. Предположим, что идеал A не является Σ-нильпотентным относительно M.

Обозначим $M_i = [A^i M]_M$, $B_j = [A_j M]_M$. Предположим, что топологический фактор-модуль $\bar{M} = M_i/(M_i \cap B_j)$ является ненулевым. Из топологического аналога леммы Ленагана получаем, что найдутся такие натуральные числа i и j, что $M_i \subseteq [M_{i+1} + B_j]$. Тогда $M_i \subseteq [AM_i + B_j] \cap M_i \subseteq [AM_i] + M_i \cap B_j$. Но в таком случае $[A\bar{M}]_{\bar{M}} = \bar{M}$.

Предположим, что $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim \bar{M} < \alpha$. Так как каждый Σ-нильпотентный относительно M идеал является Σ-нильпотентным относительно $\bar{M}$, идеал A также будет Σ-нильпотентным относительно $\bar{M}$. Пусть W — окрестность нуля в $\bar{M}$. Тогда найдётся натуральное число n, такое что $A^n\bar{M} \subset W$. Заметим, что $\bar{M} = [A\bar{M}] = [A^n M] \subset W$. Но тогда $\bar{M} \subset [W]$. Учитывая, что $\bar{M}$ — хаусдорфово пространство, получаем, что $\bar{M} = \{0\}$. Следовательно, наше предположение о том, что $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim \bar{M} < \alpha$ не верно.

В $\bar{M}$ существует замкнутый подмодуль K, такой что $\bar{M}/K$ является топологически N-критическим фактор-модулем. Пусть $C = \bar{M}/K$. Но в таком случае $[AC]_C = C$.

Пусть I — Σ-нильпотентный относительно M идеал. Заметим, что идеал I Σ-нильпотентен относительно C. Следовательно, $[IC] \neq C$. Так как модуль C топологически N-критичен, то $\operatorname{top}\mathrm{N}\dim[IC] < \alpha$. Поэтому идеал A Σ-нильпотентен относительно $[IC]$.

Наш полином f мы можем представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_d) = x_1 g(x_2, \ldots, x_d) + \psi(x_1, \ldots, x_d),$$

где g и ψ — полилинейные полиномы с целыми коэффициентами, g имеет хотя бы один единичный коэффициент и ни один одночлен ψ не начинаются на x_1.

Фиксируем натуральное k и $a_2, \ldots, a_d \in A^k$, $a_1 \in I$. Тогда $Ig(a_2, \ldots, a_d) \subseteq A^k I$.

Для каждого натурального k определим замкнутый подмодуль

$$L(k) := \{c \in C\colon Ic \subseteq [A^k IC]\}.$$

Заметим, что $L(1) \supseteq L(2) \supseteq \ldots$.

Итак,

$$\forall b_1, \ldots, b_{d-1} \in A^k\colon g(b_1, \ldots, b_{d-1})(C/L(k)) = 0.$$

По предположению индукции, так как $M/L(k)$ обладает всеми необходимыми свойствами, для любой окрестности нуля W в C найдётся натуральное число m, такое что $A^{mk}C \subseteq L(k) + W$. Следовательно,

$$C = [A^{mk}C] \subseteq [L(k) + W].$$

Итак,

$$C \subseteq \bigcap_{k\in L(k)} \bigcap_{W\in\tau(C)} [L(k) + W] \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [L(k)].$$

Тогда $L(k) = C$. Поэтому, воспользовавшись тем, что идеал A Σ-нильпотентен относительно $[IC]$, получаем

$$IC \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A^k IC \subseteq \bigcap_{W\in\tau(C)} W = 0.$$

Но тогда $[AC] = 0$. Тем самым мы показали, что

$$\bar{M} = M_i/(M_i \cap B_j) = 0.$$

Из этого очевидным образом следует $[A^i M] \subseteq [A_j M]$. Поэтому $[(A^i + A_j)M] = [A_j M]$. Из леммы 1 мы получаем, что A^i является Σ-нильпотентным относительно M идеалом, т. е. приходим к противоречию.

Итак, мы только что доказали, что каждая возрастающая последовательность элементов из $\mathcal{P}$ ограничена некоторым элементом. Из леммы 2 следует, что каждая цепь в $\mathcal{P}$ имеет кофинальную подпоследовательность и, следовательно, ограничена сверху. Заметим, что для любых двух Σ-нильпотентных относительно M идеалов P_1, P_2 идеал $P_1 + P_2$ является также Σ-нильпотентным относительно M. Но тогда для любых двух элементов $x, y \in \mathcal{P}$ найдётся элемент $z \in \mathcal{P}$, такой что $z > x$, $z > y$, поэтому каждый максимальный элемент этого множества является наибольшим. Применяя лемму Цорна, получаем, что $\mathcal{P}$ содержит наибольший элемент. Другими словами, сумма всех Σ-нильпотентных относительно M идеалов является также Σ-нильпотентным относительно M идеалом. $\square$

Таким же образом, как и в [4], т. е. используя лемму 7.3 из [4] вместе с теоремой 1, получаем следствие 1.

Приведём пример топологического PI-кольца с топологической размерностью Крулля, удовлетворяющего условиям 1, 2 следствия 1, топологический радикал Бэра которого не только не является Σ-нильпотентным, но и пересечение всех степеней этого радикала не равно нулю, хотя замыкание суммы всех Σ-нильпотентных идеалов этого кольца — Σ-нильпотентный идеал. Этот пример показывает, в частности, что условий теоремы 1 недостаточно, чтобы топологический радикал кольца был Σ-нильпотентным идеалом.

Пример 1. Пусть d — p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$. Для любого положительного a существует множество

$$P_a = \{x \in \mathbb{Q}\colon d(x,0) \leqslant a\}.$$

Положим

$$R = \begin{pmatrix} P_1 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

и определим в кольце R топологию, в которой множества

$$U_{nmk} = \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{p^n}} & P_{\frac{1}{p^m}} \\ 0 & p^k\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

задают базу окрестностей нуля. Тогда $r\,\mathrm{K}\dim R = 1$ и

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{R}_2(R) = \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{p}} & \mathbb{Q} \\ 0 & p\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

не является Σ-нильпотентным идеалом.

Доказательство. Докажем, что $r\,\mathrm{K}\dim R = 1$.

Пусть ρ — правый идеал кольца R. Если существует такой элемент $x \in \rho$, что

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

где $a \in P_1$, $b \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{Z}$ и $a \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \rho,$$

так как для любого рационального q получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & aq \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если такого x не существует, то

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & b\mathbb{Z} \\ 0 & c\mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

где $b \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{Z}$.

Пусть $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка правых идеалов кольца R. Предположим, что для любого натурального числа n идеал I_n содержит

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фиксируем натуральное число n. Тогда

$$I_n = \begin{pmatrix} A_n & \mathbb{Q} \\ 0 & C_n \end{pmatrix},$$

где A_n — идеал в P_1, а C_n — идеал в $\mathbb{Z}$. В таком случае

$$r\,\mathrm{K}\dim I_n/I_{n+1} = \max\{r\,\mathrm{K}\dim A_n/A_{n+1},\ r\,\mathrm{K}\dim C_n/C_{n+1}\}.$$

Так как существуют натуральные числа m, k, такие что $A_n = P_{p^m}$, $A_{n+1} = P_{p^k}$, то фактор-модуль A_n/A_{n+1} содержит конечное число элементов. Легко видеть, что фактор-модуль C_n/C_{n+1} также содержит конечное число элементов. Следовательно, $r\,\mathrm{K}\dim I_n/I_{n+1} = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда существует такое натуральное число N, что I_n не содержит

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого $n > N$ существуют $b_n \in \mathbb{Q}$ и $c_n \in \mathbb{Z}$, такие что

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & b_n\mathbb{Z} \\ 0 & c_n\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Так как $b_n\mathbb{Z} \supseteq b_{n+1}\mathbb{Z}$ и $c_n\mathbb{Z} \supseteq c_{n+1}\mathbb{Z}$, то фактор-модули $b_n\mathbb{Z}/b_{n+1}\mathbb{Z}$ и $c_n\mathbb{Z}/c_{n+1}\mathbb{Z}$ содержат соответственно $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ и $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ элементов. Поэтому $r\,\mathrm{K}\dim I_n/I_{n+1} = 0$.

Итак, мы доказали, что начиная с некоторого натурального числа n правая размерность Крулля фактор-модулей I_n/I_{n+1} равна нулю. Следовательно, $r\,\mathrm{K}\dim R \leqslant 1$. Но так как $r\,\mathrm{K}\dim P_1 = 1$, то $r\,\mathrm{K}\dim R = 1$. Аналогичным образом доказывается, что $r\,\mathrm{N}\dim R = 1$.

Замыкание суммы всех Σ-нильпотентных идеалов

$$\mathcal{R}_1(R) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является Σ-нильпотентным идеалом, а топологический радикал Бэра

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{R}_2(R) = \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{p}} & \mathbb{Q} \\ 0 & p\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

не является Σ-нильпотентным идеалом. □

Для случая ограниченного кольца получаем следствие 2, которое выводится из теоремы 1 с использованием следующего утверждения из [5]: если N — замкнутый Σ-нильпотентный идеал ограниченного топологического кольца R и фактор-кольцо R/N является Σ-нильпотентным, то само кольцо R также Σ-нильпотентно.

Существенность условия ограниченности кольца доказывается тем же примером 1.

Литература

[1] Бейдар К. И., Марков В. Т. Полупервичное PI-кольцо, имеющее точный модуль с размерностью Крулля, является кольцом Голди // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 6. — С. 141—142.

[2] Марков В. Т. Точные нётеровы модули над PI-кольцами // Абелевы группы и модули. — 1989. — Вып. 8. — С. 103—112.

[3] Марков В. Т. О PI-кольцах, имеющих точный модуль с размерностью Крулля // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 557—559.

[4] Тензина В. В. Топологическая размерность Крулля // Фундам. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 3. — С. 215—230.

[5] Тензина В. В. Некоторые свойства топологического радикала Бэра колец с топологической размерностью Крулля // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 2. — С. 175—176.

[6] Чернев А. М. Нильпотентность первичного радикала в PI-кольцах, имеющих точный модуль с относительной размерностью Крулля // Фундам. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1229—1237.

[7] Beidar K. I., Puczylowski E. R., Smith P. F. Krull dimension of modules over involution rings. I, II // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 121, no. 2. — P. 391—397; 1997. — Vol. 125, no. 2. — P. 355—361.