О размерностях коммутативных подалгебр и подгрупп*

М. В. МИЛЕНТЬЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mariamil@yandex.ru

УДК 512.812.4+512.552

Ключевые слова: алгебры Ли, группы Ли, ассоциативные алгебры, коммутативные (абелевы) подгруппы Ли, коммутативные (абелевы) подалгебры, размерность.

Аннотация

Установлено, что функции, ограничивающие размерность конечномерных ассоциативных алгебр (алгебр Ли) в зависимости от размерности их коммутативных подалгебр, имеют квадратичный рост. Как следствие получены аналогичные оценки для размерности группы Ли с ограниченными размерностями абелевых подгрупп Ли.

Abstract

M. V. Milentyeva, On the dimensions of commutative subalgebras and subgroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 143—157.

We consider the functions that bound the dimensions of finite-dimensional associative or Lie algebras in terms of the dimensions of their commutative subalgebras. It is proved that these functions have quadratic growth. As a result, we get similar estimates for the dimension of a Lie group with bounded dimensions of its Abelian Lie subgroups.

Введение

Начнём с определения функций, исследованию которых посвящена настоящая статья.

Определение 1. Пусть A — некоторая алгебра Ли или ассоциативная алгебра. Будем говорить, что A удовлетворяет условию $\mathcal{A}(n)$, если размерности её коммутативных подалгебр ограничены числом n.

Определение 2. Для каждого целого n обозначим через $l_K(n)$ ($a_K(n)$) такое наибольшее число h, что существует алгебра Ли (соответственно ассоциативная алгебра) размерности h над полем K, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}(n)$.

Определение 3. Через $a_K^1(n)$ будем обозначать такую наименьшую функцию целого аргумента n, что если в некоторой ассоциативной алгебре с единицей все коммутативные подалгебры с единицей имеют размерность не больше n, то сама алгебра имеет размерность, не превосходящую $a_K^1(n)$.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-01-00895).

© 2006 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

Определение 4. Для каждого целого n обозначим через $g_K(n)$ такое наибольшее число, что существует группа Ли размерности $g_K(n)$ над полем K вещественных или комплексных чисел, у которой все коммутативные подгруппы Ли имеют размерность, не превосходящую n.

Здесь и далее все алгебры подразумеваются конечномерными.

Формально, из определений не следует, что данные функции заданы корректно, так как они не обязаны принимать конечные значения. Тем не менее мы покажем, что в случае вещественного или комплексного поля, а также в некоторых других случаях, они конечны и, более того, имеют квадратичный порядок роста. А именно, справедлива следующая теорема.

Основная теорема. *Определённые выше функции имеют квадратичный порядок роста. Точнее, справедливы следующие неравенства*:

$$\frac{n^2+4n-5}{8} \leqslant l_{\mathbb{C}}(n) \leqslant \frac{n^2+17n}{2}, \qquad \frac{n^2+4n-5}{8} \leqslant g_{\mathbb{C}}(n) \leqslant \frac{n^2+17n}{2},$$
$$\frac{n^2+4n-5}{8} \leqslant a_{\mathbb{C}}(n) \leqslant \frac{n^2}{2}+5n,$$
$$2n^2+n \leqslant l_{\mathbb{R}}(n) \leqslant 4n^2+18n, \qquad 2n^2+n \leqslant g_{\mathbb{R}}(n) \leqslant 4n^2+18n,$$
$$\frac{n^2+4n-5}{8} \leqslant a_{\mathbb{R}}(n) \leqslant \frac{n^2}{2}+5n;$$

если поле K имеет нулевую характеристику, то

$$a_K(n) \leqslant \frac{3n^2+n}{2}, \qquad a_K^1(n) \leqslant \frac{3n^2+n}{2};$$

если поле K алгебраически замкнуто, то

$$a_K(n) \leqslant \frac{n^2}{2}+5n, \qquad a_K^1(n) \leqslant \frac{n^2}{2}+5n;$$

для произвольного поля K

$$l_K(n) \geqslant \frac{n^2+4n-5}{8}, \qquad a_K(n) \geqslant \frac{n^2+4n-5}{8}, \qquad a_K^1(n) \geqslant \frac{n^2+2n}{8}.$$

Явное задание функций l_K, a_K, a_K^1 и g_K неизвестно. Однако в связи с данной теоремой возникает вопрос об асимптотике каждой из них: найти пределы $\frac{f(n)}{n^2}$ при $n \to \infty$.

Работа является продолжением исследования, начатого в работах [4,7], в которых рассматривались аналогичные функции для конечных p-групп и конечно порождённых нильпотентных групп без кручения. На некоторые результаты этих работ мы будем опираться для доказательства нижних оценок. Благодаря этому квадратичные оценки получаются уже на нильпотентных ступени 2 алгебрах. Для получения верхних оценок используются стандартные результаты о строении алгебр и групп Ли.

1. Верхние квадратичные оценки

1.1. Комплексные алгебры Ли

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли над некоторым полем K, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}(n)$. Тогда*

$$\dim \mathfrak{g} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$ — максимальный идеал с нулевым умножением и $\dim \mathfrak{i} = s$. Обозначим через ρ представление алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{i}$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathfrak{g}$ сужение оператора $\operatorname{ad} x$ на $\mathfrak{i}$. Тогда $\operatorname{Ker} \rho = \mathfrak{i}$. Действительно, $\mathfrak{i} \subseteq \operatorname{Ker} \rho$, так как идеал $\mathfrak{i}$ абелев. Предположим, от противного, что $\mathfrak{i} \subsetneq \operatorname{Ker} \rho$. Тогда $\operatorname{Ker} \rho / \mathfrak{i}$ является нетривиальным идеалом в нильпотентной фактор-алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$, а значит, имеет нетривиальное пересечение с её центром, т. е. существует элемент $x \in \operatorname{Ker} \rho \setminus \mathfrak{i}$, такой что $[x, y] \in \mathfrak{i}$ для любого $y \in \mathfrak{g}$. Получаем, что линейная оболочка $\langle x, \mathfrak{i} \rangle$ — абелев идеал, строго больший, чем идеал $\mathfrak{i}$, что противоречит максимальности последнего.

Из нильпотентности $\mathfrak{g}$ следует, что все отображения $\operatorname{ad} x$, где $x \in \mathfrak{g}$, нильпотентны. Поэтому фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ изоморфна некоторой подалгебре в $\mathfrak{gl}_s(K)$, все операторы которой нильпотентны, а значит, по теореме Энгеля, некоторой подалгебре в алгебре верхних ниль-треугольных матриц. Следовательно, $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \leqslant \frac{s(s-1)}{2}$, а $\dim \mathfrak{g} \leqslant \frac{s(s+1)}{2}$. □

Лемма 2. *Если $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}(n)$, то*

$$\dim \mathfrak{g} \leqslant \frac{n(n+3)}{2}.$$

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей леммы, выберем в $\mathfrak{g}$ максимальный коммутативный идеал $\mathfrak{i}$ и обозначим его размерность через s. Положим $\rho(x) = \operatorname{ad} x|_{\mathfrak{i}}$ для каждого $x \in \mathfrak{g}$.

Очевидно, $\mathfrak{i} \subseteq \operatorname{Ker} \rho$. Если $\mathfrak{i} \neq \operatorname{Ker} \rho$, то согласно следствию теоремы Ли [1, следствие 3 теоремы I.5.1] нетривиальный идеал $\operatorname{Ker} \rho / \mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ содержит некоторый одномерный идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$. Но тогда $\mathfrak{j}$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}$, строго больший, чем $\mathfrak{i}$, и мы приходим к противоречию.

Следовательно, $\operatorname{Ker} \rho = \mathfrak{i}$, и фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ изоморфна некоторой разрешимой подалгебре алгебры $\mathfrak{gl}_s(K)$. По теореме Ли все элементы этой подалгебры в некотором базисе представляются одновременно верхнетреугольными матрицами. Поэтому $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \leqslant \frac{s(s+1)}{2}$ и $\dim \mathfrak{g} \leqslant \frac{s(s+3)}{2}$. □

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли с условием $\mathcal{A}(n)$. Тогда*

$$\dim \mathfrak{g} \leqslant 7n. \tag{1}$$

Доказательство. Согласно классификации простых комплексных алгебр Ли (см. [2, теоремы 4.2.13, 4.3.1 и 4.3.3]) любая простая алгебра Ли принадлежит одному из типов, перечисленных в первой строке следующей таблицы:

Тип $\mathfrak{g}$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	A_l $(l \geqslant 1)$	B_l $(l \geqslant 3)$	C_l $(l \geqslant 2)$	D_l $(l \geqslant 4)$
$\dim \mathfrak{g}$	78	133	248	52	14	l^2+2l	$2l^2+l$	$2l^2+l$	$2l^2-l$
$\dim \mathfrak{h}$	16	27	36	9	3	$\left[\frac{(l+1)^2}{4}\right]$	$\frac{l(l-1)}{2}+1$	$\frac{l(l+1)}{2}$	$\frac{l(l-1)}{2}$

Индексом обозначен ранг соответствующей алгебры Ли, т. е. размерность её максимальной диагонализуемой подалгебры. Во второй строке приведены размерности алгебр Ли в соответствии с [2, таблица 1]. В [3] найдены коммутативные подалгебры максимальной размерности всех простых комплексных алгебр Ли. Согласно этой работе в алгебре $\mathfrak{g}$ всегда можно выбрать коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}$ с размерностью, указанной в третьей строке таблицы.

Так как по условию $\dim \mathfrak{h} \leqslant n$, то, очевидно, неравенство (1) выполняется для алгебр первых пяти типов. Осталось проверить его справедливость для бесконечных серий.

1. $\mathfrak{g}$ типа A_l, $l \geqslant 1$, $\dim \mathfrak{h} \geqslant 1$.

$$\dim \mathfrak{g} = (l+1)^2 - 1 \leqslant 4\left[\frac{(l+1)^2}{4}\right] + 3 - 1 = 4\dim \mathfrak{h} + 2 \leqslant 6\dim \mathfrak{h} < 7n.$$

2. $\mathfrak{g}$ типа B_l, $l \geqslant 3$, $\dim \mathfrak{h} \geqslant l$.

$$\dim \mathfrak{g} = 2l^2 + l = 4\dim \mathfrak{h} + 3l - 4 < 7\dim \mathfrak{h} \leqslant 7n.$$

3. $\mathfrak{g}$ типа C_l, $l \geqslant 2$.

$$\dim \mathfrak{g} = 2l^2 + l \leqslant 2l(l+1) = 4\dim \mathfrak{h} < 7n.$$

4. $\mathfrak{g}$ типа D_l, $l \geqslant 4$, $\dim \mathfrak{h} \geqslant l$.

$$\dim \mathfrak{g} = 2l^2 - l = 4\dim \mathfrak{h} + l \leqslant 5\dim \mathfrak{h} < 7n.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Если $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли с условием $\mathcal{A}(n)$, то*

$$\dim \mathfrak{g} \leqslant 7n.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$ — разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых подалгебр. Выберем в каждой подалгебре $\mathfrak{g}_i$ абелеву подалгебру $\mathfrak{h}_i$ максимальной размерности n_i. Тогда по предыдущей лемме $\dim \mathfrak{g}_i \leqslant 7n_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_m$ абелева, её размерность равна $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i$ и не превосходит n по условию. Отсюда легко получаем требуемое неравенство:

$$\dim \mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{m} \dim \mathfrak{g}_i \leqslant 7\sum_{i=1}^{m} n_i \leqslant 7n.$$

Лемма доказана. □

Теорема 1. *Функция $l_{\mathbb{C}}(n)$ удовлетворяет неравенству*

$$l_{\mathbb{C}}(n) \leqslant \frac{n^2+17n}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющую условию $\mathcal{A}(n)$, и покажем, что её размерность не превосходит $\frac{n^2+17n}{2}$.

По теореме Леви алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в полупрямую сумму некоторой своей полупростой подалгебры $\mathfrak{s}$ и разрешимого радикала $\mathfrak{r}$. Обозначим через n_1 и n_2 максимально возможные размерности абелевых подалгебр в $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ соответственно. Тогда $\dim\mathfrak{r} \leqslant \frac{n_1(n_1+3)}{2}$ по лемме 2 и $\dim\mathfrak{s} \leqslant 7n_2$ по лемме 4.

По предположению n_1 и n_2 не превосходят n. Можно оценить размерность алгебры $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$\dim\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{r} + \dim\mathfrak{s} \leqslant \frac{n_1(n_1+3)}{2} + 7n_2 \leqslant \frac{n^2+17n}{2}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для функции $g_{\mathbb{C}}(n)$ справедливо неравенство*

$$g_{\mathbb{C}}(n) \leqslant \frac{n^2+17n}{2}.$$

Доказательство. Пусть G — некоторая комплексная группа Ли, у которой все коммутативные подгруппы Ли имеют не превосходящую n размерность, и пусть $\mathfrak{g}$ — её касательная алгебра Ли. Рассмотрим произвольную абелеву подалгебру $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{h}^{\mathrm{M}}$ её замыкание Мальцева, т. е. наименьшую подалгебру, содержащую $\mathfrak{h}$ и такую, что существует связная подгруппа Ли $H \leqslant G$ с касательной алгеброй $\mathfrak{h}^{\mathrm{M}}$. По [2, теорема 1.4.3] коммутанты алгебр $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^{\mathrm{M}}$ совпадают. Следовательно, алгебра $\mathfrak{h}^{\mathrm{M}}$, а значит, и группа H коммутативны, и по предположению $\dim\mathfrak{h} \leqslant \dim\mathfrak{h}^{\mathrm{M}} = \dim H \leqslant n$, т. е. $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}(n)$. Тогда по теореме 1 $\dim G = \dim\mathfrak{g} \leqslant \frac{n^2+17n}{2}$. □

1.2. Вещественные алгебры Ли

Лемма 5. *Размерность вещественной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с условием $\mathcal{A}(n)$ не превосходит $2n^2+3n$.*

Доказательство. Выберем в $\mathfrak{g}$ максимальный идеал $\mathfrak{i}$, такой что либо $\mathfrak{i}$ коммутативен, либо $\mathfrak{i}$ представим в виде суммы m некоммутативных идеалов $\mathfrak{i}_k$ со следующими свойствами:

1) $[\mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}_l] = 0$, $k \neq l$, $k, l = 1, \ldots, m$;
2) $\mathfrak{i}_k \cap \mathfrak{i}_l = \mathfrak{c}$, $k \neq l$, $k, l = 1, \ldots, m$, где $\mathfrak{c}$ — центральный идеал в $\mathfrak{i}$;
3) $\dim \mathfrak{i}_k/\mathfrak{c} = 2$, $k = 1, \ldots, m$.

Если идеал $\mathfrak{i}$ коммутативен, считаем, что $\mathfrak{i} = \mathfrak{c}$ и $m = 0$.

Для каждого $x \in \mathfrak{g}$ положим $\rho(x) = \operatorname{ad} x|_{\mathfrak{i}}$ и покажем, что $\operatorname{Ker}\rho = \mathfrak{c}$.

Так как в силу некоммутативности $\mathfrak{i}_k$ и условия (3) $\mathfrak{c}$ является центром каждого из $\mathfrak{i}_k$, то $\operatorname{Ker}\rho \cap \mathfrak{i} = \mathfrak{c}$. Предположим, что $\operatorname{Ker}\rho$ больше $\mathfrak{c}$. Тогда в $\operatorname{Ker}\rho/\mathfrak{c}$ можно выбрать идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{c}$ разрешимой фактор-алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ размерности 1 или 2 (см. [1, следствие 4 теоремы I.5.1]). Если идеал $\mathfrak{j}$ коммутативен, положим

$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{i}'_k = \mathfrak{i}_k + \mathfrak{j}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad \mathfrak{i}' = \mathfrak{i}'_1 + \ldots + \mathfrak{i}'_m.$$

Видно, что $\mathfrak{i}'$ есть идеал, строго больший $\mathfrak{i}$ и удовлетворяющий всем необходимым условиям. Если же $\mathfrak{j}$ не коммутативен, то обязательно $\dim \mathfrak{j}/\mathfrak{c} = 2$, так как $\mathfrak{c}$ содержится в центре $\mathfrak{j}$. Полагая

$$\mathfrak{i}_{m+1} = \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{i}' = \mathfrak{i} + \mathfrak{i}_{m+1},$$

снова получаем идеал, собственным образом содержащий $\mathfrak{i}$ и удовлетворяющий тем же условиям. Противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ можно рассматривать как разрешимую подалгебру в $\mathfrak{gl}_s(\mathbb{R})$, где $s = \dim \mathfrak{i}$. Так как любое неприводимое представление разрешимой вещественной алгебры Ли имеет размерность не больше 2 (см. [1, следствие 4 теоремы I.5.1]), то в $\mathfrak{i}$ можно выбрать такой базис, что все элементы из $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ в этом базисе будут представимы «почти треугольными» матрицами, т. е. матрицами, у которых на главной диагонали могут стоять ненулевые квадраты со стороной 1 или 2, а под этой диагональю только нулевые коэффициенты. Отсюда следует, что $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{c} \leqslant \frac{s(s+2)}{2}$.

Заметим теперь, что $\mathfrak{i}$ содержит коммутативную подалгебру большой размерности. Действительно, так как для любого k согласно условию (1) $\mathfrak{i}_k \cap \bigoplus\limits_{l \neq k} \mathfrak{i}_l$ содержится в центре $\mathfrak{i}_k$, а значит, совпадает с $\mathfrak{c}$, то идеалы $\mathfrak{i}_k$ складываются прямым образом по модулю $\mathfrak{c}$, и $\dim \mathfrak{i} = 2m + \dim \mathfrak{c}$. Выберем для каждого $k = 1, \ldots, m$ элемент $x_k \in \mathfrak{i}_k \setminus \mathfrak{c}$, тогда линейная оболочка $\langle x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{c} \rangle$ будет абелевой подалгеброй с размерностью $t = m + \dim \mathfrak{c} \geqslant \frac{s}{2}$. Имеем

$$\dim \mathfrak{g} \leqslant \frac{s(s+2)}{2} + \dim \mathfrak{c} \leqslant t(2t+2) + t = 2t^2 + 3t.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Для вещественной простой алгебры $\mathfrak{g}$ с условием $\mathcal{A}(n)$ справедлива следующая оценка размерности*:

$$\dim \mathfrak{g} \leqslant 2n^2 + 15n.$$

Доказательство. Для комплексной алгебры Ли $\mathfrak{u}$ будем обозначать через $\mathfrak{u}^{\mathbb{R}}$ вещественную алгебру Ли, полученную из $\mathfrak{u}$ операцией овеществления.

Воспользуемся теоремой 5.1.1 из [2], которая утверждает, что вещественная алгебра Ли проста тогда и только тогда, когда она изоморфна либо алгебре вида $\mathfrak{u}^{\mathbb{R}}$, где $\mathfrak{u}$ — простая комплексная алгебра Ли, либо вещественной форме простой комплексной алгебры Ли.

Предположим сначала, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{R}}$ для некоторой комплексной простой алгебры $\mathfrak{u}$. Согласно лемме 3 в $\mathfrak{u}$ существует такая абелева подалгебра $\mathfrak{h}$, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{u} \leqslant 7 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ — абелева подалгебра в $\mathfrak{u}^{\mathbb{R}}$, и следовательно, так как $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{u}$ и $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$, наша лемма верна.

Далее, пусть $\mathfrak{g}$ является вещественной формой некоторой простой комплексной алгебры $\mathfrak{u}$. Согласно [2, задача 5.4.9] в $\mathfrak{g}$ можно выбрать такую коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}$, что её комплексификация $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ будет максимальной диагонализуемой подалгеброй в $\mathfrak{u}$, в частности, размерность $\mathfrak{h}$ будет равна рангу алгебры $\mathfrak{u}$. Теперь, сравнивая значения ранга и размерности простых комплексных алгебр Ли, приведённые в таблице, легко получаем требуемое неравенство. $\square$

Лемма 7. *Полупростая вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с условием $\mathcal{A}(n)$ имеет размерность, не превосходящую $2n^2 + 15n$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4. Достаточно дополнительно использовать соображение о том, что сумма квадратов положительных чисел не превосходит квадрата их суммы. $\square$

Теорема 2. *Для функции $l_{\mathbb{R}}(n)$ имеет место соотношение*

$$l_{\mathbb{R}}(n) \leqslant 4n^2 + 18n.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1, если вместо лемм 2 и 4 использовать леммы 5 и 7. $\square$

Следствие 2. *Функция $g_{\mathbb{R}}(n)$ удовлетворяет неравенству*

$$g_{\mathbb{R}}(n) \leqslant 4n^2 + 18n.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1. $\square$

1.3. Ассоциативные алгебры

Лемма 8. *Если A — некоторая нильпотентная ассоциативная алгебра над произвольным полем, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}(n)$, то*

$$\dim A \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Алгебру A можно рассматривать как алгебру Ли с операцией коммутирования $[x, y] = xy - yx$, которая также будет нильпотентна. Пусть $B \leqslant A$ — максимальная подалгебра Ли с нулевым умножением. Для любых $x, y, z \in B$ имеем $xy = yx$, так как $[x, y] = 0$, и $[xy, z] = 0$, так как $(xy)z = xzy = z(xy)$. Следовательно, B содержит xy в силу своей максимальности. Поэтому B является коммутативной ассоциативной подалгеброй в A и по условию $\dim B \leqslant n$. Можем применить лемму 1. $\square$

Лемма 9. *Размерность полупростой ассоциативной алгебры с условием $\mathcal{A}(n)$ ограничена числом n^2.*

Доказательство. Если A — простая алгебра над полем K, то по теореме Веддербёрна она изоморфна алгебре матриц $M_r(D)$ для некоторых конечномерной алгебры с делением D и натурального числа r.

Обозначим через L центр тела D, а через F — некоторое его максимальное подполе. По [6, теорема 4.2.2] имеет место соотношение $[D:F]=[F:L]$. Поэтому, учитывая, что $K\subset L$, получаем

$$[D:K]=[D:F][F:K]=[F:L][F:K]\leqslant[F:K]^2.$$

В алгебре $M_r(D)$ диагональные матрицы с коэффициентами из поля F составляют коммутативную подалгебру. Её размерность равна $s=r[F:K]$. Отсюда получаем необходимую оценку размерности алгебры A:

$$\dim A=r^2[D:K]\leqslant r^2[F:K]^2=s^2.$$

Теперь справедливость леммы для произвольной полупростой алгебры легко показать, пользуясь тем, что полупростая алгебра раскладывается в прямую сумму простых подалгебр, для каждой из которых леммы верна. □

Лемма 10. *Предположим, что поле K удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) *алгебраическое замыкание $\bar K$ поля K является его конечным расширением, $c=\max\{[\bar K:K],\frac92\}$*;
2) *K конечно, $c=\frac92$.*

Тогда размерность полупростой ассоциативной алгебры A над K, удовлетворяющей условию $\mathcal{A}(n)$, не превосходит cn.

Доказательство. Предположим сначала, что A — простая алгебра. Тогда по теореме Веддербёрна A изоморфна алгебре матриц $M_r(D)$ для некоторых конечномерной алгебры с делением D над K и целого числа r.

Пусть, как в предыдущей лемме, L — центр тела D, а F — его максимальное подполе. Снова по [6, теорема 4.2.2] $[D:F]=[F:L]$. Отсюда, так как $K\subset L\subset F\subset\bar K$, получаем, что $[D:F]\leqslant c$, если $\bar K$ конечно над K. Если же K — конечное поле, то D также конечно, и $[D:F]=1<c$, поскольку всякое конечное тело коммутативно [5, § VI.3].

При $r=1$ алгебра $A=D$ содержит коммутативную подалгебру $B=F$. Имеем $\dim A=[D:F][F:K]\leqslant c\dim B$.

При $r=2k$ в качестве коммутативной подалгебры большой размерности выбираем подалгебру $B\subset M_r(D)$, состоящую из матриц, у которых могут быть отличны от нуля только коэффициенты в правом верхнем квадрате размера $k\times k$. Имеем $\dim B=k^2[D:K]$ и $\dim A=4k^2[D:K]\leqslant c\dim B$.

Аналогично при $m=2k+1$, $k\geqslant 1$, коммутативная подалгебра B, состоящая из матриц с нулевыми коэффициентами вне прямоугольника размером $k\times(k+1)$ в правом верхнем углу, будет иметь размерность $k(k+1)[D:K]\geqslant 2[D:K]$. В то же время

$$\dim A=(2k+1)^2[D:K]=(4k(k+1)+1)[D:K]\leqslant\frac{9\dim B}{2}\leqslant c\dim B.$$

Так как произвольная полупростая алгебра является прямой суммой простых подалгебр, то общий случай следует из разобранного выше. □

Теорема 3. *Пусть поле K алгебраически замкнуто или имеет нулевую характеристику, тогда*

$$a_K(n) \leqslant \frac{3n^2+n}{2}.$$

Если дополнительно $c = \max\{[\bar{K} : K], \frac{9}{2}\} < \infty$, то

$$a_K(n) \leqslant \frac{n^2+(2c+1)n}{2}.$$

В частности, в вещественном и комплексном случаях получаем

$$a_{\mathbb{R}}(n),\ a_{\mathbb{C}}(n) \leqslant \frac{n^2}{2} + 5n.$$

Доказательство. Так как, если поле K алгебраически замкнуто или имеет нулевую характеристику, любая полупростая алгебра над K сепарабельна, то можно применить теорему Веддербёрна—Мальцева, утверждающую, что произвольная ассоциативная алгебра с сепарабельной фактор-алгеброй по радикалу разлагается в сумму своего радикала и некоторой полупростой подалгебры. Теперь первое неравенство теоремы следует из лемм 8 и 9, а второе — из лемм 8 и 10. □

Теорема 3′. *Пусть поле K алгебраически замкнуто или имеет нулевую характеристику, тогда*

$$a^1_K(n) \leqslant \frac{3n^2+n}{2}.$$

Если при этом $c = \max\{[\bar{K} : K], \frac{9}{2}\} < \infty$, то

$$a^1_K(n) \leqslant \frac{n^2+(2c+1)n}{2}.$$

Доказательство. В алгебре с единицей любая максимальная коммутативная подалгебра эту единицу содержит. Поэтому если в некоторой алгебре размерности всех коммутативных подалгебр с единицей ограничены числом n, то она удовлетворяет условию $\mathcal{A}(n)$, и данная теорема следует из предыдущей. □

2. Нижние квадратичные оценки

2.1. Алгебры Ли над произвольным полем

Теорема 4. *Для произвольного поля K справедливо*

$$l_K(n) \geqslant \frac{n^2+4n-5}{8}.$$

Утверждение доказывается построением для каждого s нильпотентной ступени 2 алгебры Ли, размерность которой ограничена снизу соответствующей квадратичной функцией и все абелевы подалгебры которой имеют не превосходящую s размерность. Поэтому целесообразно ввести отдельно для 2-нильпотентных групп и алгебр функции, аналогичные уже определённым.

Определение 5. Для каждого целого n обозначим через $l_K^n(n)$ ($a_K^n(n)$, $g_K^n(n)$) наибольшее число h, такое что существует нильпотентная ступени 2 алгебра Ли (соответственно ассоциативная алгебра, группа Ли) размерности h над полем K, для которой все её коммутативные подалгебры (подгруппы Ли) имеют не превосходящую n размерность.

Теорема будет следовать из следующего более сильного утверждения.

Теорема 4′. *Для любого поля K*

$$l_K^n(n) \geqslant \frac{n^2+4n-5}{8}.$$

Примеры алгебр строятся аналогично тому, как это делалось в [4] для конечных p-групп, если K — конечное поле, и в [7] для конечно порождённых нильпотентных групп без кручения, если K бесконечно.

Лемма 11. *Пусть натуральные числа k, t и n таковы, что $2n < t(k-1)$. Тогда существует такой набор $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_t\}$ билинейных кососимметрических форм на n-мерном пространстве V над полем K, что никакое k-мерное подпространство из V не является вполне изотропным для всех форм $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ одновременно.*

Доказательство. Данная лемма была доказана в [4] для случая, когда поле K имеет простой порядок, но очевидным образом остаётся верной и для произвольного конечного поля. С другой стороны, в случае бесконечного поля эта лемма есть небольшая переформулировка основной леммы из [7] (в настоящем случае неравенство более сильное), доказательство которой и переносится на нашу лемму с минимальными изменениями.

Действительно, заметим, что рассуждения, приведённые в доказательстве леммы из [7], остаются справедливыми, если поле комплексных чисел заменить произвольным алгебраически замкнутым полем. Применяя их к алгебраическому замыканию $\bar{K}$ поля K, можно показать, что множество наборов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_t\}$ билинейных кососимметрических форм на пространстве $\bar{V} = V_K \otimes \bar{K}$ над $\bar{K}$, для которых существует общее вполне изотропное k-мерное подпространство, задаётся системой полиномиальных уравнений относительно коэффициентов матриц $\varphi_1, \dots, \varphi_t$

$$G_i = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

причём не все G_i тождественно равны нулю. Поэтому, так как поле K бесконечно, это множество не может содержать все наборы Φ с коэффициентами из поля K, что и завершает доказательство леммы. □

Пусть U, V — векторные пространства над полем K с базисами $f_1, \ldots, f_t$ и $e_1, \ldots, e_n$ соответственно, и пусть $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$ — набор билинейных кососимметрических форм на V. Определим алгебру Ли $\mathfrak{g}_\Phi$ следующим образом: как линейное пространство $\mathfrak{g}_\Phi$ есть прямая сумма пространств U и V, а умножение произвольных элементов $x, y \in \mathfrak{g}_\Phi$ вида $x = u_1 + v_1$, $y = u_2 + v_2$, где $u_1, u_2 \in U$ и $v_1, v_2 \in V$, происходит по правилу

$$[x, y] = \varphi_1(v_1, v_2)f_1 + \ldots + \varphi_t(v_1, v_2)f_t. \tag{2}$$

Непосредственно из данной формулы видно, что $\mathfrak{g}_\Phi$ — нильпотентная ступени 2 алгебра Ли и что U — её центральная t-мерная подалгебра.

Лемма 12. *Пусть числа k, t и n таковы, что $2n < t(k-1)$ и набор билинейных кососимметрических форм $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$ на n-мерном векторном пространстве V выбран так, как это позволяет сделать лемма* 11. *Тогда построенная по этому набору алгебра $\mathfrak{g}_\Phi$ не имеет абелевых подалгебр с размерностью больше $k + t - 1$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ — абелева подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_\Phi$. Тогда, как видно из формулы (2), подпространство $\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap U) \subset V$ является вполне изотропным относительно $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$. Следовательно, по лемме 11

$$\dim \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap U) \leqslant k - 1,$$

откуда

$$\dim \mathfrak{h} \leqslant k - 1 + \dim U = k + t - 1.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4′. Если s чётно, положим

$$t = \frac{s}{2} + 1, \quad k = \frac{s}{2}, \quad n = \left[\frac{s^2 - 5}{8}\right].$$

Тогда $2n < t(k-1)$ и согласно лемме 12 существует алгебра Ли $\mathfrak{g}_\Phi$, все абелевы подалгебры которой имеют размерность, не превосходящую s, в то время как размерность алгебры $\mathfrak{g}_\Phi$ равна

$$n + t = \left[\frac{s^2 - 5}{8}\right] + \frac{s}{2} + 1 \geqslant \frac{s^2 + 4s - 4}{8}.$$

Аналогично для нечётного s полагаем

$$t = k = \frac{s+1}{2}, \quad n = \left[\frac{s^2 - 2}{8}\right]$$

и получаем, что размерность алгебры $\mathfrak{g}_\Phi$ равна

$$n + t = \left[\frac{s^2 - 2}{8}\right] + \frac{s+1}{2} \geqslant \frac{s^2 + 4s - 5}{8}.$$

Следовательно, $f(s) \geqslant \frac{s^2+4s-5}{8}$, и теорема доказана. □

2.2. Нижние оценки функций $l_{\mathbb{R}}(n)$, $a_K(n)$ и $g_K(n)$

Теорема 5. *Для вещественной функции $l_{\mathbb{R}}(n)$ справедливо неравенство*

$$l_{\mathbb{R}}(n) \geqslant 2n^2 + n.$$

Доказательство. Для каждого $n \geqslant 1$ рассмотрим вещественную алгебру Ли $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{R})$ вещественных кососимметрических матриц, которая согласно [2, пример из пункта 4.1.3] является компактной вещественной формой простой комплексной алгебры $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ типа B_n. Из компактности $\mathfrak{g}_n$ следует [2, задача 5.3.6], что её картановское разложение в прямую сумму подпространств $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ — подалгебра, а $\mathfrak{p}$ — картановское подпространство, является тривиальным, т. е. $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_n$, а $\mathfrak{p} = 0$. Согласно [2, задача 5.3.27] для любой максимальной коммутативной подалгебры $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{k}$ её комплексификация $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ будет максимальной диагонализуемой подалгеброй в $\mathfrak{k}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, откуда получаем, что размерность любой максимальной абелевой подалгебры в $\mathfrak{g}_n$ равна рангу $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, т. е. n, при этом $\dim \mathfrak{g}_n = 2n^2 + n$, что и даёт требуемую оценку. □

Замечание 1. Ту же самую оценку можно получить, проведя аналогичные рассуждения для компактной вещественной формы

$$\mathfrak{sp}_n = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ -\bar{Y} & \bar{X} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \;\middle|\; X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}),\ X = -\bar{X}^\top,\ Y = Y^\top \right\}$$

простой комплексной алгебры

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \;\middle|\; X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}),\ Y = -\bar{Y}^\top,\ Z = Z^\top \right\}$$

типа C_n.

Теорема 6. *Пусть K — поле с характеристикой, не равной 2, тогда*

$$a_K^n(n) \geqslant \frac{n^2 + 4n - 5}{8}.$$

Доказательство. Как было показано в доказательстве теоремы $4'$, для любого n существует нильпотентная ступени 2 алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ над полем K, имеющая размерность как минимум $\frac{n^2+4n-5}{8}$ и такая, что размерности её абелевых подалгебр ограничены числом n. Заметим, что, так как $\mathfrak{g}_n$ — нильпотентная ступени 2 алгебра Ли и произведение любых трёх элементов из $\mathfrak{g}_n$ равно нулю, то $\mathfrak{g}_n$ — нильпотентная ступени 2 ассоциативная алгебра над K относительно тех же операций. В силу антикоммутативности умножения в алгебрах Ли и того, что характеристика поля K отлична от двух, коммутативные ассоциативные подалгебры в $\mathfrak{g}_n$ — это в точности подалгебры Ли с нулевым умножением. Поэтому алгебры $\mathfrak{g}_n$ служат одновременно примером ассоциативных 2-нильпотентных алгебр «больших» размерностей с «маленькими» размерностями коммутативных подалгебр. □

Замечание 2. Теорему 6 можно доказать и не ссылаясь на уже существующие результаты об алгебрах Ли, а действуя по аналогичной схеме. Тогда требование, чтобы характеристика поля была отлична от двух, перестаёт быть необходимым. Действительно, по произвольному набору билинейных форм $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$ на n-мерном пространстве V можно построить нильпотентную ассоциативную алгебру A_Φ, задав на прямой сумме пространств U и V умножение по правилу

$$(u_1 + v_1) \cdot (u_2 + v_2) = \varphi_1(v_1, v_2) f_1 + \ldots + \varphi_t(v_1, v_2) f_t,$$

где $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, а $f_1, \ldots, f_t$ — базис U. Тогда произвольная подалгебра B алгебры A_Φ коммутативна тогда и только тогда, когда все формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ являются симметрическими на $B/(B \cap U) \subset V$. Точно так же, как мы доказывали лемму 11, можно показать, что если числа k, t и n удовлетворяют тому же неравенству, то на V существует такой набор билинейных функций $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$, что их ограничения на любое k-мерное подпространство не могут быть одновременно симметричными. Построенные по таким наборам алгебры A_Φ не содержат коммутативных подалгебр с размерностью больше $k+t-1$. Наконец, выбирая k, t и n как в доказательстве теоремы $4'$, получаем ту же самую оценку.

Так как по определению $a_K(n) \geqslant a_K^n(n)$, то нижняя оценка функции $a_K(n)$ в основной теореме следует из только что доказанного.

Теорема $6'$. *Для произвольного поля K имеет место оценка*

$$a_K^1(n) \geqslant \frac{n^2 + 2n}{8}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную ассоциативную алгебру A и вложим её в ассоциативную алгебру с единицей A_1 следующим образом. Как линейное пространство положим A_1 равной прямой сумме A и одномерного пространства, натянутого на некоторый вектор e: $A_1 = A \oplus Ke$. Умножение в A_1 доопределим формулой $xe = ex = x$ для любого $x \in A_1$ и далее по линейности. По определению e — нейтральный элемент в A_1. Всякая максимальная коммутативная подалгебры в A_1 имеет вид $B_1 = B \oplus Ke$ для некоторой максимальной коммутативной подалгебры $B \leqslant A$, причём $\dim B_1 = \dim B + 1$. Кроме того, $\dim A_1 = \dim A + 1$.

Другими словами, если существует ассоциативная алгебра размерности h, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}(n-1)$, то существует и ассоциативная алгебра с единицей на единицу большей размерности, у которой размерности коммутативных подалгебр с единицей ограничены числом n, т. е. на языке формул

$$a_K^1(n) \geqslant a_K(n-1) + 1 \geqslant a_K^n(n-1) + 1, \quad n \geqslant 2.$$

Пользуясь предыдущей теоремой, получаем в итоге с учётом замечания 2 необходимое неравенство для $n \geqslant 2$. Его справедливость при $n = 1$ очевидна. □

Теорема 7. *Если K — поле комплексных или вещественных чисел, то*

$$g_K(n) \geqslant g_K^n(n) \geqslant \frac{n^2+4n-5}{8}.$$

Также справедливо неравенство

$$g_{\mathbb{R}}(n) \geqslant 2n^2+n.$$

Доказательство. Данное утверждение вытекает из теорем 4 и 5 и теоремы о существовании связной группы Ли с заданной вещественной или комплексной касательной алгеброй Ли [2, теорема 6.2], причём нильпотентным ступени 2 алгебрам соответствуют 2-нильпотентные группы Ли, а также из того факта, что касательные алгебры коммутативных подгрупп Ли являются коммутативными подалгебрами. □

3. О нильпотентных ступени 2 группах и алгебрах

Как показывают леммы 1 и 8, размерность нильпотентных алгебр с условием $\mathcal{A}(n)$ ограничена сверху функцией порядка $\frac{n^2}{2}$. Оказывается, что уже в классах 2-нильпотентных алгебр и групп аналоги изучаемых нами функций имеют квадратичный рост. При этом верхние оценки получаются асимптотически вдвое лучшими, так что введённые в разделе 2 функции будут иметь довольно близкие верхнюю и нижнюю оценки.

Теорема 8. *Если f — это одна из функций l_K^n, a_K^n или g_K^n, то она удовлетворяет неравенству*

$$\frac{n^2+4n-5}{8} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n^2}{4}+n.$$

Доказательство. Первое неравенство для функции f, равной l_K^n, a_K^n или g_K^n, доказано соответственно в теоремах $4'$, 6 и 7. Покажем справедливость второго неравенства.

Рассмотрим произвольную нильпотентную ступени 2 алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{z}$ центр $\mathfrak{g}$, через $z_1,\ldots,z_t$ — его базис, а через V — некоторое дополнительное к $\mathfrak{z}$ подпространство с размерностью m. Тогда произведение двух произвольных элементов $x=\bar{x}+\bar{\bar{x}}$ и $y=\bar{y}+\bar{\bar{y}}$ из $\mathfrak{g}$, где $\bar{x},\bar{y}\in V$, $\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}\in\mathfrak{z}$, описывается формулой

$$[x,y]=\varphi_1(\bar{x},\bar{y})z_1+\ldots+\varphi_t(\bar{x},\bar{y})z_t$$

для некоторого набора кососимметрических билинейных форм $\varphi_1,\ldots,\varphi_t$ на V.

В данных обозначениях элементы x и y коммутируют тогда и только тогда, когда

$$\varphi_i(\bar{x},\bar{y})=0,\quad i=1,\ldots,t.$$

Поэтому множество элементов $\bar{y}\in V$, коммутирующих с фиксированным ненулевым элементом $\bar{x}_1\in V$, задаётся системой из t линейных уравнений, а значит, образует линейное подпространство с размерностью как минимум $m-t$. Следовательно, если $m-t \geqslant 2$, то в V существует элемент $\bar{x}_2$, непропорциональный $\bar{x}_1$ и коммутирующий с ним.

Далее, по индукции, если выбрано $k-1$ линейно независимых попарно коммутирующих между собой элементов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}$, то множество всех элементов из V, коммутирующих с каждым из них, задаётся системой из $(k-1)t$ линейных уравнений

$$\varphi_i(\bar{x}_j, \bar{y}) = 0, \quad i = 1, \ldots, t, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

и поэтому имеет размерность не менее $m-(k-1)t$. Если теперь $m-(k-1)t \geqslant k$, то в V существует k линейно независимых попарно коммутирующих между собой элементов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$, а в $\mathfrak{g}$ существует абелева подалгебра размерности $s = k+t$, порождённая элементами $\bar{x}_i$ и $\mathfrak{z}$.

Выберем максимальное такое k, т. е. k, удовлетворяющее неравенствам $m-(k-1)t \geqslant k$ и $m-kt \leqslant k$. Тогда

$$\dim \mathfrak{g} = m + t \leqslant kt + k + t = (s-t)t + s \leqslant \frac{s^2}{4} + s.$$

Таким образом, мы доказали теорему для $f = l_K^n$. При $f = a_K^n$ теорема следует из предыдущих рассуждений аналогично тому, как лемма 8 вытекает из леммы 1, а при $f = g_K^n$ — как следствие 1 из теоремы 1, с учётом того, что касательная алгебра нильпотентной ступени 2 группы Ли также 2-нильпотентна. $\square$

Автор выражает благодарность А. Ю. Ольшанскому за постановку задачи, внимание к работе и ценные советы, а также А. Миносяну и И. В. Аржанцеву за полезные замечания.

Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1976.

[2] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: УРСС, 1995.

[3] Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1945. — Т. 9, № 4. — С. 291—300.

[4] Ольшанский А. Ю. К вопросу о числе порождающих и порядках абелевых подгрупп конечных p-групп // Мат. заметки. — 1978. — Т. 23, № 3. — С. 337—341.

[5] Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983.

[6] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.

[7] Milenteva M. V. On the torsion-free ranks of finitely generated nilpotent groups and of their Abelian subgroups // J. Group Theory. — 2004. — Vol. 7, no. 3. — P. 403—408.