Первичный радикал градуированных Ω-групп*

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@tula.net

С. А. ПИХТИЛЬКОВ
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: spikhtilkov@tula.net

УДК 512.552

Ключевые слова: первичный радикал, градуированная Ω-группа.

Аннотация

В работе вводится класс градуированных Ω-групп, который включает в себя группы, ассоциативные, конформные и вёртексные алгебры, алгебры Ли и градуированные алгебры. Определён градуированный первичный радикал градуированной Ω-группы и дано его поэлементное описание. Показано, что градуированный первичный радикал градуированной Ω-группы с условием конечности совпадает с нижним слабо разрешимым (в смысле Парфёнова) радикалом.

Abstract

A. V. Mikhalev, I. N. Balaba, S. A. Pikhtilkov, Prime radicals of graded Ω-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 159—174.

In this paper, we introduce the class of graded Ω-groups, which includes: groups; associative, conformal and vertex algebras; Lie algebras and graded algebras. The graded prime radical of a graded Ω-group is defined, and its elementwise characterization is given. It is shown that the graded prime radical of a graded Ω-groups with a finiteness condition coincides with the lower weakly solvable (in Parfyonov sense) radical.

Первичный радикал исследовался для различных алгебраических систем: ассоциативных алгебр и l-колец [11, 14, 19], групп, Ω-групп и Ω-l-групп [7—10, 20, 21, 24, 29], неассоциативных алгебр [12], специальных алгебр Ли [5, 6].

Представляет интерес изучение первичного радикала для ряда классов градуированных Ω-групп, включающих в себя ассоциативные алгебры, группы, алгебры и супералгебры Ли, конформные алгебры. Была найдена поэлементная характеризация первичного радикала для ассоциативных алгебр [11, 14], групп

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00672.

и Ω-групп [21, 24]. Мы рассмотрим поэлементную характеризацию градуированного первичного радикала по аналогии с тем, как это было сделано для Ω-групп [21].

Определение. Под градуированной Ω-группой (см. [13]) везде далее мы будем понимать группу A (возможно, некоммутативную) с аддитивной записью и нейтральным элементом 0, градуированную группой G, в которой задана, помимо сложения, ещё система n-арных алгебраических операций Ω, причём для всех $\omega \in \Omega$ должно выполняться условие $(0, 0, \ldots, 0)\omega = 0$.

Множество операций Ω непустое и содержит хотя бы одну n-арную операцию, у которой $n \geqslant 2$.

Группа A раскладывается в прямую сумму нормальных подгрупп A_g, $g \in G$, называемых однородными компонентами.

Для всех $a_1 \in A_{g_1}$, $a_2 \in A_{g_2}, \ldots$, $a_n \in A_{g_n}$ и любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ выполнено условие $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\omega \in A_{g_1 g_2 \ldots g_n}$.

Если в дополнение к указанным свойствам выполнено условие, что для любого конечного множества $X \subseteq A$ и для всех $n \geqslant 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$, $\omega \in \Omega$ множество элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\omega$ конечно, то скажем, что градуированная Ω-группа A удовлетворяет условию конечности.

Градуированная Ω-группа может также удовлетворять условиям, превращающим её в ассоциативную алгебру ($G = \{e\}$), неассоциативную алгебру, супералгебру, конформную или вёртексную алгебры. Если система операций Ω состоит из операции коммутирования $[a, b] = a + b - a - b$, $a, b \in A$, и $G = \{e\}$, то A является группой.

Элементы множества
$$h(A) = \bigcup_{g \in G} A_g$$
называются однородными элементами градуированной Ω-группы A, а отличный от 0 элемент $a_g \in A_g$ называется однородным элементом степени g.

Любой отличный от 0 элемент $a \in A$ имеет единственное представление в виде конечной суммы ненулевых однородных элементов, т. е.
$$a = a_{g_1} + a_{g_2} + \ldots + a_{g_n},$$
где $a_g \in A_g$. Элементы a_{g_i} в таком разложении называются однородными компонентами элемента a.

Определение. Пусть A — градуированная Ω-группа. Непустое подмножество $I \subseteq A$ называется градуированным идеалом (см. [13]), если выполнены следующие условия:

1) подмножество I является нормальной подгруппой аддитивной группы A;
2) для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$, любого элемента $a \in I$ и любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ должно иметь место включение
$$-(x_1, x_2, \ldots, x_n)\omega + (x_1, \ldots, x_{i-1}, a + x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\omega \in I;$$

3) если элемент $x \in I$ является суммой однородных элементов, т. е.

$$x = x_{g_1} + x_{g_2} + \ldots + x_{g_n}, \quad x_{g_i} \in A_{g_i}, \quad g_i \in G,$$

то все x_{g_i} принадлежат I.

Все рассматриваемые далее идеалы являются градуированными.

Для групп введённое понятие идеала совпадает с нормальной подгруппой, для колец — с двусторонним идеалом.

Скажем, что гомоморфизм $f\colon A \to B$ двух градуированных Ω-групп сохраняет градуировку, если $f(A_g) \subseteq B_g$ для всех $g \in G$. Ядром $\operatorname{Ker} f$ гомоморфизма f назовём множество всех таких элементов $a \in A$, что $f(a) = 0$. Ясно, что ядра сохраняющих градуировку гомоморфизмов градуированной Ω-группы являются градуированными идеалами.

Пусть $I \subseteq A$ — градуированный идеал. Тогда отношение

$$a \sim b \iff a - b \in I$$

является конгруэнцией на A, т. е. сохраняет все операции [13]. Фактор-множество $A/{\sim}$ является градуированной Ω-группой, называется Ω-фактор-группой Ω-группы A по идеалу I и обозначается A/I. Если $\bar{A} = A/I$ — Ω-фактор-группа градуированной Ω-группы A, а J — градуированный идеал в A, то через $\bar{J}$ будем обозначать образ идеала J при каноническом гомоморфизме $A \to A/I$. Заметим, что сумма $I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$ градуированных идеалов I и J является градуированным идеалом (см. [13] для идеалов без градуировки).

Обозначим через (a) градуированный идеал градуированной Ω-группы A, порождённый элементом $a \in A$.

Далее изложение следует классической схеме построения теории первичного радикала [1, 12]. Доказательства результатов приведены для удобства чтения и потому, что рассматривается градуированный случай.

Определение. Пусть $I, J \subseteq A$ — градуированные Ω-подгруппы градуированной Ω-группы A. Назовём взаимным коммутантом $[I, J]$ этих Ω-групп Ω-подгруппу Ω-группы A, порождённую в ней множеством элементов $(c_1, c_2, \ldots, c_n)\omega$, где $n \geqslant 2$, $\omega \in \Omega$, элементы c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат I или J, при этом элементы как I, так и J обязательно встречаются среди c_i. Ω-подгруппу $[I, I]$ обозначим через I^2.

Определение. Элемент a градуированной Ω-группы A называется строго энгелевым, если в любой последовательности $a_0, a_1, \ldots$ элементов Ω-группы A, удовлетворяющей условию $a_0 = a$, $a_{i+1} \in (a_i)^2$, $i = 0, 1, \ldots$, начиная с некоторого номера все элементы равны 0.

В [21, 29] даётся следующее определение Ω-первичной и Ω-полупервичной Ω-группы.

Определение. Ω-группа A называется Ω-первичной (Ω-полупервичной), если для любой операции $\omega \in \Omega$ и любых идеалов $I_1, \ldots, I_n \subseteq A$ ($I \subseteq A$) из $(I_1, \ldots, I_n)\omega = 0$ ($(I, \ldots, I)\omega = 0$) следует, что $I_j = 0$ для некоторого $j = 1, 2, \ldots, n$ ($I = 0$).

Дадим более слабое определение первичности и полупервичности. Так как в дальнейшем мы будем пользоваться вторым определением первичности, сформулируем его для градуированных идеалов.

Определение. Скажем, что градуированная Ω-группа A является первичной, если для любых двух градуированных идеалов $I, J \subseteq A$ из равенства $[I, J] = 0$ следует, что $I = 0$ или $J = 0$. Скажем, что Ω-группа A полупервичная, если из равенства $I^2 = 0$ следует, что $I = 0$.

Определение. Скажем, что градуированный идеал P градуированной Ω-группы A является первичным, если Ω-фактор-группа A/P является первичной.

Выявим логическую связь между двумя определениями первичности для Ω-групп без градуировки.

Предложение 1. *Пусть A — Ω-группа с непустым множеством операций.*

1. *Если Ω-группа A является Ω-первичной, то она является первичной.*
2. *Пусть множество Ω состоит из одной n-арной операции ω ($n \geqslant 2$), которая даёт значение нуль, если хотя бы один из аргументов равен нулю. Тогда определения Ω-первичности и первичности эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть Ω-группа A является Ω-первичной.

Предположим, что для некоторых идеалов I и J Ω-группы A справедливо $[I, J] = 0$. Тогда для любой операции $\omega \in \Omega$ выполнено равенство $(I, J, \ldots, J)\omega = 0$. По Ω-первичности A имеем $I = 0$ или $J = 0$. Следовательно, Ω-группа A является первичной.

2. Пусть $\Omega = \{\omega\}$ и Ω-группа A является первичной. Тогда она является Ω-полупервичной. Это следует из совпадения поэлементных описаний Ω-первичного и первичного радикалов Ω-групп (см. [21, 29] и поэлементное описание первичного радикала ниже). Тогда Ω-группа A представима в виде подпрямого произведения Ω-первичных Ω-групп, т. е. $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, где A_λ — Ω-первичные Ω-группы.

Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — идеалы Ω-группы A и $(I_1, \ldots, I_n)\omega = 0$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $j \in \{1, \ldots, n\}$, такое что образ $\bar{I}_j$ идеала I_j в Ω-группе A_λ равен нулю.

Рассмотрим коммутант $K = [(\ldots([([I_1, I_2]), I_3]), \ldots), I_n]$, где $([I_1, I_2])$ означает идеал, порождённый коммутантом $[I_1, I_2]$. Поскольку операция ω даёт нуль, если хотя бы один из аргументов равен нулю, то образ $\bar{K}$ идеала K равен нулю в каждой Ω-группе A_λ ($\lambda \in \Lambda$). Следовательно, $K = 0$, откуда в силу первичности Ω-группы A получаем, что $I_j = 0$ для некоторого $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Следующий пример показывает, что если $|\Omega| \geqslant 2$, то определения первичности и Ω-первичности не являются эквивалентными.

Пример. Пусть A — первичное кольцо. Определим на A ещё одну бинарную операцию ω_2, полагая $(a, b)\omega_2 = 0$ для любых $a, b \in A$. Тогда A становится Ω-группой, сигнатура $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ которой состоит из двух бинарных операций, где $(a,b)\omega_1 = ab$. Легко видеть, что в этом случае A является первичной, но не является Ω-первичной Ω-группой.

Определение. Назовём градуированным первичным радикалом $P(A)$ градуированной Ω-группы A пересечение всех градуированных первичных идеалов градуированной Ω-группы A.

Замечание. Пусть $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка градуированных первичных идеалов в градуированной Ω-группе A. Тогда их пересечение является градуированным первичным идеалом. Следовательно, согласно лемме Цорна каждый градуированный первичный идеал содержит минимальный градуированный первичный идеал. Поэтому градуированный первичный радикал — это пересечение минимальных градуированных первичных идеалов.

Теорема 1. *Градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω-группы A совпадает со множеством всех её строго энгелевых элементов.*

Доказательство. 1. Докажем сначала, что элемент, который не принадлежит градуированному первичному радикалу, не является строго энгелевым.

Пусть $a \notin P(A)$. Тогда существует градуированный первичный идеал $I \subseteq A$, такой что $a \notin I$. В этом случае $\overline{(a)}^2 \neq \bar{0}$ в Ω-фактор-группе A/I. Следовательно, множество $(a)^2$ не содержится в I. Пусть $a_0 = a$. Возьмём любой элемент $a_1 \in (a)^2 \backslash I$. Элемент a_1 не принадлежит градуированному первичному радикалу $P(A)$.

Продолжая этот процесс, построим последовательность $a_0 = a, a_1, \ldots$, где $a_{i+1} \in (a_i)^2$ $(i = 0, 1, \ldots)$, ни один элемент которой не принадлежит $P(A)$. Следовательно, элемент a не является строго энгелевым.

2. Пусть теперь элемент $a \in A$ не является строго энгелевым. Тогда существует последовательность $a_0 = a, a_1, \ldots$, такая что $a_{i+1} \in (a_i)^2$ $(i = 0, 1, \ldots)$, все элементы которой отличны от 0. Рассмотрим максимальный градуированный идеал I в A, не содержащий ни одного элемента последовательности $a_0, a_1, \ldots$. Такой идеал существует согласно лемме Цорна.

Пусть U, V — два градуированных идеала, строго содержащие идеал I. Тогда найдутся натуральные числа k и l, такие что $a_k \in U$ и $a_l \in V$. Пусть $m = \max(k, l)$. Тогда все элементы последовательности a_i, $i \geqslant m$, начиная с номера $m+1$ лежат в пересечении $U \cap V$ и в $[U, V]$. Это означает, что взаимный коммутант $[\bar{U}, \bar{V}]$ образов $\bar{U}$, $\bar{V}$ идеалов U, V в Ω-фактор-группе A/I не равен 0. Мы доказали первичность идеала I. Следовательно, $a \notin P(A)$. $\square$

Теорема 2. *Градуированная Ω-группа A является полупервичной тогда и только тогда, когда её градуированный первичный радикал $P(A)$ равен* 0.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Градуированная Ω-группа A является полупервичной тогда и только тогда, когда для всех $a \in A$ из равенства $(a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$.*

Доказательство. 1. Пусть Ω-группа A является полупервичной. Предположим, что для некоторого $a \in A$ справедливо равенство $(a)^2 = 0$. Тогда из полупервичности Ω-группы A следует, что $(a) = 0$. Следовательно, $a = 0$.

2. Пусть для всех $a \in A$ из равенства $(a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$. Пусть идеал I удовлетворяет условию $I^2 = 0$ и $a \in I$ — произвольный элемент. Тогда $(a) \subseteq I$, следовательно, $(a)^2 = 0$. Получим $a = 0$. Так как элемент идеала был произвольным, получаем $I = 0$. □

Лемма 2. *Пусть I — такой градуированный идеал градуированной Ω-группы A, что Ω-фактор-группа A/I полупервична и $b \notin I$. Тогда существует градуированный первичный идеал P, такой что $P \supseteq I$ и $b \notin P$.*

Доказательство. Пусть $b_0 = b$. Из полупервичности Ω-группы A/I следует, что идеал $(b_0)^2$ не содержится в I.

Пусть $b_1 \in (b_0)^2 \setminus I$. Тогда $(b_1)^2$ не содержится в I. Выберем элемент $b_2 \in \in (b_1)^2 \setminus I$ и т. д. Таким образом будет построена последовательность, начинающаяся с элемента b, такая что $b_{i+1} \in (b_i)^2$ $(i = 0, 1, \ldots)$ и ни один элемент этой последовательности не принадлежит идеалу I.

Рассмотрим максимальный идеал P, содержащий идеал I и не содержащий ни один из элементов $b_0, b_1, \ldots$. Он существует согласно лемме Цорна.

Так же, как при доказательстве теоремы 1, можно показать, что P является градуированным первичным идеалом, и при этом $b \notin P$. □

Доказательство теоремы 2. 1. Пусть первичный радикал $P(A)$ Ω-группы A равен 0 и $a \in A$ — произвольный элемент, отличный от 0. Согласно теореме 1 элемент a не является строго энгелевым. Следовательно, существует последовательность $a_0, a_1, \ldots$, такая что $a_0 = a$, $a_{i+1} \in (a_i)^2$ $(i = 0, 1, \ldots)$, все элементы которой отличны от 0. Получим $(a)^2 \neq 0$. Из леммы 1 следует полупервичность Ω-группы A.

2. Пусть алгебра A полупервична и $a \in A$, $a \neq 0$. Согласно лемме 2 существует градуированный первичный идеал $P \subseteq A$, такой что $a \notin P$. Следовательно, элемент a не принадлежит градуированному первичному радикалу Ω-группы A. Отсюда следует, что градуированный первичный радикал Ω-группы A равен 0. □

Для неассоциативных алгебр была построена теория ниль-радикалов по аналогии с ассоциативными алгебрами (см. [12]).

В 1971 г. В. А. Парфёнов [22] предложил рассматривать для алгебр Ли слабо разрешимый радикал. В. А. Парфёнов ввёл слабо разрешимый радикал, так как в то время не было известно, является ли сумма локально разрешимых идеалов алгебры Ли локально разрешимым идеалом (проблема Амайо—Стьюарта [25]). Проблема Амайо—Стьюарта была решена отрицательно В. Н. Латышевым, А. В. Михалёвым и С. А. Пихтильковым [16]. Это означает, что для алгебр Ли построить теорию локально разрешимого радикала нельзя.

Для групп было показано, что произведение локально разрешимых нормальных подгрупп может не являться локально разрешимой подгруппой (см. [27]).

Термин «слабо разрешимый радикал» представляется нам более уместным, чем «ниль-радикал», так как для алгебр Ли понятие разрешимости не совпадает с понятием нильпотентности.

Мы распространим понятие слабо разрешимого радикала на градуированные Ω-группы. И. П. Шестаков сообщил нам, что он также исследовал верхний и нижний слабо разрешимые радикалы для неассоциативных алгебр.

Определение. Назовём градуированную Ω-группу A разрешимой ступени k, если существует такое натуральное k, что $A_k = 0$, $A_{k-1} \neq 0$, где

$$A_0 = A,\ A_1 = [A_0, A_0], \ldots,\ A_{i+1} = [A_i, A_i], \ldots .$$

Определение. Назовём градуированную Ω-группу локально разрешимой, если любая её конечно порождённая подгруппа разрешима.

Определение. Пусть A — градуированная Ω-группа, X — подмножество в A. Обозначим через $X^{(0)}, X^{(1)} = X', \ldots, X^{(k)}, \ldots$ следующие множества:

$$X^{(0)} = X,$$
$$X^{(k+1)} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\omega \mid n \geqslant 2,\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in X,\ \omega \in \Omega\}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Определение. Назовём градуированную Ω-группу A слабо разрешимой, если для любого конечного подмножества $X \subseteq A$ существует такое натуральное k, что $X^{(k)} = 0$.

Пусть A — градуированная Ω-группа с условием конечности, $I \subseteq A$ — градуированный слабо разрешимый идеал и Ω-группа A/I слабо разрешима. Несложно проверить, что тогда и Ω-группа A является слабо разрешимой (см. [22]). Сумма градуированных слабо разрешимых идеалов является градуированным слабо разрешимым идеалом для произвольной градуированной Ω-группы с условием конечности.

В. А. Парфенов показал [22], что класс всех слабо разрешимых алгебр Ли является радикальным в универсальном классе всех алгебр Ли. То же можно утверждать и относительно градуированных Ω-групп с условием конечности.

Обозначим через $T(A)$ произведение всех градуированных слабо разрешимых идеалов градуированной Ω-группы A с условием конечности. Назовём наибольший градуированный слабо разрешимый идеал $T(A)$ *верхним градуированным слабо разрешимым радикалом градуированной Ω-группы A*. В некотором смысле он является аналогом локально нильпотентного радикала ассоциативных алгебр.

Так же, как и для ассоциативных алгебр [11], для градуированной Ω-группы A с условием конечности можно определить нижний градуированный слабо разрешимый радикал.

По аналогии с построением нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах обозначим через $\rho(A)$ сумму всех таких градуированных идеалов I градуированной Ω-группы A с условием конечности, что $I^2 = 0$. Так как сумма двух градуированных разрешимых идеалов градуированной Ω-группы A является градуированным разрешимым идеалом, градуированный идеал $\rho(A)$ является локально разрешимым.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа δ идеал $\rho(\delta)$ следующим образом:

1) $\rho(0)=0$;
2) предположим, что $\rho(\delta)$ определено для всех $\delta<\beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом:
   а) если $\beta=\gamma+1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ — это такой градуированный идеал Ω-группы A, что $\rho(\beta)/\rho(\gamma))=$ $=\rho(A/\rho(\gamma))$;
   б) если β — предельное порядковое число, то
$$\rho(\beta)=\bigcup_{\gamma<\beta}\rho(\gamma).$$

Существует такое β, что $\rho(\beta)=\rho(\beta+1)$. Скажем, что $\rho(\beta)$ — *нижний градуированный слабо разрешимый радикал градуированной Ω-группы A с условием конечности*.

Заметим, что все $\rho(\delta)$ являются градуированными слабо разрешимыми идеалами A.

Как мы покажем далее, одним из примеров градуированной Ω-группы с условием конечности являются алгебры Ли. Расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры может не быть локально разрешимым [25], но оно будет слабо разрешимым [22].

Определённый интерес представляет исследование соотношения между градуированным первичным и нижним градуированным слабо разрешимым радикалами. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Градуированный первичный радикал $P(A)$ произвольной градуированной Ω-группы A с условием конечности совпадает с нижним градуированным слабо разрешимым радикалом.*

Доказательство. 1. Так как согласно теореме 2 Ω-группа $A/P(A)$ является полупервичной, то $\rho(A/P(A))=\bar{0}$. Отсюда $\overline{\rho(A)}\subseteq\rho(A/\rho(A))$ и, следовательно, $\rho(A)\subseteq P(A)$.

Факторизуя Ω-группу A по идеалу $\rho(A)$, получим $\rho(2)\subseteq P(A)$ и т. д. С помощью трансфинитной индукции убеждаемся в том, что нижний градуированный слабо разрешимый радикал содержится в градуированном первичном.

2. Поскольку Ω-фактор-группа по нижнему градуированному слабо разрешимому радикалу является полупервичной, то из леммы 2 следует, что первичный градуированный радикал $P(A)$ содержится в нижнем слабо разрешимом градуированном радикале. $\square$

Следствие 1. *Градуированный первичный радикал $P(A)$ произвольной градуированной Ω-группы A с условием конечности является слабо разрешимым.*

Вопрос о совпадении или несовпадении верхнего и нижнего градуированных слабо разрешимых радикалов придётся решать отдельно для каждого класса Ω-групп. Также представляет интерес следующий вопрос:

является ли градуированный первичный радикал локально разрешимым? $(*)$

Следующая теорема является аналогом теорем А. М. Бабича [2] и И. П. Шестакова [12, теорема 8.2.8]. Для алгебр Ли её аналог был анонсирован в [5].

Теорема 4. *Пусть A — градуированная Ω-группа с условием конечности. Тогда Ω-группа $A/T(A)$ представима в виде подпрямого произведения таких градуированных первичных Ω-групп A_β, что $T(A_\beta) = 0$.*

Доказательство. Доказательство А. М. Бабича может быть проведено и для класса градуированных Ω-групп с условием конечности. Для полноты изложения приведём его.

Обозначим через $\{P_\beta\}$ совокупность всех таких градуированных первичных идеалов P_β, что $T(A/P_\beta) = \bar{0}$. Пусть $P = \bigcap\{P_\beta \mid P_\beta \in \{P_\beta\}\}$. Очевидно, что $T(A) \subseteq P$, так как $T(A) \subseteq P_\beta$.

Предположим, что $T(A) \subset P$. Тогда существует элемент $b \in P$, $b \notin T(A)$. Отсюда следует, что существует конечное подмножество $X \subseteq (b)$, такое что $X^{(k)} \nsubseteq T(A)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Рассмотрим множество $\{Q_\gamma\}$ таких градуированных идеалов Ω-группы A, что

1) $T(A) \subseteq Q_\gamma$;

2) $X^{(k)} \nsubseteq Q_\gamma$ для всех $k = 0, 1, \ldots$.

Очевидно, что $T(A) \in \{Q_\gamma\}$.

Если имеется бесконечная цепочка $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$ вложенных друг в друга идеалов из $\{Q_\gamma\}$, то их объединение Q не может содержать $X^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$. Это следует из того, что все множества $X^{(k)}$ конечны. Следовательно, к совокупности $\{Q_\gamma\}$ применима лемма Цорна, т. е. существует максимальный элемент $P_0 \in \{Q_\gamma\}$. Легко видеть, что A/P_0 — первичная Ω-группа. В самом деле, если даны градуированные идеалы $C \supset P_0$, $D \supset P_0$, то найдутся натуральные числа k_1 и k_2, для которых $X^{(k_1)} \subseteq C$, $X^{(k_2)} \subseteq D$. Положим для определённости $k_1 < k_2$. Тогда $X^{(k_2+1)} \subseteq [C, D]$, т. е. $[C, D] \nsubseteq P_0$.

Покажем, что $T(A/P_0) = \bar{0}$. Действительно, если $T(A/P_0) \neq \bar{0}$, имеем $f^{-1}(T(A/P_0)) \supset P_0$. Так как идеал P_0 максимален, $X^{(l)} \subseteq f^{-1}(T(A/P_0))$. Тогда $\bar{X}^{(l)} \subseteq T(A/P_0)$. Отсюда следует, что для некоторого натурального $m > k$ имеет место равенство $\bar{X}^{(m)} = \bar{0}$, т. е. $X^{(m)} \subseteq P_0$, что невозможно.

Таким образом, мы построили градуированный идеал $P_0 \in \{Q_\gamma\}$, который не содержит идеала $P = \bigcap\{P_\beta \mid P_\beta \in \{P_\beta\}\}$. Противоречие получено при предположении, что $T(A) \subset P$. Поэтому $P = T(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Следующая теорема является аналогом теоремы К. А. Жевлакова [12].

Теорема 5. *Градуированный первичный радикал градуированной Ω-группы A с условием максимальности на градуированные идеалы является разрешимым.*

Доказательство. Пусть R — максимальный градуированный разрешимый идеал Ω-группы A. Сумма двух градуированных разрешимых идеалов является градуированным разрешимым идеалом. Следовательно, градуированный разрешимый идеал R является наибольшим. Расширение градуированной разрешимой Ω-группы A при помощи разрешимой является разрешимой. Тогда Ω-фактор-группа A/R не содержит таких градуированных идеалов I, что $I^2 = 0$, и, следовательно, является полупервичной. Из теоремы 2 следует, что градуированный первичный радикал $P(A)$ Ω-группы A содержится в наибольшем градуированном разрешимом идеале R. $\square$

Рассмотрим теперь примеры градуированных Ω-групп.

Ассоциативные алгебры и градуированные ассоциативные алгебры. Пусть A — абелева группа по сложению. Система алгебраических операций Ω состоит из одной бинарной операции — умножения — и операций умножения на элементы поля F. Группа G состоит из одного нейтрального элемента для ассоциативных алгебр и выбирается произвольно для градуированных ассоциативных алгебр. Операции удовлетворяют обычным для ассоциативных алгебр условиям: операция умножения ассоциативна и дистрибутивна по отношению к сложению; операция умножения на элементы поля F удовлетворяет обычным условиям для алгебр: $\delta(ab) = (\delta a)b = a(\delta b)$, $a, b \in A$, $\delta \in F$; множество A по отношению к операциям $+$ и умножения на элементы поля F является векторным пространством.

Верхний слабо разрешимый радикал (в смысле нашего определения) совпадает с локально нильпотентным радикалом Левицкого. Первичный радикал является локально нильпотентным, что даёт положительный ответ на вопрос $(*)$. Это связано с тем, что для ассоциативных алгебр понятия слабой разрешимости в нашем смысле и локальной нильпотентности совпадают. Известно, что в ассоциативных алгебрах радикал Левицкого может отличаться от первичного [1].

Градуированный первичный радикал градуированных ассоциативных колец и алгебр исследовался в работах [3, 30, 32] и др. В [3] дано описание однородных элементов градуированного первичного идеала градуированного кольца. М. Коэн и С. Монтгомери [30], в частности, показали, что градуированный первичный радикал градуированной алгебры совпадает с наибольшим градуированным идеалом, содержащимся в её первичном радикале. Следовательно, он является локально нильпотентным.

Построенную теорию первичного радикала можно применять и для неассоциативных алгебр. Мы рассмотрим только случаи алгебр и супералгебр Ли, конформных и вёртексных алгебр.

Алгебры и супералгебры Ли. Пусть A — абелева группа по сложению. Система алгебраических операций Ω состоит из одной бинарной операции — коммутирования — и операций умножения на элементы поля F. Группа G конечная абелева. Операции удовлетворяют обычным для алгебр и супералгебр Ли условиям:

1а) для алгебр Ли операция коммутирования удовлетворяет тождеству антикоммутативности и тождеству Якоби и группа G состоит из одного элемента;

1б) для супералгебр Ли группа G конечная абелева и однородные элементы удовлетворяют обобщённым тождествам антикоммутативности и Якоби [26]:

(i) $[a,b] + \varepsilon(a,b)[b,a] = 0$;

(ii) $[[a,b],c] = [a,[b,c]] - \varepsilon(a,b)[b,[a,c]]$, где $a \in A_g$, $b \in A_h$, $c \in A_k$, $\varepsilon\colon G \times G \to F^*$ удовлетворяет условиям $\varepsilon(g,h+k) = \varepsilon(g,h)\varepsilon(g,k)$, $\varepsilon(g,h)\varepsilon(h,g) = 1$, здесь $\varepsilon(a,b) = \varepsilon(g,h)$, если $a \in A_g$, $b \in A_h$;

2) операция умножения на элементы поля F удовлетворяет обычным условиям для алгебр: $\delta[a,b] = [\delta a,b] = [a,\delta b]$, $a,b \in A$, $\delta \in F$, множество A по отношению к операциям $+$ и умножения на элементы поля F является векторным пространством.

Заметим, что для цветных супералгебр Ли отображение $\varepsilon\colon G \times G \to F^*$, определённое в аксиоме (ii), должно быть кососимметрической билинейной формой [17, 18].

Из следствия 1 вытекает, что градуированный первичный радикал супералгебры Ли является слабо разрешимым. Пример из [1], показывающий, что радикал Левицкого может не совпадать с первичным, может быть прочитан на языке алгебр Ли. Из этого примера следует, что для супералгебр Ли верхний и нижний слабо разрешимые радикалы могут не совпадать Для супералгебр Ли и цветных супералгебр Ли вопрос ($*$) также решается отрицательно.

Приведём пример алгебры Ли, первичный радикал которой не является локально разрешимым.

Пример. Пусть $L = L(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — свободная алгебра Ли над полем F характеристики 2. В свободной алгебре Ли описан базис Ширшова—Холла [23]. Базис свободной алгебры Ли задаёт множество правильных слов.

Введём на образующих порядок $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Будем считать, что слова большей длины больше слов меньшей длины. При этом слова одинаковой длины упорядочим произвольным образом. Следуя А. И. Ширшову, определим правильные слова следующим образом.

1. Слова длины 1 правильные.
2. Слово $w = [u,v]$, где u и v — правильные слова и $u > v$, правильное. Если при этом $u = [u_1,u_2]$, то $u_2 \leqslant u$.

Пусть $M = [[L,L],[L,L]]$ — коммутант алгебры L второго порядка. Рассмотрим множество коммутаторов

$$W = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}] \mid i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1,\ldots,4\}\},$$

где $n \geqslant 2$. Пусть V — множество слов, образованных из коммутаторов множества W. Множество V порождает M как идеал алгебры L. Пусть

$I_4, I_6, \ldots, I_{2n}, \ldots$ — идеалы алгебры L, порождённые словами из V длины не более $2n$. Тогда $I_4 \subseteq I_6 \subseteq \ldots \subseteq I_{2n} \subseteq \ldots$ и $M = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} I_{2n}$.

Пусть

$$W_n = \{[x_4, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}] \mid i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-1},\ i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, 2\}\},$$

где $n \geqslant 2$. Обозначим

$$W'_n = \{[x_3, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}] \mid i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-1},\ i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, 2\}\},$$

где $n \geqslant 2$. Несложно подсчитать, что $|W_n| = |W'_n| = n$. Слова из множеств W_n и W'_n правильные. Будем считать, что порядок установлен так, что все слова из множества W_n больше слов из W'_n.

Обозначим

$$V_{2n} = \{[w, w'] \mid w \in W_n,\ w' \in W'_n\}.$$

Все слова множества V_{2n} правильные, $|V_{2n}| = n^2$.

Покажем, что ни одно слово множества V_{2n} не принадлежит идеалу I_{n-1}. Для этого произведём отображение образующих алгебры L в следующую алгебру.

Обозначим через A фактор-кольцо кольца многочленов $F[t_1, t_2 \ldots, t_i, \ldots]$ (без свободного члена) по идеалу J, порождённому элементами $t_1^2, t_2^2, \ldots, t_{n-1}^2, t_n^4, \ldots, t_m^4, \ldots$. Пусть $H = \mathrm{sl}(2, F) \otimes_F A$.

Зададим отображение $t_i \to t_{i+1}$. Известно, что отображение образующих кольца многочленов можно продолжить до дифференцирования

$$D\colon F[t_1, \ldots, t_i, \ldots] \to F[t_1, \ldots, t_i, \ldots].$$

Дифференцирование D отображает идеал J в себя. Следовательно, существует дифференцирование $\bar{D}\colon A \to A$, такое что $\bar{D}(\bar{t}_i) = \bar{t}_{i+1}$, где $\bar{t}_i$ $(i = 1, \ldots, n, \ldots)$ — образы переменных t_i при каноническом гомоморфизме $F[t_1, \ldots, t_i, \ldots] \to A$.

Пусть $K = \{\alpha\bar{D} \mid \alpha \in F\}$ — алгебра Ли с нулевым умножением. Рассмотрим полупрямое произведение $S = H\lambda K$. Зададим гомоморфизм $f\colon L \to S$ так, что

$$f(x_1) = f(x_2) = \bar{D}, \quad f(x_3) = \bar{t}_1 e_{12}, \quad f(x_4) = \bar{t}_1 e_{21}.$$

Легко проверить, что $f(I_{2(n-1)}) = 0$ и $f(v) \neq 0$ для всех $v \in V_{2n}$.

А. И. Ширшов показал, что подалгебра свободной алгебры Ли является свободной [23]. Построим в алгебре Ли M множество образующих. Так как алгебра Ли M порождена словами от переменных x_i, множество образующих Y алгебры M можно выбрать так: для каждой натуральной степени, большей либо равной четырём, возьмём правильные слова, которые не выражаются через выбранные слова меньшей степени. Выбор можно обеспечить так, что сначала выбираются слова из идеала I_4, затем из I_6 и т. д. При этом все множества V_{2n} войдут во множество образующих Y.

Введём обозначения для членов производного ряда:

$$M' = [M, M],\ M'' = [M', M'], \ldots,\ M^{(k)} = [M^{(k-1)}, M^{(k-1)}], \ldots.$$

Обозначим через I идеал $I'_4+I''_6+\ldots+I_{2n}^{(n-1)}+\ldots$. Фактор-алгебра M/I является суммой разрешимых идеалов $\bar{I}_4, \bar{I}_6, \ldots$.

На множестве из трёх свободных образующих алгебры Ли можно задать многочлен разрешимости ступени 2, принимающий ненулевое значение, — $[[x_3, x_1], [x_2, x_1]]$. На множестве из n свободных образующих ($n \geqslant 2$) можно задать многочлен разрешимости ступени $n-1$, принимающий ненулевое значение.

В множестве V_{2n} имеется n^2 элементов, являющихся свободными образующими алгебры M. Следовательно, на множестве V_{2n} ($n \geqslant 2$) можно задать многочлен разрешимости ступени $n-2$, принимающий ненулевое значение. Значение этого многочлена не лежит в идеале $I_{2(n-1)}$, так как в записи элементов из $I_{2(n-1)}$ участвует по крайней мере одна образующая, не входящая в множество V_{2n}.

Алгебра Ли $\bar{L} = L/I$ — это расширение алгебры, являющейся суммой разрешимых идеалов, при помощи разрешимой алгебры. Следовательно, алгебра Ли $\bar{L}$ лежит в своём первичном радикале. Алгебра Ли $\bar{L}$ конечно порождённая, неразрешимая, поэтому является искомым примером.

Для следующего класса алгебр Ли верхний и нижний слабо разрешимые радикалы совпадают.

Определение. Алгебра Ли L называется специальной алгеброй или SPI-алгеброй, если существует ассоциативная PI-алгебра A, такая что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ — алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$ [15].

Определение. Назовём алгебру L обобщённо-специальной алгеброй Ли, если присоединённая ассоциативная алгебра $\operatorname{Ad} L$ является PI-алгеброй [5, 6].

Предложение 2 ([5, 6]). *В любой обобщённо-специальной алгебре Ли L над полем локально разрешимый радикал совпадает с верхним и нижним слабо разрешимыми радикалами.*

Таким образом, для обобщённо-специальных алгебр Ли вопрос (∗) решается положительно.

Утверждение о совпадении локально разрешимого радикала с верхним и нижним слабо разрешимыми радикалами было доказано также для обобщённо-специальных супералгебр Ли [4].

Конформные алгебры. Пусть A — абелева группа по сложению. Система алгебраических операций Ω состоит из счётного числа бинарных операций $a \, ⓝ \, b$, $a, b \in A$, $n \in \mathbb{Z}_+$, операций умножения на элементы поля F характеристики нуль и операции D. Группа G состоит из одного нейтрального элемента. Операции удовлетворяют следующим условиям: операция сложения коммутативна; операция умножения на элементы поля F удовлетворяет обычным условиям для алгебр: $\delta(ab) = (\delta a)b = a(\delta b)$, $a, b \in A$, $\delta \in F$; множество A по отношению к операциям $+$ и умножения на элементы поля F является векторным пространством. Операции $a \, ⓝ \, b$ билинейны, $D\colon A \to A$ является линейным оператором, операции $a \, ⓝ \, b$ и D удовлетворяют аксиомам, задающим конформные алгебры [34]:

(C1) существует такое натуральное число $N = N(a, b)$, что $a \, (n) \, b = 0$ для всех $n \geqslant N$;

(C2) $D(a \, (n) \, b) = (D(a) \, (n) \, b + a \, (n) \, (Db)$;

(C3) $(Da) \, (n) \, b) = -na \, (n-1) \, b$ для всех $a, b \in A$.

Аксиома C1 означает, что конформные алгебры являются градуированными Ω-группами с условием конечности. Следовательно, теоремы 3 и 4 имеют место для конформных алгебр и первичный радикал конформной алгебры является слабо разрешимым.

Ответы на вопрос о совпадении или несовпадении верхнего и нижнего слабо разрешимых радикалов для конформных алгебр и на вопрос $(*)$ авторам неизвестны.

Вёртексные алгебры. Пусть A — абелева группа по сложению. Система алгебраических операций Ω состоит из счётного числа бинарных операций $a \, (n) \, b$, $a, b \in A$, $n \in \mathbb{Z}$, операций умножения на элементы поля F характеристики нуль и операции D. Элемент 1, задающий 0-арную операцию, принадлежит A. Группа G состоит из одного нейтрального элемента. Операции удовлетворяют следующим свойствам: операция сложения коммутативна; операция умножения на элементы поля F удовлетворяет обычным условиям для алгебр: $\delta(ab) = (\delta a)b = a(\delta b)$, $a, b \in A$, $\delta \in F$; множество A по отношению к операциям $+$ и умножения на элементы поля F является векторным пространством. Операции $a \, (n) \, b$ билинейны, операция D линейна, операции $a \, (n) \, b$ и D удовлетворяют аксиомам, задающим вёртексные алгебры (см. [28, 31]):

(V1) $a \, (n) \, b = 0$ для всех $a, b \in A$ и $n \geqslant N(a, b)$;

(V2) $1 \, (-1) \, b = b$ и $1 \, (n) \, b = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$;

(V3) $a \, (n) \, 1 = D^{(-n-1)}(a)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ (таким образом, $a \, (n) \, 1 = 0$, если $n \geqslant 0$);

(V4) $a \, (n) \, b = \sum\limits_{s \geqslant 0} (-1)^{s+n+1} D^{(s)}(b \, (n+s) \, a)$ для всех $a, b \in A$, $n \in \mathbb{Z}$;

(V5) $(a \, (n) \, b) \, (m) \, c) = \sum\limits_{s \geqslant 0} (-1)^s \binom{n}{s} \big(a \, (n-s) \, (b \, (m+s) \, c) - (-1)^n (b \, (n+m-s) \, (a \, (s) \, c)\big)$ для $a, b, c \in A$, $m, n \in \mathbb{Z}$, здесь $D^{(i)} = 0$ при $i < 0$, $D^0 = 1$ и $D^{(i)} = \frac{1}{i!} D^i$ при $i > 0$.

Так как множество значений бинарных операций на произвольных элементах $a, b \in A$ может быть бесконечным, для вёртексных алгебр мы можем говорить только о справедливости теорем 1, 2 и 5.

Группы. Пусть A — произвольная группа с аддитивной записью. Система алгебраических операций Ω состоит из одной бинарной операции коммутирования $[a, b] = a + b - a - b$, $a, b \in A$. Группа G состоит из одного нейтрального элемента.

Из следствия 1 вытекает, что первичный радикал группы является слабо разрешимым. Мы также можем утверждать, что фактор-группа по верхнему слабо разрешимому радикалу представима в виде подпрямого произведения первичных групп с единичными слабо разрешимыми нормальными подгруппами и первичный радикал группы с условием максимальности на нормальные подгруппы разрешим.

Ответы на вопрос о совпадении или несовпадении верхнего и нижнего слабо разрешимых радикалов для групп и на вопрос (∗) авторам неизвестны. По аналогии с алгебрами Ли предполагаются отрицательные ответы.

Б. И. Плоткин [33] ввёл понятие верхнего локально нильпотентного радикала группы. Этот радикал является слабо разрешимым, содержится в верхнем слабо разрешимом радикале и содержит первичный радикал. По аналогии с алгебрами Ли предполагается, что верхний локально нильпотентный радикал группы может строго содержать первичный радикал.

Литература

[1] Андрунакиевич В. А„ Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Бабич А. М. О радикале Левицкого // ДАН СССР. — 1959. — Т. 126, № 2. — С. 242—243.

[3] Балаба И. Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец // Труды участников международного семинара «Универсальная алгебра и её приложения», посвящённого памяти Л. А. Скорнякова. — Волгоград, 2000. — С. 21—28.

[4] Балаба И. Н., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных супералгебр Ли // Фундам. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 51—60.

[5] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 1994. — № 1. — С. 233.

[6] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 643—648.

[7] Голубков А. Ю. Первичный радикал группы Шевалле над коммутативным кольцом // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 3. — С. 173—174.

[8] Голубков А. Ю. Первичный (RI^*-разрешимый) радикал унитарной группы над кольцом с инволюцией // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6. вып. 1. — С. 93—119.

[9] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[10] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Элементарная подгруппа унитарной группы над PI-кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — № 1. — С. 30—36.

[11] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[12] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[13] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.

[14] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[15] Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями // Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 821—829.

[16] Латышев В. Н., Михалёв А. В., Пихтильков С. А. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 3. — С. 29—32.

[17] Михалёв А. А. Подалгебры свободных цветных суперaлгебр Ли // Мат. заметки. — 1985. — Т. 37, № 5. — С. 653—661.

[18] Михалёв А. А. Свободные цветные суперaлгебры Ли // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286. — С. 551—554.

[19] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно-упорядоченных колец // Сборник работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[20] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно-упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.

[21] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал Ω-групп и Ω-l-групп // Фундам. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1405—1413.

[22] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[23] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. — 1953. — Т. 33 (75), № 2. — С. 441—452.

[24] Щукин К. И. RI^*-разрешимый радикал групп // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1024—1031.

[25] Amayo R., Stewart I. Infinite-dimensional Lie algebras. — Leyden: Noordhoff, 1974.

[26] Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaitsev M. V. Infinite Dimensional Lie Superalgebras. — De Gruyter, 1992. — (Expositions in Mathematics; Vol. 7).

[27] Baumslag G., Kovacs L. G., Neumann B. H. On products of normal subgroups // Acta Sci. Math. — 1965. — Vol. 26. — P. 145—147.

[28] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F. Gröbner–Shirshov bases and composition lemma for associative conformal algebras: An example // Contemp. Math. — 2000. — Vol. 264. — P. 63—90.

[29] Buys A., Gerber G. K. The prime radical for Ω-groups // Comm. Algebra. — 1982. — Vol. 10. — P. 1089—1099.

[30] Cohen M., Montgomery S. Group-graded rings, smash products, and group action // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 282, no. 1. — P. 237—257.

[31] Kac V. G. Vertex Algebras for Beginners. — Providence: Amer. Math. Soc., 1996. — (University Lecture Series; Vol. 10).

[32] Liu S.-X., van Oystaeyen F. Group-graded rings, smash product and additive categories // Perspectives in Ring Theory. — Kluwer Academic, 1988. — P. 299—300.

[33] Plotkin B. I. Notes on Engel groups and Engel elements in groups. Some generalizations // Изв. УрГУ. — 2005. — № 36. — С. 153—166.

[34] Roitman M. On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 217. — P. 496—527.