Первичный радикал pl-групп

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: e.shir@relcom.ru

УДК 512.545

Ключевые слова: первичный радикал, частично упорядоченная группа, положительный конус, решёточно упорядоченная группа, группа Рисса.

Аннотация

В теории колец и групп изучается понятие первичного радикала. В работе рассматривается возможность обобщения этого понятия на класс направленных групп. Получен ряд результатов о выпуклых направленных подгруппах AO-групп. Описаны первичные радикалы pl-групп.

Abstract

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, The prime radical of pl-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 193—199.

The concept of prime radicals is important in the study of rings and groups. The purpose of this paper is to investigate a generalization of this concept to directed groups. Some results are obtained concerning convex directed subgroups of AO-groups. Prime radicals of pl-groups are described.

1. Введение

Известно, что первичный радикал кольца совпадает с совокупностью строго нильпотентных элементов (см., например, [2]). В l-кольце l-первичный радикал является совокупностью элементов, модули которых строго нильпотентны [3].

Понятие первичного радикала группы было введено в работе К. К. Щукина [8] (по предложению А. Г. Куроша). Первичным радикалом группы G называется пересечение таких её нормальных подгрупп H, для которых взаимный коммутант двух любых неединичных нормальных подгрупп фактор-группы G/H отличен от $\{H\}$. Первичный радикал группы является совокупностью строго энгелевых элементов. (Элемент $a \in G$ является строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [[g_i, a_i], a_i]$, где $g_i \in G$ и $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.)

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 193—199.

В l-группе l-первичный радикал определяется как пересечение таких l-идеалов H группы G, для которых взаимный коммутант двух любых неединичных l-идеалов фактор-группы G/H отличен от $\{H\}$ [4]. При этом l-первичный радикал оказался совокупностью l-строго энгелевых элементов l-группы G. (Элемент $a \in G$ называется l-строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i x_i g_i^{-1}, y_i]$, где $g_i \in G$ и $e \leqslant x_i, y_i \leqslant |a_i|$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.)

Целью данной работы является характеризация аналога первичного радикала группы в классе направленных групп.

В работе используется общепринятая для упорядоченных групп и алгебраических систем терминология (см., например, [1, 5]).

Пусть G — частично упорядоченная группа (po-группа), e — единица группы G, $G^+ = \{x \in G \mid e \leqslant x\}$ — положительный конус группы G. Будем обозначать $\mathcal{L}(G)$ множество всех выпуклых направленных подгрупп po-группы G.

Напомним, что элементы $a, b \in G^+$ называются *почти ортогональными* ($a \perp b$) в po-группе G, если из $c \leqslant a, b$ следует $c^n \leqslant a, b$ для всех элементов $c \in G$ и всех целых чисел $n > 0$. po-группа G называется *AO-группой*, если любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G.

Предложение 1 ([11, лемма 3.4]). *Пусть G — AO-группа, $a \in G^+$, $a \neq e$. Тогда существует подгруппа $[a] \in \mathcal{L}(G)$, положительный конус которой равен*

$$\{x \in G^+ \mid x \leqslant a^m \text{ для некоторого целого числа } m > 0\}.$$

Во втором разделе показано, что любому элементу g из AO-группы G можно поставить в соответствие подгруппу $G(g) \in \mathcal{L}(G)$, где $G(g) = [ab]$ для любой пары почти ортогональных элементов $a, b \in G^+$, для которой $g = ab^{-1}$.

Определение 2. Скажем, что подгруппа H в AO-группе G удовлетворяет условию $(*)$, если для любых элементов $x, h \in G$ из включения $G(x) \subseteq G(h)$ следует $x \in H$, как только $h \in H$.

Теорема 3. *Для подгруппы H в AO-группе G являются равносильными следующие условия*:

1) $H \in \mathcal{L}(G)$;
2) *H удовлетворяет условию $(*)$.*

Напомним, что направленная группа G называется *группой Рисса*, если она обладает следующим интерполяционным свойством: для любых элементов a_1, a_2, b_1, b_2 группы G из справедливости неравенств $a_i \leqslant b_j$ (для всех $i = 1, 2$, $j = 1, 2$) следует существование в группе G элемента c, для которого имеют место неравенства $a_i \leqslant c \leqslant b_j$ (для всех $i = 1, 2$, $j = 1, 2$). Группами Рисса такие группы впервые назвал Фукс (см. [5, 9]). Нормальная подгруппа $M \in \mathcal{L}(G)$ называется *o-идеалом* po-группы G. Группа Рисса, являющаяся AO-группой, называется *pl-группой*.

Обозначим через I_g наименьший o-идеал, содержащий элемент g в pl-группе G. В третьем разделе приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть G — pl-группа, $g \in G$. Тогда I_g совпадает с подгруппой, порождённой множеством $\{a^{-1}G(g)a \mid a \in G\}$.*

Определение 5. Назовём pl-группу pl-первичной, если взаимный коммутант двух любых её неединичных o-идеалов отличен от $\{e\}$.

o-идеал M в pl-группе G будем называть pl-первичным идеалом, если фактор-группа G/M является pl-первичной группой.

Пересечение всех pl-первичных идеалов pl-группы G будем называть pl-первичным радикалом ($pl\text{-rad}(G)$) группы G.

Определение 6. Элемент a в pl-группе G будем называть pl-строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i^{-1}x_ig_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$, начиная с некоторого места все элементы равны e.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 7. *Для любой pl-группы G её pl-первичный радикал $pl\text{-rad}(G)$ является совокупностью pl-строго энгелевых элементов группы G.*

Из теорема легко выводится следствие.

Следствие 8. *pl-первичный радикал pl-группы G/M, где $M = pl\text{-rad}(G)$, равен единице группы G/M.*

Отметим, что так как всякая l-группа является pl-группой и любой l-идеал является o-идеалом, то pl-первичный радикал l-группы является её l-первичным радикалом.

2. Подгруппы AO-группы

Пусть G — произвольная po-группа. Элементы $a, b \in G^+$ называются *архимедово эквивалентными* ($a \sim b$), если $a \leqslant b^n$, $b \leqslant a^m$ для некоторых целых чисел $n > 0$, $m > 0$.

Лемма 9. *Пусть G — po-группа, $g \in G$ и*

$$g = ab^{-1} = uv^{-1}, \tag{1}$$

где $a \perp b$ и $u \perp v$ в группе G. Тогда $a \sim u$ и $b \sim v$.

Доказательство. Из (1) следует, что $u^{-1}a = v^{-1}b \leqslant a, b$, откуда получаем, что $(u^{-1}a)^2 \leqslant a$ и $(v^{-1}b)^2 \leqslant b$, так как $a \perp b$. Из последних неравенств следует, что $a \leqslant u^2$ и $b \leqslant v^2$.

Аналогично из (1) следует, что $a^{-1}u = b^{-1}v \leqslant u, v$. Тогда $u \leqslant a^2$ и $v \leqslant b^2$, так как $u \perp v$. Таким образом, $a \sim u$ и $b \sim v$. □

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 10 ([11, лемма 2]). *Пусть G — po-группа, $M \in \mathcal{L}(G)$, $m \in M$ и $m = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G. Тогда $a, b \in M$.*

Предложение 11. *Направленная группа G порождается множеством G^+.*

Лемма 12. *Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$ и $e \neq a \in H^+$. Тогда $[a] \subseteq H$.*

Доказательство. Из предложения 1 и выпуклости подгруппы H следует, что $[a]^+ \subseteq H$, откуда по предложению 11 заключаем, что $[a] \subseteq H$. □

Следствие 13. *Пусть G — AO-группа. В условиях леммы* 9 *имеют место равенства $[u] = [a]$ и $[v] = [b]$.*

По [11, теорема 4] множество $\mathcal{L}(G)$ в AO-группе G образует решётку, где для подгрупп $A, B \in \mathcal{L}(G)$ их объединением $A \vee B$ является пересечение подгрупп из $\mathcal{L}(G)$, содержащих множество $A \cup B$.

Теорема 14. *Пусть G — AO-группа, $a, b \in G^+$. Тогда $[ab] = [a] \vee [b]$.*

Доказательство. Пусть $H = [a] \vee [b]$. Из определения подгруппы H следует, что $a, b \in H$, т. е. $ab \in H$. Тогда по лемме 12 $[ab] \subseteq H$.

Обратно, так как $a, b \in [ab]$, то по лемме 12 подгруппы $[a]$ и $[b]$ включены в подгруппу $[ab]$, откуда по определению подгруппы H получаем, что $H \subseteq [ab]$. □

Следствие 15. *В условиях следствия* 13 *подгруппа $[ab]$ равна подгруппе $[uv]$.*

Определение 16. Из доказанного выше следует, что каждому элементу g из AO-группы G можно поставить в соответствие подгруппу $G(g) \in \mathcal{L}(G)$, где $G(g) = [ab]$ для любой пары почти ортогональных элементов a и b группы G, для которой $g = ab^{-1}$.

Замечание 17. Если $e \neq a \in G^+$, то $G(a) = [a]$.

Замечание 18. Подгруппа $G(g)$ является наименьшей выпуклой направленной подгруппой AO-группы G, содержащей элемент g.

Утверждение является следствием предложения 10 и теоремы 14.

Лемма 19. *Пусть G — AO-группа, $M \in \mathcal{L}(G)$. Элемент $g \in G$ является элементом подгруппы M тогда и только тогда, когда $G(g) \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть $g \in M$. Так как G — AO-группа, то $g = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G. По предложению 10 это влечёт $a, b \in M$. Отсюда по лемме 12 получаем, что $[a], [b] \subseteq M$. В силу теоремы 14 из последних включений следует $G(g) \subseteq M$. Обратное утверждение тривиально. □

Лемма 20. *Пусть G — AO-группа, H — подгруппа группы G, удовлетворяющая условию $(*)$. Если $h \in H$ и $h = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G, то $a, b \in H$.*

Доказательство. Из определения 16 по теореме 14 и замечанию 17 следует, что $G(a), G(b) \subseteq G(h)$, откуда по условию $(*)$ получаем $a, b \in H$. □

Лемма 21. *Если подгруппа H в AO-группе G удовлетворяет условию $(*)$, то $H \in \mathcal{L}(G)$.*

Доказательство. Пусть $h \in H$. Тогда $h = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G. По лемме 20 элемент a принадлежит подгруппе H, т. е. множество верхних граней элементов h и e содержит элемент a. Таким образом, H — направленная подгруппа (см. [5, с. 22]).

Пусть $u \leqslant g \leqslant v$, где $u, v \in H$ и $g \in G$. Рассмотрим соотношение $e \leqslant u^{-1}g \leqslant \leqslant u^{-1}v$. Так как $[u^{-1}g], [u^{-1}v] \in \mathcal{L}(G)$, то $u^{-1}g \in [u^{-1}v]$, и по лемме 12 имеет место включение $[u^{-1}g] \subseteq [u^{-1}v]$. Отсюда по замечанию 17 получаем, что $G(u^{-1}g) \subseteq G(u^{-1}v)$. Так как $u^{-1}v \in H$, то по условию $(*)$ $u^{-1}g \in H$, откуда следует, что $g \in H$. Следовательно, H — выпуклая подгруппа. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $H \in \mathcal{L}(G)$, $h \in H$, $g \in G$, $G(g) \subseteq G(h)$. По лемме 19 из того, что $h \in H$, следует, что $G(h) \subseteq H$. По транзитивности включения имеем $G(g) \subseteq H$. По лемме 19 заключаем, что $g \in H$. Обратное утверждение имеет место по лемме 21. □

3. Свойства идеалов pl-групп

Начнём с утверждения о сопряжённых подгруппах.

Предложение 22 ([6, лемма 2.3]). *Пусть G — ро-группа и $M \in \mathcal{L}(G)$. Тогда $a^{-1}Ma \in \mathcal{L}(G)$ для любого элемента $a \in G$.*

Так как всякая pl-группа является группой Рисса, нам понадобится следующее предложение.

Предложение 23. *Пусть G — группа Рисса. Тогда*

1) *если H — подгруппа, порождённая множеством подгрупп M_i, где $M_i \in \in \mathcal{L}(G)$, то $H \in \mathcal{L}(G)$* [10];
2) *из неравенств $e \leqslant x \leqslant a_1a_2\ldots a_s$, верных для элементов $x \in G$ и $a_i \in \in G^+$, следует существование таких элементов $x_i \in G$, для которых $x = = x_1x_2\ldots x_s$ и $e \leqslant x_i \leqslant a_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$* [9].

Далее будем считать, что $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

Замечание 24. Для любых $a, b, c, d \in G$ имеет место равенство

$$[ab^{-1}, cd^{-1}] = bd[d, a][a, c][c, b][b, d]d^{-1}b^{-1}.$$

Доказательство теоремы 4. Так как $I_g \in \mathcal{L}(G)$, то по замечанию 18 $G(g) \subseteq I_g$. Из нормальности подгруппы I_g следует, что $a^{-1}G(g)a \subseteq I_g$ для любого элемента $a \in G$.

С другой стороны, по предложению 22 $a^{-1}G(g)a \in \mathcal{L}(G)$ для любого элемента $a \in G$. Из предложения 23 следует существование подгруппы $H \in \mathcal{L}(G)$, порождённой множеством $\{a^{-1}G(g)a \mid a \in G\}$. Таким образом, $H \subseteq I_g$.

Докажем, что H является нормальной подгруппой группы G. Пусть $h \in H$ и $b \in G$. Тогда $h = x_1x_2\ldots x_s$ для некоторых элементов $x_i \in a_i^{-1}G(g)a_i$, где $a_i \in G$, откуда $b^{-1}xb = y_1y_2\ldots y_s$, где $y_i \in b^{-1}a_i^{-1}G(g)a_ib$ для $a_ib \in G$. Таким образом, $b^{-1}xb \in H$ для всех элементов $b \in G$. Следовательно, H — o-идеал группы G, который содержит элемент g. Отсюда следует, что $I_g \subseteq H$ и $I_g = H$. □

Следствием теоремы 4 является следующее утверждение.

Лемма 25. *Если $x \in I_g^+$ в pl-группе G для элемента $g \in G$, то $x = x_1x_2 \ldots x_s$, где $e \leqslant x_i \in a_i^{-1}G(g)a_i$ для $a_i \in G$.*

Доказательство. Пусть $x = y_1y_2 \ldots y_s$, где $y_i \in a_i^{-1}G(g)a_i$. Так как группа G является AO-группой, то $y_i = u_iv_i^{-1}$, где $u_i \perp v_i$ в группе G.

Так как по предложению 22 $a_i^{-1}G(g)a_i \in \mathcal{L}(G)$, то по предложению 1 элемент $u_i \in a_i^{-1}G(g)a_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда справедливы неравенства $e \leqslant x \leqslant t_1t_2 \ldots t_s$ для элементов $t_i = a_i^{-1}u_ia_i$, где $e \leqslant t_i$, откуда следует, что по предложению 23 в группе Рисса G найдутся элементы x_i, для которых $x = x_1x_2 \ldots x_s$ и $e \leqslant x_i \leqslant t_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$. Из выпуклости подгрупп $a_i^{-1}G(g)a_i$ следует, что $x_i \in a_i^{-1}G(g)a_i$. □

Замечание 26. Если

$$x = \prod_{i=1}^{s} x_i, \quad y = \prod_{j=1}^{t} y_j,$$

то

$$[x, y] = \prod_{i,j} a_{ij}^{-1}[x_i, y_j]a_{ij}$$

для некоторых элементов $a_{ij} \in G$.

4. pl-первичный радикал

Пусть G — pl-группа, в которой имеется не обращающаяся в единицу последовательность элементов (g_i), где $g_{i+1} = [b_i^{-1}x_ib_i, y_i]$ для $b_i \in G$ и $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(g_i)$. Тогда по лемме Цорна существует максимальный o-идеал P группы G, который не содержит последовательности (g_i).

Лемма 27. *P — pl-первичный идеал группы G.*

Доказательство. Рассмотрим в группе G такие o-идеалы A и B, которые не содержатся в P. Так как G — группа Рисса, то произведения AP и BP являются o-идеалами группы G (см. [7]), при этом $P \subseteq AP, BP$ и $AP \neq P$, $BP \neq P$. Тогда существуют элементы последовательности g_s и g_t, такие что $g_s \in AP$ и $g_t \in BP$. Пусть для определённости $s < t$.

Рассмотрим элемент $g_{s+1} = [b^{-1}xb, y]$, где $b, x, y \in G$ и $G(x), G(y) \subseteq G(g_s)$. Так как $AP \in \mathcal{L}(G)$, то по лемме 19 имеет место включение $G(g_s) \subseteq AP$. Отсюда по транзитивности включения $G(x), G(y) \subseteq AP$. Но тогда по лемме 19 $x, y \in AP$. Так как подгруппа AP является нормальной подгруппой группы G, $b^{-1}xb \in AP$. Таким образом, $g_{s+1} \in AP$.

Из доказанного следует, что, повторив рассуждение нужное число раз, получим $g_t \in AP$, т. е. $g_t \in AP \cap BP$. Следовательно, в фактор-группе G/P коммутант o-идеалов AP/P и BP/P содержит класс $g_tP \neq P$. Таким образом, группа G/P pl-первична. □

Доказательство теоремы 7. Пусть элемент g не принадлежит $pl\text{-rad}(G)$. Тогда $g \notin P$ для некоторого pl-первичного идеала P группы G. В этом случае идеал I_g не может содержаться в идеале P, поэтому коммутант $[I_g, I_g]$ не содержится в идеале P, т. е. найдутся элементы $x, y \in I_g$, для которых $[x, y] \notin P$.

Так как группа G является AO-группой, то $x = ab^{-1}$, $y = uv^{-1}$, где $a \perp b$, $u \perp v$ в группе G. По замечанию 24 из этого следует, что можно считать, что $x, y \in I_g^+$. По лемме 25 имеем $x = x_1 x_2 \ldots x_s$ и $y = y_1 y_2 \ldots y_t$, где $e \leqslant x_i \in \in p_i^{-1} G(g) p_i$ и $e \leqslant y_j \in q_j^{-1} G(g) q_j$ для некоторых элементов $p_i, q_j \in G$.

Так как $[x, y] \notin P$, то по замечанию 26 найдутся такие элементы $x_i, y_i \in G$, для которых $[x_i, y_i] \notin P$. При этом $x_i = t_i^{-1} u_i t_i$ и $y_i = s_i^{-1} v_i s_i$ для элементов $t_i, s_i \in G$ и элементов $u_i, v_i \in G(g)^+$. Тогда для любого элемента $z \in G$ имеет $z^{-1}[x_i, y_i] z \notin P$, т. е. элемент $z^{-1}[t_i^{-1} u_i t_i, s_i^{-1} v_i s_i] z$ не принадлежит идеалу P.

Положим $z = s_i^{-1}$, $b_0 = t_i s_i^{-1}$. Тогда элемент $[(t_i s_i^{-1})^{-1} u_i (t_i s_i^{-1}), v_i]$ не принадлежит идеалу P, т. е. элемент $g_1 = [b_0^{-1} u_i b_0, v_i]$ не равен единице. При этом по лемме 12 $G(u_i), G(v_i) \subseteq G(g)$.

Повторив рассуждения для элемента g_1, найдём элемент $g_2 \neq e$ и т. д. Таким образом, элемент g не является pl-строго энгелевым.

Обратное утверждение верно в силу леммы 27. □

Литература

[1] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[2] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[3] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сборник работ по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[4] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.

[5] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[6] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдорешёточно упорядоченных групп // Алгебраические системы. Сб. тр. Ивановского гос. унив. — Иваново, 1991. — С. 78—85.

[7] Ширшова Е. Е. Свойства гомоморфизмов групп Рисса // Успехи мат. наук. — 1991. — Т. 46, № 5 (281). — С. 157—158.

[8] Щукин К. К. RI-разрешимый радикал группы // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.

[9] Fuchs L. Riesz groups // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1965. — Vol. 19, ser. III. — P. 1—34.

[10] Jakubiková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen // Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. — 1971. — Vol. 21, no. 1. — P. 3—8.

[11] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Comm. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.