# Атомарная теория деления двусторонних идеалов полуколец*

**А. Е. ПЕНТУС, М. Р. ПЕНТУС**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
e-mail: apentus@mech.math.msu.su

УДК 512+510.64

**Ключевые слова:** идеал полукольца, исчисление Ламбека.

**Аннотация**

В статье рассматриваются двусторонние идеалы полуколец. Изучается теория двусторонних идеалов в сигнатуре, состоящей из предикатного символа $\subseteq$ и двух функциональных символов, обозначающих правое деление и левое деление идеалов. Доказывается, что множество атомарных формул этой сигнатуры, истинных на всех полукольцах при всех оценках, разрешимо.

**Abstract**

*A. E. Pentus, M. R. Pentus, The atomic theory of division of semiring ideals*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 201—208.

We consider two-sided ideals of semirings. More precisely, we study the theory of two-sided ideals in the signature consisting of the predicate symbol $\subseteq$ and two function symbols that denote the right and left division of ideals. We prove that the set of those atomic formulas in this signature that are valid for all semirings and all valuations is decidable.

## Введение

На множестве всех идеалов произвольного заданного полукольца $S$ можно определить операцию правого деления $I/J = \{c \in S \mid c \cdot J \subseteq I\}$ и операцию левого деления $J\backslash I = \{c \in S \mid J \cdot c \subseteq I\}$. Цель данной статьи — найти эффективный способ проверки тождественной истинности соотношений, формулируемых в терминах правого деления, левого деления и отношения $\subseteq$.

В разделе 1 даются определения, касающиеся полуколец и их двусторонних идеалов. В разделе 2 вводится исчисление $\mathrm{LM}(\backslash, /)$, являющееся фрагментом исчисления Ламбека с добавленным правилом монотонности. В разделе 3 приводится доказательство корректности исчисления $\mathrm{LM}(\backslash, /)$ относительно интерпретации на множестве идеалов полукольца. В разделе 4 доказывается, что

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранта поддержки ведущих научных школ и Нидерландской организации научных исследований (NWO).

в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /)$ выводятся все тождественно истинные свойства двусторонних идеалов полуколец, записываемые в указанной сигнатуре как атомарные формулы. Так как множество выводимых секвенций исчисления $\mathrm{LM}(\backslash, /)$ разрешимо, установлена разрешимость атомарной теории деления двусторонних идеалов.

# 1. Полукольца

**Определение 1.1.** В этой статье *полукольцом* называется алгебра $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ с выделенным элементом 0 и бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющими следующим аксиомам (где $a$, $b$, $c$ — произвольные элементы множества $S$):

1) $a + b = b + a$,
2) $a + 0 = a$,
3) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
6) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$,
7) $a \cdot 0 = 0$,
8) $0 \cdot a = 0$.

**Пример 1.2.** Множество полиномов от одной переменной с натуральными коэффициентами образует полукольцо. (Нуль считается натуральным числом.)

**Определение 1.3.** Множество $I \subseteq S$ называется *двусторонним идеалом* полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$, если выполнены следующие условия:

1) $0 \in I$,
2) $a + b \in I$ для любых $a \in I$ и $b \in I$,
3) $a \cdot b \in I$ для любых $a \in S$ и $b \in I$,
4) $b \cdot a \in I$ для любых $a \in S$ и $b \in I$.

**Определение 1.4.** Пусть $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ — некоторое полукольцо, $c \in S$ и $D \subseteq S$. Тогда через $c \cdot D$ обозначается множество

$$\{a \in S \mid a = c \cdot d \text{ для некоторого } d \in D\}$$

и через $D \cdot c$ — множество

$$\{a \in S \mid a = d \cdot c \text{ для некоторого } d \in D\}.$$

**Определение 1.5.** Пусть $I$ и $J$ — двусторонние идеалы полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$. *Правое частное идеала $I$ по идеалу $J$* определяется формулой

$$I/J = \{c \in S \mid c \cdot J \subseteq I\}.$$

*Левое частное идеала $I$ по идеалу $J$* определяется формулой

$$J\backslash I = \{c \in S \mid J \cdot c \subseteq I\}.$$

Иногда вместо $I/J$ пишут $I : J$, а вместо $J\backslash I$ — $I :: J$ (см. [2, гл. 12]).

**Лемма 1.6.** *Если $I$ и $J$ — двусторонние идеалы некоторого полукольца, то множества $I/J$ и $J\backslash I$ тоже двусторонние идеалы этого полукольца.*

**Доказательство.** Пусть $I$ и $J$ — двусторонние идеалы полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$. Докажем, что $I/J$ является двусторонним идеалом.

Свойство $0 \in I/J$ следует из того, что $0 \cdot J = \{0\} \subseteq I$.

Проверим аксиому 2 из определения 1.3. Пусть $a \in I/J$ и $b \in I/J$. Для любого элемента $d \in J$ имеем $a \cdot d \in I$, $b \cdot d \in I$ и, следовательно, $(a + b) \cdot d = a \cdot d + b \cdot d \in I$. Поэтому $a + b \in I/J$.

Проверим аксиому 3. Пусть $a \in S$ и $b \in I/J$. Для любого элемента $d \in J$ имеем $b \cdot d \in I$ и, следовательно, $(a \cdot b) \cdot d = a \cdot (b \cdot d) \in I$. Поэтому $a \cdot b \in I/J$.

Проверим аксиому 4. Пусть $a \in S$ и $b \in I/J$. Для любого элемента $d \in J$ имеем $a \cdot d \in J$ и, следовательно, $(b \cdot a) \cdot d = b \cdot (a \cdot d) \in I$. Поэтому $b \cdot a \in I/J$. $\square$

**Определение 1.7.** Пусть $I$ и $J$ — двусторонние идеалы полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$. *Произведение идеала $I$ и идеала $J$* (обозначение $I \cdot J$) определяется как подмножество полукольца $S$, состоящее из всех конечных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$, где $a_k \in I$ и $b_k \in J$ для всех $k$.

**Лемма 1.8.** *Если $I$ и $J$ — двусторонние идеалы некоторого полукольца, то множество $I \cdot J$ является двусторонним идеалом этого полукольца.*

## 2. Исчисление Ламбека

Рассмотрим синтаксическое исчисление, введённое в [1] И. Ламбеком. *Типы* исчисления Ламбека строятся из примитивных типов $p_1, p_2, \ldots$ с помощью трёх бинарных связок $\bullet, \backslash, /$. Обозначим множество всех типов, построенных таким образом, через Tp. Прописные буквы латинского алфавита будем использовать для обозначения типов исчисления Ламбека, а прописные греческие буквы — для обозначения конечных последовательностей типов. Символ $\Lambda$ будет всегда обозначать пустую последовательность типов.

Выводимыми объектами исчисления Ламбека являются *секвенции* вида $\Gamma \to A$, где $\Gamma \neq \Lambda$. Аксиомы имеют вид $A \to A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A\backslash B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Phi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma \Phi (A\backslash B) \Delta \to C}\ (\backslash \to),$$

$$\frac{\Pi A \to B}{\Pi \to B/A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Phi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma (B/A) \Phi \Delta \to C}\ (/ \to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma \Delta \to A \bullet B}\ (\to \bullet), \qquad \frac{\Gamma A B \Delta \to C}{\Gamma (A \bullet B) \Delta \to C}\ (\bullet \to).$$

Через LM обозначается исчисление, полученное из исчисления Ламбека добавлением правила

$$\frac{\Gamma \Delta \to A}{\Gamma B \Delta \to A}\ (\mathrm{M}).$$

Иногда это правило называют *правилом монотонности* (см. [5, с. 47]) или *правилом ослабления* (см. [4, с. 359]).

Обозначим множество всех типов без умножения (т. е. типов, не содержащих операции $\cdot$) через $\mathrm{Tp}(\backslash,/)$. Для множества всех непустых конечных последовательностей типов без умножения примем обозначение $\mathrm{Tp}(\backslash,/)^+$.

Через $\mathrm{LM}(\backslash,/)$ обозначается фрагмент исчисления LM без операции $\cdot$ (в этом фрагменте рассматриваются только секвенции $\Gamma \to A$, где $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^+$ и $A \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$). Выводимость секвенции $\Gamma \to A$ в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash,/)$ обозначается $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to A$.

**Теорема 2.1 (теорема о допустимости правила сечения).** *Если*

$$\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Pi \to B, \quad \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma B \Delta \to A,$$

*то*

$$\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \Pi \Delta \to A.$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме об устранимости сечения в исчислении Ламбека (см. [1]).

# 3. Модели

**Определение 3.1.** *Оценкой* языка левого и правого деления на полукольце называется произвольная функция $v$, ставящая в соответствие переменным $p_1, p_2, \ldots$ некоторые двусторонние идеалы этого полукольца. Естественное продолжение оценки $v$ на множество всех типов без умножения будем тоже обозначать через $v$. Оно задаётся следующими соотношениями:

1) $v(A\backslash B) = v(A)\backslash v(B)$,
2) $v(B/A) = v(B)/v(A)$,

где $A \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$.

**Определение 3.2.** Секвенция $A_1 \ldots A_n \to B$, где $A_i \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ (для всех $i$) и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$, называется *истинной* при оценке $v$ на некотором полукольце, если $v(A_1) \cdot \ldots \cdot v(A_n) \subseteq v(B)$. В частности, секвенция $A \to B$, где $A \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$, истинна при оценке $v$, если $v(A) \subseteq v(B)$.

**Пример 3.3.** Следующие секвенции истинны при всех оценках на полукольцах:

1) $p_2 \to (p_1/p_2)\backslash p_1$,
2) $p_2 \to p_1/(p_2\backslash p_1)$,
3) $p_1/p_2 \to (p_1/p_3)/(p_2/p_3)$,
4) $p_2\backslash p_1 \to (p_3\backslash p_2)\backslash(p_3\backslash p_1)$

(см., например, [2, гл. 12]).

**Определение 3.4.** Равенство типов $A = B$, где $A \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$, называется *истинным* при оценке $v$ на некотором полукольце, если $v(A) = v(B)$.

**Пример 3.5.** Следующие равенства типов истинны при всех оценках на полукольцах:

1) $p_1/((p_1/p_2)\backslash p_1) = p_1/p_2$,
2) $(p_1/(p_2\backslash p_1))\backslash p_1 = p_2\backslash p_1$,
3) $(p_1\backslash p_2)/p_3 = p_1\backslash(p_2/p_3)$

(см., например, [2, гл. 12]).

**Определение 3.6.** *Моделью на полукольце* называется произвольное полукольцо вместе с оценкой на нём. *Истинность в модели* означает истинность при заданной оценке на заданном полукольце.

**Теорема 3.7.** *Исчисление* $\mathrm{LM}(\backslash, /)$ *корректно относительно моделей на полукольцах (т. е. каждая выводимая в исчислении* $\mathrm{LM}(\backslash, /)$ *секвенция истинна на всех полукольцах при всех оценках).*

**Доказательство.** Пусть даны полукольцо $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ и оценка $v$.

Нетрудно доказать, что для любых двусторонних идеалов $I$, $J$, $K$ выполняются следующие соотношения:

1) $(I \cdot J) \cdot K = I \cdot (J \cdot K)$,
2) $I \cdot J \subseteq K$ тогда и только тогда, когда $I \subseteq K/J$,
3) $I \cdot J \subseteq K$ тогда и только тогда, когда $J \subseteq I\backslash K$,
4) $I \cdot J \subseteq I$,
5) $I \cdot J \subseteq J$.

Из них выводятся соотношения

6) если $I \subseteq J$, то $I \cdot K \subseteq J \cdot K$ и $K \cdot I \subseteq K \cdot J$,
7) $(I/J) \cdot J \subseteq I$,
8) $J \cdot (J\backslash I) \subseteq I$.

Используя приведённые соотношения, можно индукцией по длине вывода доказать, что если $\mathrm{LM}(\backslash, /) \vdash A_1 \ldots A_n \to B$, то $v(A_1) \cdot \ldots \cdot v(A_n) \subseteq v(B)$. □

## 4. Основной результат

**Теорема 4.1.** *Существует модель на полукольце, относительно которой исчисление* $\mathrm{LM}(\backslash, /)$ *полно (т. е. каждая истинная в этой модели секвенция выводима в исчислении* $\mathrm{LM}(\backslash, /)$*).*

**Доказательство.** Построим искомое полукольцо на множестве

$$S = \mathrm{Tp}(\backslash, /)^+ \cup \{0, \hat{0}\},$$

где $0$ и $\hat{0}$ — два новых элемента, не принадлежащих множеству $\mathrm{Tp}(\backslash, /)^+$. Сложение в полукольце $S$ задаём следующим образом:

$$a + b = \begin{cases} b, & \text{если } a = 0, \\ a, & \text{если } b = 0, \\ \hat{0}, & \text{если } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0. \end{cases}$$

Умножение в полукольце $S$ задаём следующим образом:

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \text{ или } b = 0, \\ ab, & \text{если } a \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+} \text{ и } b \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+}, \\ \hat{0} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сначала докажем, что $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ — полукольцо. Очевидно, что выполняются аксиомы 2, 7, 8 из определения 1.1. Аксиомы 1 и 3 легко проверяются.

Проверим аксиому 4. Если хотя бы один из элементов $a$, $b$, $c$ есть 0, то $(a \cdot b) \cdot c = 0$ и $a \cdot (b \cdot c) = 0$. Если $a \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+}$, $b \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+}$ и $c \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+}$, то $(a \cdot b) \cdot c = abc$ и $a \cdot (b \cdot c) = abc$. В остальных случаях $(a \cdot b) \cdot c = \hat{0}$ и $a \cdot (b \cdot c) = \hat{0}$.

Проверим аксиому 5. Если $a = 0$, то $a \cdot (b+c) = 0$ и $a \cdot b + a \cdot c = 0 + 0 = 0$. Если $b = 0$, то $a \cdot (b+c) = a \cdot c$ и $a \cdot b + a \cdot c = 0 + a \cdot c = a \cdot c$. Аналогично рассматривается случай $c = 0$. Если же $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то $a \cdot (b + c) = a \cdot \hat{0} = \hat{0}$ и, с другой стороны, $a \cdot b \neq 0$, $a \cdot c \neq 0$, поэтому $a \cdot b + a \cdot c = \hat{0}$.

Аксиома 6 проверяется аналогично.

Зададим оценку $v$ на полукольце $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ следующим образом:

$$v(p_i) = \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+} \mid \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to p_i\} \cup \{0, \hat{0}\}.$$

Докажем, что для каждого $p_i$ значение $v(p_i)$ является двусторонним идеалом рассматриваемого полукольца.

Пусть $a \in v(p_i)$ и $b \in v(p_i)$. Проверим, что $a + b \in v(p_i)$. Если $a = 0$, то $a + b = b \in v(p_i)$. Если $b = 0$, то $a + b = a \in v(p_i)$. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a + b = \hat{0} \in v(p_i)$.

Пусть теперь $a \in v(p_i)$ и $b \in S$. Проверим, что $a \cdot b \in v(p_i)$. Если $a \in \{0, \hat{0}\}$ или $b \in \{0, \hat{0}\}$, то $a \cdot b \in \{0, \hat{0}\} \subseteq v(p_i)$. Пусть $a = \Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+}$ и $b = \Phi \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+}$. Применив несколько раз правило монотонности, выведем из $\Gamma \to p_i$ секвенцию $\Gamma\Phi \to p_i$. Следовательно, $\Gamma\Phi \in v(p_i)$.

Аналогично доказывается, что если $a \in S$ и $b \in v(p_i)$, то $a \cdot b \in v(p_i)$.

Мы установили, что $v(p_i)$ является двусторонним идеалом рассматриваемого полукольца.

Проверим, что для каждого типа $C \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ выполняется равенство

$$v(C) = \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+} \mid \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to C\} \cup \{0, \hat{0}\} \tag{1}$$

(доказательство этого равенства подобно приведённому в [3] доказательству полноты фрагмента исчисления Ламбека без операции произведения относительно класса всех моделей на свободных полугруппах). Рассуждаем индукцией по построению типа $C$. Для случая $C = p_i$ искомое равенство обеспечивается непосредственно конструкцией оценки $v$. Пусть теперь $C = B/A$. По предположению индукции

$$v(B) = \{\Phi \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+} \mid \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Phi \to B\} \cup \{0, \hat{0}\},$$
$$v(A) = \{\Psi \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^{+} \mid \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Psi \to A\} \cup \{0, \hat{0}\}.$$

Докажем сначала, что

$$v(B)/v(A) \subseteq \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to B/A\} \cup \{0, \hat{0}\}. \tag{2}$$

Для элементов $0$ и $\hat{0}$ принадлежность правой части очевидна. Пусть $\Gamma \in \in v(B)/v(A)$, где $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^+$. Тогда $\Gamma\cdot v(A) \subseteq v(B)$. Так как $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash A \to A$, то $A \in v(A)$ и, следовательно, $\Gamma A \in v(B)$. Это означает, что $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma A \to B$. Применив правило $(\to /)$, получим $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to B/A$, что завершает доказательство соотношения (2). Теперь докажем обратное включение:

$$\{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to B/A\} \cup \{0, \hat{0}\} \subseteq v(B)/v(A). \tag{3}$$

Очевидно, что $0\cdot v(A) = \{0\} \subseteq v(B)$ и, следовательно, $0 \in v(B)/v(A)$. Очевидно, что $\hat{0} \cdot v(A) = \{0, \hat{0}\} \subseteq v(B)$, следовательно, $\hat{0} \in v(B)/v(A)$. Наконец, пусть $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^+$ и

$$\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma \to B/A. \tag{4}$$

Необходимо доказать, что $\Gamma \cdot v(A) \subseteq v(B)$. Очевидно, что $\Gamma \cdot 0 = 0 \in v(B)$ и $\Gamma\cdot\hat{0} = \hat{0} \in v(B)$. Рассмотрим произвольный элемент $\Psi \in v(A)$, где $\Psi \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)^+$. Тогда

$$\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Psi \to A. \tag{5}$$

Легко проверить, что $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash (B/A)A \to B$. Используя (4) и теорему 2.1, получаем $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma A \to B$. Отсюда, используя (5) и снова теорему 2.1, выводим $\mathrm{LM}(\backslash,/) \vdash \Gamma\Psi \to B$. Следовательно, $\Gamma \cdot \Psi = \Gamma\Psi \in v(B)$, что завершает доказательство соотношения (3).

Случай $C = A\backslash B$ разбирается аналогично.

Теперь можно доказать, что каждая невыводимая в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash,/)$ секвенция ложна на построенном полукольце при указанной оценке $v$. Пусть

$$\mathrm{LM}(\backslash,/) \nvdash A_1 \dots A_n \to B,$$

где $A_i \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ (для всех $i$) и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$. Из соотношения (1) видно, что $A_i \in v(A_i)$ (для всех $i$) и $A_1 \dots A_n \notin v(B)$. Следовательно,

$$v(A_1) \cdot \ldots \cdot v(A_n) \nsubseteq v(B),$$

и ложность невыводимой секвенции $A_1 \dots A_n \to B$ доказана. □

**Следствие 4.2.** *Рассмотрим множество секвенций вида $A \to B$, где $A \in \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$. Выделим среди них множество тех секвенций, которые истинны во всех моделях на полукольцах. Это множество разрешимо.*

**Доказательство.** Известно, что множество выводимых в $\mathrm{LM}(\backslash,/)$ секвенций разрешимо, так как при движении снизу вверх (от заключения правила к его посылкам) уменьшается сложность секвенций, понимаемая как суммарное число вхождений примитивных типов и знаков операций. Поэтому достаточно проверить, что множество секвенций вида $A \to B$, истинных во всех моделях на полукольцах, совпадает с множеством выводимых в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash,/)$ секвенций вида $A \to B$ (здесь $A \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash,/)$).

Рассмотрим произвольную секвенцию вида $A \to B$, где $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$. Если она выводима в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /)$, то согласно теореме 3.7 она истинна во всех моделях на полукольцах. Обратно, если секвенция $A \to B$ истинна во всех моделях на полукольцах, то согласно теореме 4.1 она выводима в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /)$. □

**Следствие 4.3.** *Рассмотрим множество равенств вида $A = B$, где $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$. Выделим среди них множество тех равенств, которые истинны во всех моделях на полукольцах. Это множество разрешимо.*

**Доказательство.** Пусть $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$. Равенство $A = B$ истинно во всех моделях на полукольцах тогда и только тогда, когда секвенции $A \to B$ и $B \to A$ истинны во всех моделях на полукольцах. □

# Литература


[1] Ламбек И. Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.

[2] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[3] Buszkowski W. Compatibility of categorial grammar with an associated category system // Z. Math. Logik Grundlag. Math. — 1982. — Vol. 28. — P. 229—238.

[4] Buszkowski W. Type logics in grammar // Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica / Eds. V. F. Hendricks, J. Malinowski. — Kluwer Academic, 2003. — P. 337—382.

[5] Van Benthem J. Language in Action. Categories, Lambdas and Dynamic Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; Vol. 130).