Радикал Джекобсона кольца рядов Лорана*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Московский энергетический институт
(технический университет)
e-mail: askar@diar.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: кольцо рядов Лорана, полупримитивное кольцо.

Аннотация

Для широкого класса колец A, включающего в себя все кольца, обладающие правой размерностью Крулля, доказано, что для любого автоморфизма φ кольца A радикал Джекобсона кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$, где N — первичный радикал кольца A. Если A/N — кольцо ограниченного индекса, то радикал Джекобсона кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с $N((x))$.

Abstract

A. A. Tuganbaev, The Jacobson radical of the Laurent series ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 2, pp. 209—215.

For a large class of rings A including all rings with right Krull dimension, it is proved that for every automorphism φ of the ring A, the Jacobson radical of the skew Laurent series ring $A((x,\varphi))$ is nilpotent and coincides with $N((x,\varphi))$, where N is the prime radical of the ring A. If A/N is a ring of bounded index, then the Jacobson radical of the Laurent series ring $A((x))$ coincides with $N((x))$.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Если φ — автоморфизм кольца A, то через $A((x,\varphi))$ обозначается *кольцо косых рядов Лорана* над кольцом коэффициентов A, образованное рядами $f = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} f_i x^i$, где x — переменная, k — целое (возможно, отрицательное) число, а все коэффициенты f_i лежат в кольце A. В кольце $A((x,\varphi))$ сложение задаётся естественным образом, а умножение задаётся с учётом правила $xa = \varphi(a)x$ (для всех элементов $a \in A$). При $\varphi = 1_A$ получаем *кольцо рядов Лорана* $A((x))$. Для любого подмножества N кольца A через $N((x,\varphi))$ обозначается подмножество кольца $A((x,\varphi))$, образованное рядами $f = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} f_i x^i$, у которых все коэффициенты f_i лежат в множестве N.

Радикал Джекобсона кольца косых многочленов $A[x,\varphi]$ и кольца косых формальных степенных рядов $A[[x,\varphi]]$ рассматривался во многих работах. В отличие от случаев колец $A[x,\varphi]$ и $A[[x,\varphi]]$, о радикале Джекобсона кольца $A((x,\varphi))$

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 05-01-01048.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 2, с. 209—215.

известно очень мало (см., например, [2—4], [7, 16.12] и [8]). Основными результатами данной работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть A — такое кольцо, что его первичный радикал N нильпотентен, а фактор-кольцо A/N является правым кольцом Голди* (*это так, например, если A — нётерово справа кольцо*). *Тогда для любого автоморфизма φ кольца A радикал Джекобсона кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$.*

В частности, если A — полупервичное правое кольцо Голди, то для любого автоморфизма φ кольца A кольцо косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ полупримитивно.

Теорема 2. *Если A — кольцо с первичным радикалом N и фактор-кольцо A/N является кольцом ограниченного индекса, то радикал Джекобсона кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с $N((x))$.*

В частности, если A — полупервичное кольцо ограниченного индекса, то кольцо рядов Лорана $A((x))$ полупримитивно.

Доказательство теорем 1 и 2 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые обозначения и определения. Пересечение всех первичных идеалов кольца A называется *первичным радикалом* кольца A. Кольцо A называется *полупервичным*, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Модуль M называется *полупримитивным*, если $J(M)=0$. Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Кольцо A называется кольцом *ограниченного индекса*, если существует такое натуральное число n, что $a^n=0$ для любого нильпотентного элемента $a\in A$. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X\cap N=0$ влечёт равенство $X=0$.

Пусть f — некоторый ряд из кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и $f = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} f_i x^i$, где $f_k\neq 0$ и $f_i\in A$ для всех i. Тогда элементы $f_i\in A$ называются *каноническими коэффициентами* ряда f, элемент f_k кольца коэффициентов называется *младшим коэффициентом* ряда f, а число k называется *младшей степенью* ряда f. Считается, что младшая степень нулевого ряда равна $+\infty$.

1. Полупримитивные кольца косых рядов Лорана

Лемма 1.1 ([5, 9.13]). *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — полупервичное правое кольцо Голди*;
2) *каждый существенный правый идеал кольца A содержит неделитель нуля.*

Лемма 1.2. *Если A — полупервичное правое кольцо Голди и B — ненулевой идеал кольца A, то существует такой ненулевой элемент $b \in B$, что $bb' \neq 0$ для любого ненулевого элемента $b' \in B$.*

Доказательство. По лемме Цорна существует такой правый идеал C кольца A, что $B \cap C = 0$ и $B \oplus C$ — существенный правый идеал кольца A. По лемме 1.1 существенный правый идеал $B \oplus C$ содержит некоторый неделитель нуля $b + c$, где $b \in B$ и $c \in C$. Пусть b' — такой элемент идеала B, что $bb' = 0$. Так как B — идеал, то $cb' \in B \cap C = 0$. Тогда $(b + c)b' = bb' + cb' = 0$. Так как $b + c$ — неделитель нуля, то $b' = 0$. Поэтому b — искомый элемент. □

Нам потребуется следующая известная лемма.

Лемма 1.3 ([4, лемма 2 (3)]). *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A и $R = A((x, \varphi))$.*

1. *Если M — максимальный правый идеал кольца A, то $M((x, \varphi))$ — максимальный правый идеал кольца R.*
2. *$J(R) \subseteq (J(A))((x, \varphi))$ (т. е. для любого ряда $f = \sum\limits_{i=m}^{\infty} f_i x^i \in J(R)$ $(f_i \in A)$ все канонические коэффициенты f_i лежат в $J(A)$).*

Доказательство. 1. Достаточно доказать, что для каждого ряда $t \in R \setminus M((x, \varphi))$ существуют такие ряды $h \in M((x, \varphi))$ и $g \in R$, что $h + tg = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $t = \sum\limits_{i=0}^{\infty} t_i x^i$, где $0 \neq t_0 \in A \setminus M$ и $t_i \in A$ для всех i. Так как M — максимальный правый идеал кольца A, то существуют такие элементы $m_0 \in M$ и $a_0 \in A$, что $m_0 + t_0 a_0 = 1$. Тогда

$$m_0 + ta_0 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i \varphi^i(a_0) x^i.$$

Поэтому существует такой ряд $f \in R$, что $(m_0 + ta_0)f = 1$. Положим $h \equiv m_0 f \in \bar{M}$ и $g \equiv a_0 f \in R$. Тогда $h + tg = 1$.

2. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — множество всех максимальных правых идеалов кольца A. По утверждению 1 $M_i((x, \varphi))$ — максимальный правый идеал кольца R для любого i. Поэтому

$$J(R) \subseteq \bigcap_{i \in I} (M_i((x, \varphi))\,) = (J(A))((x, \varphi)).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.4. *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A и $R = A((x, \varphi))$. Допустим, что $J(R) \neq 0$. Обозначим через B ненулевой идеал кольца A, порождённый всеми младшими коэффициентами рядов из $J(R)$. Тогда для любого ненулевого элемента $b \in B$ существуют такие ненулевые элементы $b', b'' \in B$, что $bb' = b''b = 0$.*

Доказательство. Пусть f — такой ненулевой ряд из $J(R)$, что b — младший коэффициент ряда f. Докажем существование такого элемента $b' \in B$, что

$bb' = 0$. Так как $fx^n \in J(R)$ для всех n, то можно считать, что младшая степень ряда f равна -1 (т. е. $f - bx^{-1} \in A[[x,\varphi]]$). Так как $f \in J(R)$, то ряд $1-f$ обратим. Поэтому существует такой обратимый ряд $g \in R$, что $(1-f)g = 1$ и $g = 1 + fg$. Пусть $g = \sum\limits_{i=k}^{\infty} g_i x^i \in R$, где $g_k \neq 0$ и $g_i \in A$ для всех i. Так как $fg \in J(R)$, то по второму утверждению леммы 1.3 все канонические коэффициенты ряда fg лежат в $J(A)$. Поэтому из равенства $g = 1 + fg$ следует, что коэффициент g_0 обратим в кольце A и $bg_0 \neq 0$. Так как $g_0 \neq 0$, то $k \leqslant 0$. Поэтому либо $k = 0$, либо $k < 0$.

Допустим, что $k = 0$. Тогда ненулевой элемент bg_0 является младшим коэффициентом рядов fg и $1 + fg = g$. Поэтому младшая степень k ряда g равна -1. Получено противоречие.

Допустим, что $k < 0$. Из равенства $g = 1 + fg$ следует, что $bg_k = 0$ и k — младшая степень ряда $fg \in J(R)$. Поэтому $g_k \in B$, и можно положить $b' = g_k$.

Существование такого элемента $b'' \in B$, что $b''b = 0$ доказывается аналогично. □

Предложение 1.5. *Пусть φ — автоморфизм кольца A.*

1. *Если либо A — полупервичное правое кольцо Голди, либо A — первичное кольцо ограниченного индекса, то кольцо $A((x,\varphi))$ полупримитивно.*
2. *Если A — полупервичное кольцо ограниченного индекса и $\varphi(P) = P$ для каждого минимального первичного идеала P кольца A, то кольцо $A((x,\varphi))$ полупримитивно.*

Доказательство. Положим $R = A((x,\varphi))$.

1. Допустим, что $J(R) \neq 0$. Пусть B — ненулевой идеал кольца A, порождённый всеми младшими коэффициентами рядов из $J(R)$. По лемме 1.4 для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует такой ненулевой элемент $b' \in B$, что $bb' = 0$. Если A — полупервичное правое кольцо Голди, то получаем противоречие с леммой 1.2. Если A — первичное кольцо ограниченного индекса, то получаем противоречие со следующим известным фактом (см., например, [7, 14.5 (6)]): если A — первичное кольцо ограниченного индекса, то каждый ненулевой идеал кольца A содержит неделитель нуля.

2. Пусть $\{P_i\}_{i\in I}$ — множество всех минимальных первичных идеалов кольца A. Так как кольцо A полупервично, то $\bigcap\limits_{i\in I} P_i = 0$. Пусть $i \in I$. По условию $\varphi(P)_i = P_i$. Поэтому автоморфизм φ индуцирует автоморфизм φ_i фактор-кольца A/P_i. Так как P_i — минимальный первичный идеал полупервичного кольца A ограниченного индекса, то A/P_i — первичное кольцо ограниченного индекса (см., например, [7, 14.3 (5)]). По первому утверждению кольцо косых рядов Лорана $(A/P_i)((x,\varphi_i))$ полупримитивно. Кроме того, непосредственно проверяется существование естественного кольцевого изоморфизма

$$(A/P_i)((x,\varphi_i)) \cong R/(P_i((x,\varphi_i))).$$

Для любого $i \in I$ кольцо $R/(P_i((x,\varphi_i)))$ полупримитивно и $\bigcap\limits_{i\in I} P_i = 0$. Поэтому $\bigcap\limits_{i\in I}(P_i((x,\varphi_i)))$ — нулевой идеал кольца R. Тогда кольцо R изоморфно подпрямому произведению полупримитивных колец $(A/P_i)((x,\varphi_i))$. Поэтому кольцо R полупримитивно. $\square$

Следствие 1.6. *Если A — полупервичное кольцо ограниченного индекса, то кольцо $A((x))$ полупримитивно.*

Следствие 1.6 вытекает из второго утверждения предложения 1.5 (мы берём в качестве φ тождественный автоморфизм кольца A).

2. Окончание доказательства теорем 1 и 2

Лемма 2.1. *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A, $R = A((x,\varphi))$, N — такой идеал кольца A, что $\varphi(N) = N$, и $\bar{\varphi}$ — автоморфизм фактор-кольца A/N, индуцированный автоморфизмом φ.*

1. *Если N — нильпотентный идеал кольца A, то $N((x,\varphi))$ — нильпотентный идеал кольца R (в частности, $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$).*
2. *Если кольцо косых рядов Лорана $(A/N)((x,\bar{\varphi}))$ полупримитивно и $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*

Доказательство. 1. Первое утверждение проверяется непосредственно.

2. Так как кольцо $(A/N)((x,\bar{\varphi}))$ полупримитивно и существует естественный кольцевой изоморфизм $R/(N((x,\varphi))\,) \cong (A/N)((x,\bar{\varphi}))$, то кольцо $R/(N((x,\varphi))\,)$ полупримитивно. Поэтому $N((x,\varphi)) \supseteq J(R)$. Кроме того, $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$ по условию. Поэтому $J(R) = N((x,\varphi))$. $\square$

Замечание 2.2. Пусть φ — автоморфизм кольца A и N — первичный радикал кольца A. Для любого первичного идеала P кольца A верно, что идеалы $\varphi(P)$ и $\varphi^{-1}(P)$ первичны и $P = \varphi(\varphi^{-1}(P))$. Кроме того, N — пересечение всех первичных идеалов кольца A. Поэтому $\varphi(N) = N$.

Лемма 2.3. *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм кольца A, $R = A((x,\varphi))$ и N — первичный радикал кольца A. Допустим, что $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$.*

1. *Если либо A/N — правое кольцо Голди, либо A/N — первичное кольцо ограниченного индекса, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*
2. *Если A/N — кольцо ограниченного индекса и $\varphi(P) = P$ для каждого минимального первичного идеала P кольца A, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*

Доказательство. По замечанию 2.2 $\varphi(N) = N$. Пусть $\bar{\varphi}$ — автоморфизм фактор-кольца A/N, индуцированный автоморфизмом φ. По второму утверждению леммы 2.1 достаточно доказать, что кольцо косых рядов Лорана $(A/N)((x,\bar{\varphi}))$ полупримитивно. Так как фактор-кольцо A/N полупервично, то первое утверждение следует из предложения 1.5. Второе утверждение вытекает из предложения 1.5 и следующего свойства: если $\varphi(P) = P$ для каждого минимального первичного идеала P кольца A, то $\bar{\varphi}(\bar{P}) = \bar{P}$ для каждого минимального первичного идеала $\bar{P}$ кольца A/N. $\square$

Предложение 2.4. *Пусть φ — автоморфизм кольца A и $R = A((x,\varphi))$. Допустим, что первичный радикал N кольца A нильпотентен.*

1. *Если либо A/N — правое кольцо Голди, либо A/N — первичное кольцо ограниченного индекса, то $J(R)$ — нильпотентный идеал кольца R и $J(R) = N((x,\varphi))$.*
2. *Если A/N — кольцо ограниченного индекса и $\varphi(P) = P$ для каждого минимального первичного идеала P кольца A, то $J(R)$ — нильпотентный идеал кольца R и $J(R) = N((x,\varphi))$.*

Доказательство. По замечанию 2.2 $\varphi(N) = N$. По первому утверждению леммы 2.1 $N((x,\varphi))$ — нильпотентный идеал кольца R. В частности, $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$. По лемме 2.3 $J(R) = N((x,\varphi))$. $\square$

Замечание 2.5. Пусть A — кольцо и N_1 — сумма всех нильпотентных идеалов кольца A. Из первого утверждения леммы 2.1 вытекает, что $N_1((x))$ — идеал кольца рядов Лорана $A((x))$, лежащий в сумме всех нильпотентных идеалов кольца $A((x))$. В частности, идеал $N_1((x))$ лежит в радикале Джекобсона кольца $A((x))$.

Предложение 2.6. *Пусть A — кольцо, N — его первичный радикал и $R = A((x))$.*

1. *$N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$.*
2. *Если A/N — кольцо ограниченного индекса, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*
3. *Если A — кольцо ограниченного индекса, то $J(R) = N((x,\varphi))$.*

Доказательство. 1. Обозначим через N_1 сумму всех нильпотентных идеалов кольца A. Пусть α — порядковое число и для любого порядкового числа $\beta < \alpha$ уже определён идеал N_β кольца A. Если α — предельное порядковое число, то определим идеал N_α кольца A равенством $N_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} N_\beta$. Если α — непредельное порядковое число, то обозначим через N_α сумму всех таких идеалов B кольца A, что $B^n \subseteq N_{\alpha-1}$ для некоторого натурального числа n. Тогда $N_\alpha/N_{\alpha-1}$ — сумма всех нильпотентных идеалов фактор-кольца $A/N_{\alpha-1}$. Существует такое порядковое число γ, что первичный радикал N совпадает с идеалом N_γ (см., например, [1, глава 1, § 1]). Из замечания 2.5 следует, что $N((x)) = N_\gamma((x)) \subseteq J(R)$.

2. По первому утверждению $N((x,\varphi)) \subseteq J(R)$. По второму утверждению леммы 2.3 $J(R) = N((x,\varphi))$.

3. Так как A — кольцо ограниченного индекса, то A/N — кольцо ограниченного индекса (см., например, [7, 14.4]). Поэтому требуемое вытекает из второго утверждения. $\square$

Замечание 2.7. Теоремы 1 и 2 вытекают из первого утверждения предложения 2.4 и второго утверждения предложения 2.6 соответственно.

Напомним определение модуля, обладающего размерностью Крулля. По определению размерности Крулля нулевого модуля и ненулевого артинова модуля равны -1 и 0 соответственно. Допустим, что α — порядковое число, $\alpha \geqslant 1$, M — модуль, не обладающий размерностью Крулля $\beta < \alpha$, и для любой бесконечной убывающей цепи подмодулей $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ модуля M найдётся такой номер n, что фактор-модуль M_n/M_{n+1} имеет размерность Крулля меньше α. Тогда говорят, что модуль M имеет *размерность Крулля* α. Заметим, что каждый нётеров модуль обладает размерностью Крулля (см., например, [6]).

Замечание 2.8. Пусть A — кольцо, обладающее правой размерностью Крулля, и N — первичный радикал кольца A. Тогда для любого автоморфизма φ кольца A радикал Джекобсона кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ нильпотентен и совпадает с $N((x,\varphi))$.

Замечание 2.8 вытекает из теоремы 1 и того, что для любого кольца A, обладающего правой размерностью Крулля, первичный радикал N кольца A нильпотентен, а фактор-кольцо A/N является правым кольцом Голди (см., например, [6]).

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Сонин К. И. Регулярные кольца косых рядов Лорана // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 565—568.

[3] Сонин К. И. Бирегулярные кольца рядов Лорана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1997. — № 4. — С. 22—24.

[4] Туганбаев Д. А. Полулокальные дистрибутивные кольца косых рядов Лорана // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 913—921.

[5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[6] Gordon R., Robson J. C. Krull dimension // Mem. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 133. — P. 1—78.

[7] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[8] Tuganbaev D. A. Laurent series rings and pseudo-differential operator rings // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128, no. 3. — P. 2843—2893.