О парах Белого над произвольными полями

В. А. ДРЁМОВ, А. М. ВАШЕВНИК
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.624.3+512.772

Ключевые слова: теория Гротендика, пары Белого, плохая редукция, конечные поля, кривые положительных родов.

Аннотация

Основная цель данной статьи — распространение теории детских рисунков Гротендика на произвольные поля. Даются определения пары Белого в положительной характеристике и простых плохой редукции. Рассматривается классический граф $K_{3,3}$, которому соответствуют три различных детских рисунка. Для каждого из этих рисунков находится пара Белого в тех характеристиках, где она существует, а также указывается список простых плохой редукции.

Abstract

V. A. Dremov, A. M. Vashevnik, On Belyi pairs over arbitrary fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 3—8.

The main goal of this article is to extend Grothendieck's dessins d'enfant theory to arbitrary fields. In this paper, the definitions of a Belyi pair in positive characteristic and primes of bad reduction are given. We consider the graph $K_{3,3}$. This abstract graph corresponds to three different dessins. For each dessin we find the Belyi pair and the positive characteristics for which this pair exists. The set of primes of bad reduction is also given.

Введение

Основная цель данной статьи — распространение теории детских рисунков Гротендика на произвольные поля. В работе будут даны определения пары Белого в положительной характеристике и простых плохой редукции.

Определение простых плохой редукции есть в [3, 4]. Особенность нашего определения состоит в том, что оно даётся для детского рисунка и не зависит от выбора функции Белого, ему соответствующей. Также стоит отметить, что данное определение элементарно и не требует от читателя глубоких знаний алгебраической геометрии. Подобная конструкция для кривых рода 0 была изложена в [1].

Первая часть работы посвящена введению определений и установлению свойств полученных объектов. Во второй части мы рассмотрим классический граф $K_{3,3}$. Этому абстрактному графу соответствуют три различных детских

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 3—8.

рисунка. Для каждого из этих рисунков мы найдём пару Белого в тех характеристиках, где она существует, а также укажем список простых плохой редукции.

Авторы благодарны Г. Б. Шабату и Н. М. Адрианову за помощь в написании этой статьи.

1. Простые плохой редукции детского рисунка

Рассмотрим следующую дивизориальную систему на рациональную функцию β на некоторой алгебраической кривой X:

$$\begin{cases} (\beta) = \sum_{j=1}^{m^+} v_j^+ A_j^+ - \sum_{j=1}^{m^\infty} v_j^\infty C_j, \\ (\beta - 1) = \sum_{j=1}^{m^-} v_j^- A_j^- - \sum_{j=1}^{m^\infty} v_j^\infty C_j. \end{cases} \tag{1}$$

Систему (1) будем рассматривать при заданных $v_j^\pm$, v_j^∞, $m^\pm$, m^∞ как систему уравнений на функцию β и на числа $A_j^\pm$, C_j, а набор чисел v_j считаем удовлетворяющим соотношению

$$\sum_{j=0}^{m^+} v_j^+ = \sum_{j=0}^{m^-} v_j^- = \sum_{j=0}^{m^\infty} v_j^\infty.$$

Система (1) имеет смысл над любым алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$. Введём обозначения

$$p = \operatorname{char} \mathbf{k}, \quad n = \sum_{j=0}^{m^\infty} v_j^\infty.$$

В дальнейшем будем предполагать, что n не делится на p.

Определение 1. Решение системы (1) называется *паразитическим*, если не все числа $A_j^\pm$, C_j различны.

Определение 2. *Парой Белого* над полем $\mathbf{k}$ называются алгебраическая кривая X и рациональная функция β на ней, такие что X — кривая над $\mathbf{k}$, а β — функция, не разветвлённая вне $\{0, 1, \infty\}$.

В случае $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ все функции Белого являются решениями системы (1). Каждому решению соответствует детский рисунок $D = \beta^{-1}[0, 1]$ (см. [2]), и, наоборот, для каждого класса детских рисунков найдётся соответствующая функция Белого. В этом случае параметры системы имеют комбинаторный смысл: $m^\pm$ — количество вершин разных цветов, m^∞ — количество граней, $A_j^\pm$ — координаты вершин, C_j — координаты центров граней.

Теорема 1. *Пусть кривая X и рациональная функция β на ней удовлетворяют системе* (1) *для некоторого набора v^+, v^-, v^∞, представляющего собой валентности некоторого детского рисунка. Тогда X, β — пара Белого.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$(d\beta) \geqslant \sum_{j=1}^{m^+}(v_j^+ - 1)A_j^+ + \sum_{j=1}^{m^-}(v_j^- - 1)A_j^- - \sum_{j=1}^{m^\infty}(v_j^\infty + 1)C_j.$$

Но $\deg(d\beta) = 2g-2$, где g — род кривой X. Найдём степень правой части. Пусть n — степень функции β. Тогда по формуле Эйлера получаем, что

$$\deg\biggl(\sum_{j=1}^{m^+}(v_j^+ - 1)A_j^+ + \sum_{j=1}^{m^-}(v_j^- - 1)A_j^- - \sum_{j=1}^{m^\infty}(v_j^\infty + 1)C_j\biggr) = \\ = n - m^+ + n - m^- - n - m^\infty = -(m^+ + m^- - n + m^\infty) = 2g - 2,$$

значит,

$$(d\beta) = \sum_{j=0}^{m^+}(v_j^+ - 1)A_j^+ + \sum_{j=0}^{m^-}(v_j^- - 1)A_j^- - \sum_{j=0}^{m^\infty}(v_j^\infty + 1)C_j.$$

Таким образом, β — функция Белого. □

Однако обратная импликация неверна. Существуют функции Белого, которые не являются решением системы (1) для набора v^+, v^-, v^∞, соответствующего детскому рисунку (например, случай кривой рода 0, функции Белого на ней $\beta(z) = z^3(z-1)$, $p = \operatorname{char}\mathbf{k} = 3$).

Определение 3. Обозначим множество являющихся функциями Белого решений системы (1) над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ через

$$\mathrm{BP}[v^+, v^-, v^\infty](\mathbf{k}).$$

Определение 4. Простое число p называется *простым плохой редукции* для данного набора v^+, v^-, v^∞, если

$$\#\,\mathrm{BP}[v^+, v^-, v^\infty](\mathbb{C}) \neq \#\,\mathrm{BP}[v^+, v^-, v^\infty](\overline{\mathbb{F}_p}).$$

Теорема 2. *Пусть набор v^+, v^-, v^∞ соответствует некоторому детскому рисунку. Тогда делители валентностей $v_j^\pm$ являются простыми плохой редукции.*

Доказательство. Если v_k^+ делится на p, то

$$(d\beta) \geqslant A_k^+ + \sum_{j=1}^{m^+}(v_j^+ - 1)A_j^+ + \sum_{j=1}^{m^-}(v_j^- - 1)A_j^- - \sum_{j=1}^{m^\infty}(v_j^\infty + 1)C_j,$$

что невозможно из-за того, что степень левой части меньше степени правой (как было показано при доказательстве теоремы 1). Поэтому

$$\#\,\mathrm{BP}[v^+, v^-, v^\infty](\overline{\mathbb{F}_p}) = 0, \quad \#\,\mathrm{BP}[v^+, v^-, v^\infty](\overline{\mathbb{C}}) > 0,$$

так как набор v^+, v^-, v^∞ соответствует детскому рисунку.

Случай $v_k^- \vdots p$ разбирается аналогично. □

Теорема 3. *Пусть набор v^+, v^-, v^∞ соответствует некоторому детскому рисунку. Тогда делители валентностей граней v_j^∞ являются простыми плохой редукции.*

Доказательство. Теорема доказывается путём рассмотрения сопряжённого рисунка и применения к нему теоремы 2. Функция Белого сопряжённого рисунка равна $\tilde{\beta} = 1/\beta$, где β — функция Белого исходного рисунка. □

2. Детский рисунок $K_{3,3}$

Рассмотрим $K_{3,3}$ — двуцветный граф, состоящий из трёх белых вершин, трёх чёрных вершин и девяти рёбер (соединяющих каждую пару белых и чёрных вершин). Как известно, данный граф не планарный. На этом графе можно тремя неэквивалентными способами задать циклический порядок в вершинах.

1. При первом способе получаем род 1, валентности всех граней равны 3. Этому рисунку в характеристике 0 соответствуют кривая

$$y^3 = x^3 - 1$$

и функция Белого

$$\beta = x^3,$$

j-инвариант этой кривой равен 0.

2. При втором способе получаем род 1, валентности граней $\{5, 2, 2\}$. Этому рисунку соответствуют кривая

$$y^2 = -(x^3 - 9x^2 + 195x + 713)$$

и функция Белого

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{y(x^3 - 12x - 304)}{108(3x + 2)^2},$$

j-инвариант кривой равен

$$j = \frac{2^{13} \cdot 3 \cdot 7^3}{5^6}.$$

3. При третьем способе получаем род 2, одна грань имеет валентность 9. Тогда рисунку соответствует кривая

$$y^3 = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

и функция Белого

$$\beta = x^3.$$

3. Простые плохой редукции рисунка $K_{3,3}$

Найдём простые плохой редукции для каждого из приведённых детских рисунков. Полный набор валентностей (включая валентности граней) у них разный, поэтому и набор простых плохой редукции будет разным.

1. $y^3 = x^3 - 1$, $\beta = x^3$, $j = 0$. По теореме 2 число 3 будет простым плохой редукции. Покажем, что других плохих простых нет. Рассмотрим найденную функцию Белого. Покажем, что в характеристике $p \neq 3$ её вершины и полюса не сливаются. В координатах (x, y) мы можем записать $A^+ = (0, \sqrt[3]{-1})$, $A^- = (\sqrt[3]{1}, 0)$. Полюсами являются три бесконечные точки. В любой характеристике $p \neq 3$ уравнение $z^3 = a$ (где $a \neq 0$) имеет три различных решения. Поэтому данная пара является парой Белого в характеристике $p \neq 3$.

2. $y^2 = -(x^3 - 9x^2 + 195x + 713)$, $\beta = \frac{1}{2} + \frac{y(x^3-12x-304)}{108(3x+2)^2}$, $j = \frac{2^{13}\cdot 3\cdot 7^3}{5^6}$. По теоремам 2, 3 числа 2, 3, 5 — простые плохой редукции. Покажем, что других нет. Рассмотрим пару Белого в характеристике 0. Докажем, что она будет парой Белого в характеристике $p > 5$. Для этого необходимо проверить следующие условия.

Род кривой $y^2 = -(x^3 - 9x^2 + 195x + 713)$ равен 1. Род кривой падает, если многочлен $F(x) = x^3 - 9x^2 + 195x + 713$ имеет кратные корни или если $\mathrm{Discr}(F) \vdots p$, но $\mathrm{Discr}(F) = 5^6 \cdot 2^4 \cdot 3^5 \not\vdots p$.

Некоторые вершины или полюса функции β сливаются. Шесть вершин рисунка расположены в корнях многочлена $Q(x) = -x^3+3x^2-48x-404$. Вершины разных цветов сопряжены. Для проверки того, что вершины не сливаются, надо убедиться, что $\mathrm{Discr}(Q) = 3^6 \cdot 2^6 \cdot 5^3 \not\vdots p$, $\mathrm{Res}(Q, F) = 3^6 \cdot 2^2 \cdot 5^8 \not\vdots p$.

Два полюса находятся в корнях $R(x) = 3x + 2$, а третий в бесконечности. Проверим, что два полюса не сливаются: $\mathrm{Res}(R, F) = 5^6 \not\vdots p$.

Проверим, что полюса не сливаются с вершинами: $\mathrm{Res}(R, Q) = -2^4 \cdot 5^4 \not\vdots p$.

Таким образом, данная пара Белого является парой Белого в характеристике $p > 5$ и простые плохой редукции — $\{2, 3, 5\}$.

3. $y^3 = \frac{x^2+x+1}{x-1}$, $\beta = x^3$. По теореме 2 число 3 — простое плохой редукции. Докажем, что других нет. Вершины и полюса функции β такие: $A^+ = (0, \sqrt[3]{-1})$, $A^- = \{(e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}, 0), (1, \infty)\}$, $C = (\infty, \infty)$. Поэтому вершины и полюса в характеристике $p \neq 3$ не сливаются.

Покажем, что род кривой не падает. Как и при доказательстве теоремы 1, получим, что $\deg(d\beta) \geqslant 2g_0 - 2$, где $g_0 = 2$ — род кривой в нулевой характеристике. Поэтому род g_p в характеристике p удовлетворяет соотношению $g_p \geqslant g_0$. Но данная кривая в характеристике p — это кривая степени 4, имеющая особенность. Поэтому её род не выше двух. Отсюда $g_p = 2$.

Итак, единственным простым плохой редукции является число 3.

Литература

[1] Вашевник А. М. Простые плохой редукции детских рисунков рода 0 // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 25—43.

[2] Schneps L. The Grothendieck—Teichmüller group $\widehat{\mathrm{GT}}$: A survey // Geometric Galois Actions. 1. Around Grothendieck's «Esquisse d'un programme». Proc. the Conf. on Geometry and Arithmetic of Moduli Spaces, Luminy, France, August 1995 / L. Schneps, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Notes, Vol. 242). — P. 183—203.

[3] Wewers S. Three point covers with bad reduction // J. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 16, no. 4. — P. 991—1032.

[4] Zapponi L. Specialization of polynomial covers of prime degree // Pacific J. Math. — 2004. — Vol. 214, no. 1. — P. 161—183.