Рациональные операторы пространства формальных рядов*

Н. И. ДУБРОВИН
Владимирский государственный университет
e-mail: ndubrovin@rambler.ru

УДК 512.8

Ключевые слова: тело частных, правоупорядоченные группы, формальные ряды.

Аннотация

Основным результатом данной работы является следующая теорема: групповое кольцо универсальной накрывающей группы $\mathbb{G}$ для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ вложимо в тело $\mathbb{D}$ с нормированием в смысле Матияка и кольцо этого нормирования будет исключительным цепным порядком в теле $\mathbb{D}$, т. е. в нём имеется первичный идеал, который не является вполне первичным. В этом кольце всякий дивизориальный правый дробный идеал будет главным и линейно упорядоченное множество дивизориальных правых дробных идеалов изоморфно вещественной прямой. Эта теорема является следствием того, что универсальная накрывающая группа $\mathbb{G}$ удовлетворяет достаточным условиям вложимости группового кольца левоупорядоченной группы в тело.

Abstract

N. I. Dubrovin, Rational operators of the space of formal series, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 9—53.

The main result of this paper is the following theorem: the group ring of the universal covering $\mathbb{G}$ of the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is embeddable in a skew field $\mathbb{D}$ with valuation in the sense of Mathiak and the valuation ring is an exceptional chain order in the skew field $\mathbb{D}$, i.e., there exists a prime ideal that is not completely prime. In this ring, every divisorial right fractional ideal is principal, and the linearly ordered set of all divisorial fractional right ideals is isomorphic to the real line. This theorem is a consequence of the fact that the universal covering group $\mathbb{G}$ satisfies sufficient conditions for the embeddability of the group ring of a left ordered group in a skew field.

Введение

Основным результатом данной работы является теорема 45: групповое кольцо универсальной накрывающей группы $\mathbb{G}$ для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ вложимо в тело $\mathbb{D}$ с нормированием в смысле Матияка и кольцо этого нормирования будет исключительным цепным порядком в теле $\mathbb{D}$, т. е. в нём имеется первичный

*Работа выполнена при поддержке Немецкого научно-исследовательского сообщества (DFG), грант DFG 436 RUS 113/471.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 9—53.

идеал, который не является вполне первичным. В этом кольце всякий дивизориальный правый дробный идеал будет главным и линейно упорядоченное множество дивизориальных правых дробных идеалов изоморфно вещественной прямой.

Эта теорема является следствием того, что универсальная накрывающая группа $\mathbb{G}$ удовлетворяет достаточным условиям вложимости группового кольца левоупорядоченной группы в тело (теорема 39).

Перечислим основные обозначения и соглашения, смысл которых сохраняется на протяжении всей работы. Через F будем обозначать какое-либо поле, G — группа с конусом P, U — группа обратимых элементов конуса P, K — какое-либо тело, содержащее групповое кольцо FU, Γ — система представителей смежных классов $\{gU \mid g \in G\}$. Переход от элемента $g \in G$ к своему представителю смежного класса обозначаем чертой сверху ($\overline{g}$) и считаем, что $1 \in \Gamma$. Символом 1 обозначаем единичный элемент во всех встречающихся мультипликативных структурах. Множество Γ превратим в линейно упорядоченное множество посредством следующего правила: $h_1 \leqslant h_2$ тогда и только тогда, когда $h_1^{-1}h_2 \in P$.

Обозначим через L правое топологическое линейное пространство формальных рядов

$$\alpha = \sum_{h\in\Gamma}{}' hk_h \quad (k_h \in K) \tag{1}$$

с вполне упорядоченным по возрастанию носителем

$$\operatorname{supp}\alpha := \{h \in \Gamma \mid k_h \neq 0\}.$$

Здесь и далее во всей работе знак $:=$ означает равенство по определению. Норма ряда $v(\alpha)$ определяется как наименьший элемент носителя; $v(0) := +\infty$. Для любого отображения $d\colon L \to L$ определяем *нормировочную функцию* $V_d\colon \Gamma \to \Gamma \cup \{+\infty\}$ по правилу $V_d(h) = v(d[h])$. (Заметим, что образ формального ряда α под действием d обозначаем $d[\alpha]$.)

Линейная топология на L вводится посредством окрестностей нуля

$$W_\Delta = \{\alpha \in L \mid \forall h \in \Delta\ k_h = 0\},$$

где Δ пробегает семейство вполне упорядоченных по убыванию подмножеств в Γ. В смысле этой топологии рассматриваются все предельные переходы, а также бесконечные суммы (L-суммы), которые мы обозначаем

$$\sum_{i\in I}{}^{L} \alpha_i.$$

Такая сумма существует в L, если и только если объединение носителей $\operatorname{supp}\alpha_i$ по всему множеству индексов I является вполне упорядоченным (по возрастанию) и для любого элемента $h \in \Gamma$ найдётся лишь конечное число индексов $i \in I$, таких что коэффициент при h формального ряда α_i не равен 0. Заметим, что непрерывность линейного оператора $d\colon L \to L$ означает в точности, что для любой такой L-суммы семейство $d[\alpha_i]$ также суммируемо и

$$d\left[\sum_{i\in I}^{L}\alpha_i\right] = \sum_{i\in I}^{L} d[\alpha_i].$$

Все эти сведения и доказательства связанных с ними фактов можно найти в [6].

Оператор d называется *локально монотонным*, если неравенство $h_1 < h_2$ для $h_1, h_2 \in \Gamma$ влечёт неравенство $V_d(h_1) < V_d(h_2)$. Если подобная импликация справедлива для любых формальных рядов, т. е.

$$v(\alpha) < v(\beta) \implies v(d[\alpha]) < v(d[\beta]),$$

то оператор d называем монотонным. Монотонный непрерывный обратимый оператор называем иначе *L-автоморфизмом*. Обратный к нему будет также L-автоморфизмом [3, теорема 2]. Существенно будет использован и другой результат этой же теоремы: если d непрерывен, локально монотонен и для любого $g \in \Gamma$ найдётся такой ряд α, что $v(d[\alpha]) = g$, то d — L-автоморфизм.

Пространство L можно превратить в левый FG-модуль, определяя умножение на элемент $g \in G$ следующим образом:

$$g\alpha = \sum_{h\in\Gamma}{}' \overline{gh}\left(\overline{gh}^{\,-1} ghk_h\right).$$

Следовательно, групповое кольцо FG можно трактовать как подкольцо кольца всех линейных операторов пространства L_K. Обозначим через D рациональное замыкание группового кольца FG в кольце линейных операторов пространства L_K. Элементы из D будем называть *рациональными операторами*. На кольце D вводится отношение «проще» («сложнее»), которое обозначается $b \lhd d$ ($d \rhd b$) (см. [10]). Два рациональных оператора, не сравнимые в смысле этого отношения, имеют одинаковую сложность, и этот факт мы будем обозначать известным символом эквивалентности $\sim$. Отношение «проще» является транзитивным, антирефлексивным отношением с условием DCC (т. е. отсутствуют бесконечно убывающие цепочки); иными словами, любое множество рациональных операторов имеет наипростейший элемент (их может быть несколько). Группу мономиальных операторов вида xg ($x \in F^*$, $g \in G$) обозначим A. Такие операторы являются самыми простыми ненулевыми элементами рационального замыкания, их иногда называют несобственными атомными операторами. Атомный оператор $q \in D$ — это такой оператор, для которого множество

$$D(<q) := \{d \in D \mid d \lhd q\}$$

образует кольцо. Если же такое множество образует подгруппу в $(D, +)$, то q называется аддитивно неразложимым.

Более грубая характеристика рационального оператора — глубина, которая определяется следующим образом. Кольцо D можно представить как объединение возрастающей цепочки подколец $D[n]$, где $D[1] = FG$, а $D[n+1]$ порождается как кольцо подкольцом $D[n]$ и всеми обратными элементами d^{-1} (теми, что существуют), когда d пробегает $D[n]$. Наименьшее натуральное число n, для которого выполнено условие $s \in D[n]$, и называется глубиной оператора s.

Часто мы будем пользоваться полным аддитивным и полным мультипликативным разложением рационального оператора (см. [10]). Разложение $d = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ будет полным аддитивным разложением, если

1) все s_i аддитивно неразложимы;
2) для любого набора рациональных операторов $\{s'_i\}_{i=1}^n$, такого что $s'_i \trianglelefteq s_i$ (s'_i проще либо той же сложности, что s_i, $1 \leqslant i \leqslant n$), имеет место оценка $\sum\limits_1^n s'_i \trianglelefteq d$. При этом если s'_i проще, чем s_i, хотя бы для одного i, то сумма $\sum\limits_1^n s'_i$ проще, чем оператор d.

Аналогично разложение $s = q_1 q_2 \ldots q_m$ аддитивно неразложимого оператора s будет полным мультипликативным разложением, если либо $m = 1$ и $s \in \mathrm{A}$, либо

1) все операторы q_i атомны;
2) для любого набора рациональных операторов $\{q'_i\}_{i=1}^m$, такого что $q'_i \trianglelefteq q_i$ ($1 \leqslant i \leqslant m$), имеет место оценка $q'_1 q'_2 \ldots q'_m \trianglelefteq s$. При этом если q'_i проще, чем q_i, хотя бы для одного i, то произведение $q'_1 q'_2 \ldots q'_m$ проще, чем оператор s.

Кроме вышеперечисленного, нам понадобятся сведения относительно конусов в группе (см. [4]). Подмножество P группы G назовём конусом, если

$$P \cdot P \subseteq P, \quad P \cup P^{-1} = G.$$

Понятия правого, левого, двустороннего идеала и P-идеала, как и первичного и вполне первичного идеала, определяются так же, как для колец. Линейно упорядоченное множество Γ, которое было определено выше, позволяет нам реализовать G посредством монотонных автоморфизмов: $h \to \overline{gh}$ ($h \in \Gamma$). При этом главному правому идеалу gP будет соответствовать точка $\overline{g}$ на линейно упорядоченном множестве Γ. Однако для произвольных дивизориальных правых идеалов (пересечения главных правых идеалов) точек не остаётся. В связи с этим введём в рассмотрение и обозначим через $\hat{\Gamma}$ дедекиндово замыкание линейно упорядоченного множества Γ. Тогда существует естественная биекция между точками из дедекиндова замыкания и семейством всех дробных правых дивизориальных идеалов. Естественность заключается в том, что меньшему такому идеалу соответствует точка, лежащая правее, т. е. бóльшая, и наоборот. Если ограничиться конусами с единственным вполне первичным идеалом (в этом случае совпадающим с радикалом конуса), то они (конусы) бывают трёх видов:

1) архимедовы (любой односторонний идеал является двусторонним и группа дивизориальных дробных идеалов архимедова);
2) почти простые (кроме радикала нет двусторонних идеалов);
3) специальные (имеется единственный первичный, но не вполне первичный идеал, пересечение степеней которого пусто).

Заметим, что в первом и третьем случае найдётся идеал B, все степени которого дивизориальны, а их пересечение пусто.

Помимо операции L-суммирования, к рядам мы часто будем применять операцию ε-усечения. Здесь ε — какая-либо точка дедекиндова замыкания $\hat{\Gamma}$ или $\pm\infty$. Пусть ряд α задан (1). Скажем, что формальный ряд $\beta = \sum\limits_{h\in\Gamma} hk'_h$ есть *ε-начало ряда* α, если $k'_h = k_h$ при $h < \varepsilon$ и $k'_h = 0$ при $h \geqslant \varepsilon$. Запись $\beta = \alpha_{<\varepsilon}$ (или более общая $\beta \preceq \alpha$) означает, что β есть ε-начало (какое-либо начало) ряда α. Тогда ряд α можно представить в виде суммы $\alpha = \beta + \delta$, где каждый элемент из $\operatorname{supp}\beta$ меньше каждого элемента из $\operatorname{supp}\delta$. Разложение $\alpha = \beta + \delta$ назовём ε-сечением ряда α. Заметим, что

$$\beta = \alpha_{<\varepsilon} \iff v(\alpha - \beta) \geqslant \varepsilon \text{ и } \operatorname{supp}\beta < \varepsilon.$$

Среди всех начал ненулевого ряда α особенно выделим однородное начало $\partial\alpha$, которое назовём *дифференциалом ряда* α. Ясно, что дифференциал $\partial\alpha$ может быть записан в виде $h \cdot k_h$ для некоторого ненулевого $k_h \in K$ и элемента $h \in \Gamma$, служащего нормой ряда α. Эти и другие свойства операции сечения формальных рядов изложены в [3].

1. Локальная вполне рациональность

Определение 1. Рациональный оператор d будем называть *локально вполне рациональным*, если для любого $h \in \Gamma$ и любого $e \in \operatorname{supp} d[h]$ найдётся рациональный оператор b, более простой, чем d, для которого справедливо

$$b[h] = d[h]_{<e}. \tag{2}$$

Предложение 2.

1. *Пусть d — локально вполне рациональный оператор. Тогда для любой точки $\varepsilon \in \hat{\Gamma} \cup \{\pm\infty\}$ и любого элемента $h \in \Gamma$ найдётся элемент $b \in D$, который удовлетворяет следующим свойствам:*

$$\begin{cases} b = d, & \text{если } \varepsilon > \operatorname{supp} d[h],\\ b = 0, & \text{если } \varepsilon \leqslant V_d(h),\\ b[h] = d[h]_{<\varepsilon} \neq 0 \text{ и } b \lhd d & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{3}$$

2. *Оператор b единствен, если разность d' двух операторов из D, более простых, чем d, либо есть 0, либо удовлетворяет условию $d'[h] \neq 0$ для любого $h \in \Gamma$.*
3. *Если для любых точек $h \in \Gamma$, $\varepsilon \in \hat{\Gamma} \cup \{\pm\infty\}$ существует оператор $b \in D$, удовлетворяющий условию (3), то d локально вполне рационален.*

Доказательство. 1. В случае $\varepsilon > \operatorname{supp} d[h]$ следует взять $b = d$, а в случае $\varepsilon \leqslant V_d(h)$ полагаем $b = 0$. Тогда равенство $b[h] = d[h]_{<\varepsilon}$ выполнено по тривиальной причине.

Предположим, что $\varepsilon \leqslant \operatorname{supp} d[h]$, т. е. существует элемент $e \in \operatorname{supp} d[h]$, такой что $\varepsilon \leqslant e$. В частности, $d[h] \neq 0$ в этом случае. Выберем наименьший возможный такой элемент. Тогда $d[h]_{<\varepsilon} = d[h]_{<e}$. Пользуясь локальной вполне рациональностью d, выберем рациональный оператор b как в определении 1. Тогда $b[h] = d[h]_{<\varepsilon}$ и $b \lhd d$. Если дополнительно предположить, что $\varepsilon > V_d(h)$, то заведомо $b \neq 0$, так как $d[h]_{<\varepsilon} \neq 0$.

2. Предположим, что $b' \in D$ ещё один оператор, такой что $b'[h] = d[h]_{<\varepsilon}$, и для b' выполнено (3) с заменой b на b'. Случаи $\varepsilon > \operatorname{supp} d[h]$ и $\varepsilon \leqslant V_d(h)$ снова тривиальны: в них заведомо $b = b'$. Пусть $V_d(h) < \varepsilon \leqslant \operatorname{supp} d[h]$. Тогда $b, b' \lhd d$ и

$$(b - b')[h] = b[h] - b'[h] = d[h]_{<\varepsilon} - d[h]_{<\varepsilon} = 0.$$

Пользуясь условиями пункта 2, заключаем, что $b = b'$.

3. Пусть $e \in \operatorname{supp} d[h]$. Тогда, подставляя e вместо ε в (3), видим, что первая альтернатива не имеет места, а вторая и третья влекут неравенство $b \lhd d$ и равенство $b[h] = d[h]_{<e}$. $\square$

Обозначим через d^h_ε элемент b, удовлетворяющий условию (3). Условие единственности этого элемента указано в пункте 2.

Предложение 3. *Пусть $d = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ — полное аддитивное разложение оператора d и все слагаемые s_i локально вполне рациональны. Тогда d также локально вполне рационален. В качестве d^h_ε можно взять оператор b, удовлетворяющий следующему условию*:

$$b = \begin{cases} (s_1)^h_\varepsilon + (s_2)^h_\varepsilon + \ldots + (s_n)^h_\varepsilon, & \textit{если } V_d(h) < \varepsilon \leqslant \operatorname{supp} d[h], \\ 0, & \textit{если } \varepsilon \leqslant V_d(h), \\ d, & \textit{если } \varepsilon > \operatorname{supp} d[h]. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $b_i = (s_i)^h_\varepsilon$. Предположим, что

$$V_d(h) < \varepsilon \leqslant \operatorname{supp} d[h].$$

Тогда $\varepsilon \leqslant \operatorname{supp} s_i[h]$ для некоторого i, так как

$$\operatorname{supp} d[h] \subseteq \bigcup \operatorname{supp} s_i[h].$$

Следовательно, $b_i \lhd s_i$ для этого же i. В силу [10, следствие теоремы 3.6] получаем, что $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \lhd d$. Кроме того,

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)[h] = \sum_i s_i[h]_{<\varepsilon} = \left(\sum_i s_i\right)[h]_{<\varepsilon} = d[h]_{<\varepsilon}.$$

Заведомо $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$, так как $d[h] \neq 0$ ввиду неравенства $\varepsilon > V_d(h)$. Итак, элемент $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ удовлетворяет (3), а поэтому согласно утверждению 3 предложения 2 оператор d локально вполне рационален. $\square$

2. Вполне рациональность

Обозначим через $\mathcal{M}(D,L)$ множество матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix},$$

где $d_i \in D$ и $\alpha_i \in L$. Скажем, что *матрица X представляет формальный ряд $\beta \in L$*, если

$$\beta = d_1[\alpha_1] + d_2[\alpha_2] + \ldots + d_k[\alpha_k].$$

Сумму в правой части этого равенства будем обозначать $[X]$, так что X представляет ряд $[X]$. На множестве $\mathcal{M}(D,L)$ введём отношение частичного порядка $\lhd$. Сначала сравним два столбца:

$$\begin{pmatrix} d' \\ \alpha' \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} d \\ \alpha \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d' \lhd d, \\ \alpha' \preceq \alpha \end{cases} \text{или} \begin{cases} d' \sim d, \\ \alpha' \prec \alpha. \end{cases}$$

В этом случае говорим, что столбец $(d',\alpha')^\top$ проще, чем $(d,\alpha)^\top$. Далее положим по определению, что *матрица X проще, чем столбец* $(d,\alpha)^\top$, если для любого индекса i столбец $(d_i,\alpha_i)^\top$ проще, чем $(d,\alpha)^\top$, причём сумма всех d_i, для которых $\alpha_i = \alpha$, также проще, чем d. Обозначим это отношение так же: $X \lhd (d,\alpha)^\top$.

Определение 4. Рациональный оператор d назовём *вполне рациональным*, если для любого формального ряда α и любого собственного начала $\beta \prec d[\alpha]$ найдётся матрица $X \in \mathcal{M}(D,L)$, более простая, чем $(d,\alpha)^\top$, и представляющая ряд β.

Предложение 5. *Всякий вполне рациональный оператор является локально вполне рациональным.*

Доказательство. Пусть d вполне рационален, $h \in \Gamma$ и $e \in \operatorname{supp} d[h]$. Обозначим $\beta = d[h]_{<e}$ и найдём матрицу X, более простую, чем столбец $(d,h)^\top$, представляющую ряд β. Так как ряд h однороден, то X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_k \\ h & h & \dots & h \end{pmatrix},$$

где рациональный оператор $b = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ проще, чем d. Кроме того,

$$b[h] = d_1[h] + \ldots + d_k[h] = \beta = d[h]_{<e},$$

и условия определения 1 выполнены. □

Наша цель — показать, что все рациональные операторы на самом деле вполне рациональны при некоторых дополнительных условиях (см. теорема 16). Сделаем первый шаг на этом пути.

Предложение 6. *Нулевой оператор, а также элементы из* A *вполне рациональны.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{A}$ и $\beta \prec a[\alpha]$. Тогда в силу мономиальности и монотонности a найдётся собственное начало α_1 ряда α, такое что $a[\alpha_1] = \beta$. Столбец $(a, \alpha_1)^\top$ искомый (см. определение 4). □

Следующий шаг на пути реализации поставленной цели — аналог предложения 3.

Предложение 7. *Пусть $d = s_1+s_2+\ldots+s_n$ — полное аддитивное разложение элемента d и все s_i вполне рациональны. Тогда d также вполне рационален.*

Доказательство. Пусть ненулевой ряд $\alpha \in L$ произволен. Возьмём произвольное начало $\beta \prec d[\alpha]$. Найдём начала $\beta_i \preceq s_i[\alpha]$, такие что $\beta = \sum\limits_i \beta_i$. Заведомо $\beta_i \prec s_i[\alpha]$ хотя бы для одного i. Пользуясь вполне рациональностью s_i, найдём матрицы $X_i \in \mathcal{M}(D, L)$, равные либо проще столбца $(s_i, \alpha)^\top$, представляющие ряд β_i. Тогда матрица $X = (X_1, \ldots, X_k)$ проще, чем $(d, \alpha)^\top$. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $\beta_i \prec s_i[\alpha]$ для таких i, что $1 \leqslant i \leqslant k$ и $\beta_j = s_j[\alpha]$ для $j > k$. Тогда сумма всех операторов b из столбцов матрицы X, которые выглядят как столбец $(b, \alpha)^\top$, имеет вид

$$\tilde{d} = (b_{11} + \ldots + b_{1p_1}) + \ldots + (b_{k1} + \ldots + b_{kp_k}) + s_{k+1} + \ldots + s_n.$$

Так как все s_i аддитивно неразложимы и $b_{ij} \lhd s_i$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, то $\tilde{d} \lhd d$. Проверены условия определения вполне рациональности. Учитываем также равенство

$$[(X_1, \ldots, X_k)] = \sum_i [X_i] = \sum_i \beta_i = \beta$$

и заканчиваем доказательство предложения. □

Предложение 8. *Любой элемент группового кольца FG вполне рационален.*

Доказательство. Достаточно применить предложение 7 и предложение 6. При этом надо иметь в виду, что полное аддитивное разложение элемента из FG состоит из слагаемых, принадлежащих группе A. □

3. Ключевая лемма

В этом разделе мы отвечаем на вопрос: при каких условиях локально вполне рациональный оператор будет вполне рациональным (см. предложение 5).

Будем писать $b \leqslant d$ или $d \geqslant b$ для рациональных операторов b, d, если либо $b \lhd d$, либо $b = d$. Для рационального оператора d фиксируем полное аддитивное разложение $d = s_1+s_2+\ldots+s_n$. Обозначим через $D(\leqslant d)$ подгруппу аддитивной группы $(D, +)$, порождённую всеми элементами $s \in D$, которые проще либо равны s_i для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Через $D(< d)$ обозначаем подгруппу группы $(D, +)$, порождённую рациональными операторами s', которые проще, чем некоторый s_i.

Лемма 9. *Пусть оператор $d \in D$ таков, что любой ненулевой элемент из $D(\leqslant d)$ непрерывен, локально монотонен и локально вполне рационален. Тогда для любого ряда $\alpha \in L$ и любого ε-начала β ряда $d[\alpha]$ найдутся ряды $\alpha_j \in L$ и элементы $d_j \in D$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$\beta = d_0[\alpha_0] + d_1[\alpha_1 - \alpha_0] + \ldots + d_k[\alpha_k - \alpha_{k-1}], \tag{4}$$

$$d \geqslant d_0 \rhd d_1 \rhd \ldots \rhd d_k \neq 0, \tag{5}$$

$$0 \neq \alpha_0 \prec \alpha_1 \prec \ldots \prec \alpha_k \preceq \alpha, \tag{6}$$

$$h \in \operatorname{supp}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \implies v((d - d_i)[h]) \geqslant \varepsilon > \operatorname{supp} d_i[h] \qquad (0 \leqslant i \leqslant k,\ \alpha_{-1} := 0), \tag{7}$$

$$v(d[\alpha_k] - \beta) \geqslant \varepsilon, \quad \varepsilon \in \operatorname{supp} d[\alpha] \implies v(d[\alpha_k] - \beta) \geqslant v(d[\alpha] - \beta), \tag{8}$$

$$h \in \operatorname{supp}(\alpha - \alpha_k) \iff v(d[h]) \geqslant \varepsilon. \tag{9}$$

В частности, оператор d будет вполне рациональным.

Доказательство. Обозначим $\Delta = \operatorname{supp} \alpha$. Пусть

$$\alpha = \sum_{h \in \Delta}{}' h k_h \quad (k_h \in K^*).$$

Тогда в силу непрерывности оператора d получаем разложение в L-сумму

$$d[\alpha] = \sum_{h \in \Delta}^{L} d[h] k_h.$$

Элементарные свойства операции усечения дают равенство

$$\beta = d[\alpha]_{<\varepsilon} = \sum_{h \in \Delta}^{L} (d[h]_{<\varepsilon}) k_h. \tag{10}$$

Отбросим $\beta = d[\alpha]$ как тривиальный случай и будем считать, что β — собственное начало ряда $d[\alpha]$. Тогда $d[h]_{<\varepsilon} \neq d[h]$ для какого-либо $h \in \Delta$. Пусть $h_* \in \Delta$ — наименьший элемент, удовлетворяющий условию

$$d[h_*]_{<\varepsilon} \neq d[h_*]. \tag{$*$}$$

Обозначим $b_1 = d_\varepsilon^{h_*}$. Этот оператор строим как в предложении 3, а потому $d - b_1 \in D(\leqslant d)$. Тогда $b_1 \lhd d$ в силу условия $(*)$ и, значит,

$$v((d - b_1)[h]) \geqslant v((d - b_1)[h_*]) \geqslant \varepsilon$$

для всех $h \in \Gamma$, $h \geqslant h_*$ в силу локальной монотонности элемента $d - b_1$. Отсюда получаем равенство $d[h]_{<\varepsilon} = b_1[h]_{<\varepsilon}$ для этих h. Рассмотрим разложение $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_{10}$, где

$$\Delta_0 := \{h \in \Delta \mid h < h_*\}, \quad \Delta_{10} := \Delta \setminus \Delta_0,$$

и перепишем (10) в виде

$$\beta = \sum_{h\in\Delta_0}^{L} d[h]k_h + \sum_{h\in\Delta_{10}}^{L} b_1[h]_{<\varepsilon} k_h. \tag{11}$$

(Случай $\Delta_0 = \varnothing$ не исключается.) Далее в предположении, что ряд $b_1[h]_{<\varepsilon}$ не для всех $h \in \Delta_{10}$ совпадает с рядом $b_1[h]$, найдём наименьший элемент $h_{**} \in \Delta_{10}$ относительно условия

$$b_1[h]_{<\varepsilon} \neq b_1[h] \tag{$**$}$$

и положим $b_2 := (b_1)_\varepsilon^{h_{**}}$. Заметим, что $b_2 \lhd b_1$ в силу условия $(**)$. Так как

$$b_2[h_{**}] = b_1[h_{**}]_{<\varepsilon} = d[h_{**}]_{<\varepsilon},$$

то опять-таки ввиду локальной монотонности элемента $d - b_2$ получаем равенства

$$d[h]_{<\varepsilon} = b_1[h]_{<\varepsilon} = b_2[h]$$

для любого $h \geqslant h_{**}$. Разложив $\Delta_{10} = \Delta_1 \cup \Delta_{20}$, где

$$\Delta_1 := \{h \in \Delta_{10} \mid h < h_{**}\}, \quad \Delta_{20} := \Delta_{10} \setminus \Delta_1,$$

получим из (11) равенство

$$\beta = d\Bigg[\sum_{h\in\Delta_0}^{L} hk_h\Bigg] + b_1\Bigg[\sum_{h\in\Delta_1}^{L} hk_h\Bigg] + \sum_{h\in\Delta_{20}}^{L} b_2[h]_{<\varepsilon} k_h.$$

Этот процесс не может продолжаться бесконечно в силу условия DCC в упорядоченном множестве $(D, \lhd)$. Итак, в конце этого процесса мы получаем элемент $b_m \in D$, более простой, чем b_{m-1}, и такой, что $b_m[h]_{<\varepsilon} = b_m[h]$ для всех $h \in \Delta_{m0}$. Кроме того, получаем разбиение

$$\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m \cup \Delta_{m0},$$

такое что

$$\Delta_0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_m < \Delta_{m0}.$$

Отбросим $\beta = 0$ как тривиальный случай. Тогда $m \geqslant 1$, причём если $\Delta_0 = \varnothing$, то $m \geqslant 2$.

Если $\Delta_0 \neq \varnothing$, то полагаем

$$\begin{aligned}
d_0 &:= d, & \alpha_0 &= \sum_{h\in\Delta_0}{}' hk_h;\\
d_1 &:= b_1, & \alpha_1 &= \alpha_0 + \sum_{h\in\Delta_1}{}' hk_h;\\
&\ldots & &\ldots\\
d_m &:= b_m, & \alpha_m &= \alpha_{m-1} + \sum_{h\in\Delta_m}{}' hk_h.
\end{aligned}$$

Если же $\Delta_0 = \varnothing$, то полагаем

$$
\begin{aligned}
d_0 &:= b_1, & \alpha_0 &= \sum_{h\in\Delta_1}{}' hk_h;\\
d_1 &:= b_2, & \alpha_1 &= \alpha_0 + \sum_{h\in\Delta_2}{}' hk_h;\\
&\dots & &\dots\\
d_{m-1} &:= b_m, & \alpha_{m-1} &= \alpha_{m-2} + \sum_{h\in\Delta_m}{}' hk_h.
\end{aligned}
$$

Если $b_m = 0$ и $\Delta_0 \neq \varnothing$, то $k := m-1$ и $d_k = b_{m-1} \neq 0$.

Если $b_m = 0$ и $\Delta_0 = \varnothing$, то $k := m-2$ и опять $d_k = b_{m-1} \neq 0$.

Если $b_m \neq 0$ и $\Delta_0 \neq \varnothing$, то $k := m$. Тогда $\alpha_k = \alpha$.

Наконец, если $b_m \neq 0$ и $\Delta_0 = \varnothing$, то $k := m-1$, и тогда опять $\alpha_k = \alpha$.

В итоге получаем элементы $d_0, d_1, \dots, d_k \in D$ и ряды $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in L$, удовлетворяющие условиям (4)—(6). Заключение (7) выполнено в силу того, что $d_i[h] = d[h]_{<\varepsilon}$ для всех $h \in \operatorname{supp}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$.

Проверим заключение (8). Если $\alpha_k = \alpha$, то это утверждение тривиально. Пусть $\alpha_k \neq \alpha$. Это значит, что b_m, последний оператор процесса, описанного выше, равен нулю, т. е. $d[h]_{<\varepsilon} = 0$ для всех $h \in \Delta_{m0} = \operatorname{supp}(\alpha - \alpha_k)$. Отсюда следует неравенство $v(d[\alpha - \alpha_k]) > \varepsilon$. Кроме того, $v(d[\alpha] - \beta) \geqslant \varepsilon$, так как β есть ε-начало ряда $d[\alpha]$. Тогда

$$
v(d[\alpha_k] - \beta) = v(d[\alpha] - \beta - d[\alpha - \alpha_k]) \geqslant \min\{v(d[\alpha] - \beta), v(d[\alpha - \alpha_k])\} \geqslant \varepsilon. \quad (12)
$$

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon \in \operatorname{supp} d[\alpha]$, что эквивалентно равенству $v(d[\alpha] - \beta) = \varepsilon$. Тогда неравенство (12) переписывается как $v(d[\alpha_k] - \beta) \geqslant$ $\geqslant v(d[\alpha] - \beta)$, что доказывает соотношение (8).

Соотношение (9) вытекает из построения ряда α_k.

Если теперь предположить, что β — собственное начало ряда $d[\alpha]$, то матрица

$$
X = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & -d_1 & d_2 & -d_2 & \dots & d_k & -d_k \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k-1} \end{pmatrix}
$$

представляет ряд β. Кроме того, эта матрица проще, чем $(d, \alpha)^\top$. Действительно, если $\alpha_k \neq \alpha$, то это очевидным образом следует из определения порядка. Если же $\alpha_k = \alpha$, то $d_k \lhd d$, иначе $k = 0$ и $\beta = d[\alpha]$. Итак, сумма всех таких элементов $\pm d_i$, что для каждого формальный ряд, стоящий под ним в матрице X, совпадает с α, равна d_k, что проще, чем d.

Это заканчивает доказательство ключевой леммы. □

4. Редукция произведения

Определение 10. Пусть $q_1 q_2 \dots q_t$ — произведение рациональных операторов. Скажем, что рациональный оператор b является *редукцией* этого *произведения*, если либо b равен этому произведению, либо b представи́м в виде суммы произведений вида $c_1c_2\ldots c_t$, где все c_i проще либо равны q_i, причём хотя бы для одного i $c_i \lhd q_i$.

Нас будет интересовать прежде всего случай, когда $q_1\ldots q_t$ — полное мультипликативное разложение.

Предложение 11. *Если $s = q_1q_2\ldots q_t \in D$ — полное мультипликативное разложение аддитивно неразложимого элемента s, то любая редукция r произведения $q_1\ldots q_t$ проще либо равна s. Кроме того, в правой части разложения $s - r = q_1(q_2\ldots q_t - q_1^{-1}r)$ первый сомножитель проще либо равен s, а второй проще, чем s.*

Доказательство. Пусть редукция b не равна s. Тогда, применяя [10, теорема 4.6], получаем, что каждое из произведений $c_1c_2\ldots c_t$ проще, чем s. Следовательно, $b \lhd s$ в силу неразложимости оператора s.

Ясно, что $q_2\ldots q_t \lhd s$. Пусть $c_1\ldots c_t$ — одно из слагаемых в редукции r. Если $c_1 = q_1$, то $q_1^{-1}c_1\ldots c_t = c_2\ldots c_t \lhd s$, иначе $c_1 \lhd q_1$. Но и $q_1^{-1} \lhd q_1$, так как q_1 — собственный атомный оператор (см. [10]). Тогда оператор $\tilde{c}_1 := q_1^{-1}c_1$ проще атома q_1, и снова произведение $q_1^{-1}c_1\ldots c_t = \tilde{c}_1c_2\ldots c_t$ проще, чем s. Отсюда получаем, что $q_1^{-1}r$ проще s, и поэтому $q_2\ldots q_t - q_1^{-1}r$ проще s, так как $D(< s)$ — группа по сложению. □

Предложение 12. *Пусть $s = q_1q_2\ldots q_t$ — произведение вполне рациональных операторов. Тогда для любого формального ряда α и его собственного начала $\beta \prec s[\alpha]$ найдётся разложение*

$$\beta = s_1[\alpha_1] + s_2[\alpha_2] + \ldots + s_k[\alpha_k],$$

где все s_i — собственные редукции произведения $q_1\ldots q_t$.

Доказательство. Применим индукцию по числу t. Для $t = 1$ утверждение следует из определения вполне рациональности. Допустим, что утверждение доказано для $t - 1$ сомножителей. Обозначим $\sigma = q_2\ldots q_t[\alpha]$. Имеем $\beta \prec s[h] = q_1[\sigma]$. Воспользуемся вполне рациональностью q_1 и получим разложение

$$\beta = a_1[\sigma_1] + a_2[\sigma_2] + \ldots + a_k[\sigma_k], \tag{13}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_k \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} q_1 \\ \sigma \end{pmatrix},$$

для некоторых операторов $a_i \leqslant q_1$ и рядов $\sigma_i \preceq \sigma$. Воспользуемся предположением индукции относительно $\sigma_i \preceq q_2\ldots q_t[\alpha]$ и запишем разложения

$$\sigma_i = b_1^i[\alpha_1^i] + b_1^i[\alpha_2^i] + \ldots + b_{z_i}^i[\alpha_{z_i}^i], \tag{14}$$

где все b_j^i — редукции произведения $q_2\ldots q_t$, причём собственные редукции, поскольку $\sigma_i \neq \sigma$ и $\alpha_j^i \preceq \alpha$. Если же $\sigma_i = \sigma$, то $z_i = 1$ и $b_1^i = q_2\ldots q_t$. Подставим

(14) в (13) и получим равенство

$$\beta = \sum_i \sum_j a_i b_j^i [\alpha_j^i].$$

Мы утверждаем, что это искомое представление. Во-первых, каждый из операторов $a_i b_j^i$ записывается в виде суммы произведений требуемого вида. Далее, если $\sigma_i = \sigma$, то $a_i \lhd q_1$ и $a_i b_j^i$ заведомо будет собственной редукцией произведения $q_1 \dots q_t$. Если же σ_i — собственное начало ряда σ, то b_j^i — собственная редукция произведения $q_2 \dots q_t$, поэтому, даже если $a_i = q_1$, всё равно $a_i b_j^i$ будет собственной редукцией произведения $q_1 q_2 \dots q_t$. □

Следствие 13. *Пусть $s = q_1 q_2 \dots q_t$ — полное мультипликативное разложение аддитивно неразложимого рационального автоморфизма s. Предположим, что все q_i вполне рациональны. Тогда s также вполне рационален.*

Доказательство. Следует учесть, что любая собственная редукция произведения $q_1 q_2 \dots q_t$ в данном случае будет проще, чем s, и применить предложение 12. □

Следствие 14. *Пусть $s = q_1 q_2 \dots q_t$ — полное мультипликативное разложение аддитивно неразложимого рационального обратимого оператора s. Предположим, что все q_i вполне рациональны, а также что вполне рациональны все операторы группы $D(< s)$. Тогда для любых $h_1, \dots, h_m \in \Gamma$ и для любых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \hat{\Gamma} \cup \{\pm\infty\}$ в качестве элемента $b := (\dots (s_{\varepsilon_1}^{h_1})_{\varepsilon_2}^{h_2} \dots)_{\varepsilon_m}^{h_m}$ можно взять редукцию произведения $q_1 \dots q_t$, и следовательно, разность $s - b$ представима в виде произведения элементов, которые проще либо равны s.*

Доказательство. В качестве $s_{\varepsilon_1}^{h_1}$ можно взять редукцию произведения $q_1 \dots q_t$ согласно предложению 12. Если $s_{\varepsilon_1}^{h_1} = s$, то пару (h_1, ε_1) можно выбросить. Если же $s_{\varepsilon_1}^{h_1} \lhd s$, то $(s_{\varepsilon_1}^{h_1})_{\varepsilon_2}^{h_2}$ можно получить, используя снова предложение 12, как сумму редукций от каждого из слагаемых собственной редукции $s_{\varepsilon_1}^{h_1}$ произведения $q_1 \dots q_t$. В итоге мы получаем собственную редукцию произведения $q_1 \dots q_t$, каждое слагаемое которой вполне рационально, поскольку принадлежит $D(< s)$. Продолжая этот процесс, дойдём до b. Остаётся применить предложение 11. □

5. Продолжение вполне рациональности

Подгруппу (подкольцо) кольца $(D, +, \cdot)$ называем *L-группой* (*L-кольцом* соответственно), если каждый ненулевой элемент из этой группы (кольца) является L-автоморфизмом.

Лемма 15. *Пусть $q = p^{-1}$ — атомный оператор глубины $n+1$. Предположим, что $D[n]$ — L-кольцо, в котором любой элемент вполне рационален. Тогда оператор q также вполне рационален. Более того, если формальный ряд $\alpha \in L$ таков, что не существует собственного начала $\alpha' \prec \alpha$, удовлетворяющего условию*

$q[\alpha'] \prec q[\alpha]$, то для любого собственного начала $\beta \prec q[\alpha]$ найдётся представление

$$\beta = q_1[\alpha_1] + q_2[\alpha_2] + \ldots + q_m[\alpha_m], \tag{15}$$

где все q_i проще q и $\alpha_i \preceq \beta$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Сначала докажем вторую часть леммы, утверждение «более того». Пусть $0 \neq \beta \prec q[\alpha]$. Существование разложения вида (15) докажем индукцией по вполне упорядоченному множеству начал ряда $q[\alpha]$. Предположим, что для начал, меньших, чем β, утверждение доказано. Обозначим через δ наибольшее общее начало рядов $p[\beta]$ и α. Так как $\delta \preceq p[\beta]$, то по ключевой лемме 9, в которой полагаем $\varepsilon = v(p[\beta] - \delta)$, имеем

$$\delta = a_0[\beta_0] + a_1[\beta_1 - \beta_0] + \ldots + a_k[\beta_k - \beta_{k-1}], \tag{16}$$

$$p \geqslant a_0 \rhd a_1 \rhd \ldots \rhd a_k \neq 0,$$

$$0 \neq \beta_0 \prec \beta_1 \prec \ldots \prec \beta_k \preceq \beta,$$

$$v(p[\beta_k] - \delta) \geqslant v(p[\beta] - \delta). \tag{17}$$

Так как δ — наибольшее общее начало формальных рядов $p[\beta]$ и α, то $\partial(p[\beta] - \delta) \neq \partial(\alpha - \delta)$, откуда получаем соотношения

$$v(p[\beta] - \alpha) = v((p[\beta] - \delta) - (\alpha - \delta)) = \min\{v(p[\beta] - \delta)), v(\alpha - \delta)\} \leqslant \begin{cases} v(\alpha - \delta), \\ v(p[\beta] - \delta). \end{cases}$$

Учитывая эти неравенства, а также неравенство (17), получаем

$$v(p[\beta_k] - \alpha) = v((p[\beta_k] - \delta) - (\alpha - \delta)) \geqslant \min\{v(p[\beta_k] - \delta)), v(\alpha - \delta)\} \geqslant$$
$$\geqslant \min\{v(p[\beta] - \delta), v(\alpha - \delta)\} \geqslant v(p[\beta] - \alpha).$$

Обозначим $\gamma = q[\alpha]$ (что равносильно $p[\gamma] = \alpha$). Тогда неравенство

$$v(p[\beta_k] - \alpha) \geqslant v(p[\beta] - \alpha)$$

можно переписать в виде

$$v(p[\gamma - \beta_k]) \geqslant v(p[\gamma - \beta]).$$

Применяя монотонность оператора p, получим неравенство

$$v(\gamma - \beta_k) \geqslant v(\gamma - \beta).$$

Если учесть, что $\beta_k \preceq \beta \prec \gamma$, то отсюда следует равенство $\beta_k = \beta$.

Выразим из (16) ряд β:

$$\beta = a_k^{-1}[\delta] + \beta_{k-1} - a_k^{-1}a_{k-1}[\beta_{k-1} - \beta_{k-2}] - \ldots - a_k^{-1}a_0[\beta_0]. \tag{18}$$

Если $a_k \lhd p$, то $a_k^{-1} \lhd q$ и предположение индукции, применённое к рядам $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$, завершает доказательство. А именно, каждый из β_i $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ можно представить в виде (15) и подставить в (18). Заметим, что формальный ряд δ представлять в виде (15) нет нужды, поскольку $\delta \preceq \alpha$. Мы получим в результате представление вида (15), где все q_i будут суммами произведений операторов вида $a_k^{-1}a_j$ (см. (18)). Учитывая, что $D(<q)$ — кольцо, получаем операторы q_i, более простые, чем q.

Если β — однородный ряд, то $k = 0$ и $\beta = a_k^{-1}[\delta]$ — искомое представление. Это основание индукции. Нам осталось разобрать случай $a_k = p$. Но тогда $k = 0$ и $q[\delta] = \beta \prec q[\alpha]$. Это противоречит предположению в части «более того».

Докажем теперь первую часть утверждения. Пусть снова $0 \neq \beta \prec q[\alpha]$. Найдём сначала наибольшее начало $\alpha^* \preceq \alpha$, такое что $q[\alpha^*] \preceq \beta$. Тогда по доказанному выше мы можем представить ряд $\beta - q[\alpha^*]$ в виде

$$\beta - q[\alpha^*] = q'_1[\alpha_0 - \alpha^*] + q'_2[\alpha_1 - \alpha^*] + \ldots + q'_k[\alpha_k - \alpha^*],$$

где $\alpha^* \prec \alpha_i$ и $q'_i \lhd q$ для всех i. В этом случае

$$\begin{pmatrix} q & q'_1 & -q'_1 & q'_2 & -q'_2 & \ldots & q'_k & -q'_k \\ \alpha^* & \alpha_0 & \alpha^* & \alpha_1 & \alpha^* & \ldots & \alpha_k & \alpha^* \end{pmatrix}$$

будет искомой матрицей, которая проще, чем $(q, \alpha)^\top$, и представляет ряд β. $\square$

В следующей теореме делается существенный шаг в продолжении свойства вполне рациональности с менее сложных операторов на более сложные.

Теорема 16. *Пусть $D[n]$ является L-кольцом для некоторого натурального n. Тогда любой элемент кольца $D[n+1]$ непрерывен и вполне рационален. В частности, $FG = D[1]$ есть L-кольцо, а кольцо $D[2]$, порождённое над FG всеми обратными элементами к ненулевым элементам из FG, состоит из непрерывных и вполне рациональных операторов.*

Доказательство. Непрерывность доказана в [3, теорема 2]. Вполне рациональность любого элемента $d \in D[n+1]$ докажем индукцией по сложности. Основание индукции верно по предложению 8. Пусть теперь дано, что любой элемент, более простой, чем d, вполне рационален. Если d аддитивно разложим, то результат следует из предложения 6.

Пусть d аддитивно неразложим и $d = q_1 \ldots q_t$ — полное мультипликативное разложение. Каждый из атомных операторов q_i вполне рационален по лемме 15. Тогда применимо следствие 13, из которого следует результат.

Доказательство того факта, что FG есть L-кольцо, а именно обратимость любого ненулевого оператора из FG, фактически содержится в [1], но его в более простом и полном виде можно найти и в [3]. $\square$

6. Изменение носителя

В этом разделе мы изучаем поведение носителя $d[h]$ в зависимости от элемента $h \in G$; точнее, мы сравниваем два носителя $\operatorname{supp} d[h_1]$ и $\operatorname{supp} d[h_2]$ на кофинальность одного в другом. Оказывается, можно сделать вполне определённые выводы в случае, когда d является атомным оператором или, более общо, аддитивно неразложимым оператором.

Предложение 17. *Пусть H — подгруппа в группе G и D_H — рациональное замыкание группового кольца FH в $\operatorname{End} L_K$. Выберем какой-либо формальный ряд $\gamma \in L$. Тогда*

$$\bigcup_{d\in D_H} \operatorname{supp} d[\gamma] \subseteq \bigcup_{g\in H} V_g(\operatorname{supp}\gamma). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть Y обозначает правую часть в (19). Заметим, что Y — подмножество в Γ и $V_g(Y) \subseteq Y$ для любого $g \in H$. Мы докажем включение

$$\operatorname{supp} d[\gamma] \subseteq Y \tag{20}$$

трансфинитной индукцией по сложности элемента $d \in D_H$. Для нулевого элемента и для $d \in F^* \times H$ включение (20) выполняется тривиальным образом. Предположим, что $\operatorname{supp} d'[\gamma] \subseteq Y$ верно для любого $d' \in D_H$, более простого, чем d.

Случай 1: оператор d аддитивно разложим. Следовательно, $d = r + s$ для некоторых $r, s \lhd d$. Тогда $\operatorname{supp} r[\gamma] \cup \operatorname{supp} s[\gamma] \subseteq Y$ по предположению индукции. Отсюда следует, что

$$\operatorname{supp} d[\gamma] \subseteq \operatorname{supp} r[\gamma] \cup \operatorname{supp} s[\gamma] \subseteq Y.$$

Случай 2: оператор d аддитивно неразложим и не принадлежит групповому кольцу FG. Тогда $d = p^{-1}$ для некоторого $p \lhd d$ (см. [10, теорема 4.8]). Пусть $\beta = d[\gamma]$ и $\beta = \beta_0 + \beta_1$ — разложение в сумму двух формальных рядов, такое что

$$\operatorname{supp}\beta_0 \subseteq Y, \quad \operatorname{supp}\beta_1 \cap Y = \varnothing. \tag{21}$$

Имеют место равенства $p[\beta_0] + p[\beta_1] = p[\beta] = \gamma$, и тогда получаем включения

$$\operatorname{supp} p[\beta_0] \subseteq \bigcup_{a\in F^*\times H} V_a(\operatorname{supp}\beta_0) \subseteq \bigcup_{a\in F^*\times H} V_a(Y) \subseteq Y$$

по предположению индукции. Таким образом,

$$\operatorname{supp} p[\beta_1] = \operatorname{supp}(\gamma - p[\beta_0]) \subseteq \operatorname{supp}\gamma \cup \operatorname{supp} p[\beta_0] \subseteq Y.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{supp} p[\beta_1] \subseteq \bigcup_{a\in F^*\times H} V_a(\operatorname{supp}\beta_1).$$

Теперь, если мы предположим, что существует элемент $g \in \operatorname{supp} p[\beta_1]$, то он может быть записан двумя способами:

$$g = V_a(h) \quad (a \in F^* \times H,\ h \in \operatorname{supp}\gamma),$$
$$g = V_b(e) \quad (b \in F^* \times H,\ e \in \operatorname{supp}\beta_1).$$

Следовательно $e = V_{b^{-1}a}(h) \in Y$, т. е. $e \in \operatorname{supp}\beta_1 \cap Y$ — противоречие с (21). Это противоречие показывает, что $\operatorname{supp} p[\beta_1] = \varnothing$, откуда $\beta_1 = 0$. Тогда $\operatorname{supp}\beta = \operatorname{supp}\beta_1 \subseteq Y$, как и утверждалось. □

Напомним, что через U_ε для точки ε дедекиндова замыкания $\hat{\Gamma}$ мы обозначаем подгруппу группы G, состоящую из таких элементов g, что $V_g(\varepsilon) = \varepsilon$. Здесь подразумевается, что монотонная биекция $V_g\colon \Gamma \to \Gamma$ продолжена на дедекиндово замыкание $\hat{\Gamma}$. Продолжение единственно и является также монотонной биекцией, по этой причине оно обозначается тем же символом.

Предложение 18. *Пусть $\varepsilon \in \hat{\Gamma} \cup \{\pm\infty\}$ и $b \in D_\varepsilon$. Тогда для любых $\gamma, \beta \in L$ верна следующая импликация*:

$$\operatorname{supp}\gamma < \varepsilon < v(\beta) \implies \operatorname{supp} b[\gamma] < \varepsilon < v(b[\beta]).$$

Если предположить дополнительно, что b — монотонный оператор, то $V_b(\varepsilon) = \varepsilon$.

Доказательство. Применяем предложение 17, в котором берём U_ε вместо H. Это приводит к следующим включениям и оценкам:

$$\operatorname{supp} b[\gamma] \subseteq \bigcup_{g \in U_\varepsilon} V_g(\operatorname{supp}\gamma) < \varepsilon, \quad \operatorname{supp} b[\beta] \subseteq \bigcup_{g \in U_\varepsilon} V_g(\operatorname{supp}\beta) > \varepsilon.$$

Здесь мы учитываем равенство $V_g(\varepsilon) = \varepsilon$ для любого $g \in U_\varepsilon$ и монотонность отображения V_g.

Предположим, что b — монотонный оператор. Таким образом, $V_b\colon \Gamma \to \Gamma$ — непрерывная биекция. Получаем

$$V_b(\varepsilon) = \lim_{h \to \varepsilon,\, h \in \Gamma} V_b(h) = \begin{cases} \lim\limits_{h \to \varepsilon,\, h < \varepsilon} V_b(h) \leqslant \varepsilon, \\ \lim\limits_{h \to \varepsilon,\, h > \varepsilon} V_b(h) \geqslant \varepsilon \end{cases} = \varepsilon,$$

что завершает доказательство предложения. □

Предложение 19. *Пусть $d \in D$ — элемент, для которого выполняется одно из двух условий*:

1) *d неразложим и $D(< d)$ — L-группа*;
2) *$D(\leqslant d)$ — L-группа.*

Тогда для любых $h_1, h_2 \in \Gamma$ верна следующая импликация:

$$h_1 \leqslant h_2 \implies \operatorname{supp} d[h_1] \lessdot \operatorname{supp} d[h_2]. \tag{22}$$

(*Смысл знака $\lessdot$ следующий*: *для любого $h \in \operatorname{supp} d[h_1]$ найдётся $h' \in \operatorname{supp} d[h_2]$, такой что $h \leqslant h'$*).

Доказательство. Сначала заметим, что в обоих случаях d будет вполне рациональным L-оператором (см. теорема 16).

Предположим, что существует элемент $e \in \operatorname{supp} d[h_1]$, удовлетворяющий условию $e > \operatorname{supp} d[h_2]$. Тогда $s := d_e^{h_1} \lhd d$. В обоих случаях разность $d - s$ — монотонный автоморфизм (см. следствие 14). Таким образом,

$$v((d-s)[h_2]) \geqslant v((d-s)[h_1]) \geqslant e > \operatorname{supp} d[h_2].$$

Следовательно, $d[h_2]$ будет началом $s[h_2]$ (свойства оператора усечения). Так как s вполне рационален, мы можем представить начало $d[h_2]$ в виде $d[h_2] = b[h_2]$

для некоторого $b \leqslant s$. Более точно, если $\varepsilon := v(s[h_2] - d[h_2])$, то $b = s_\varepsilon^{h_2}$. Таким образом, $b = (d_e^{h_1})_\varepsilon^{h_2}$ и $b \lhd d$, тем самым разность $d-b$ — монотонный автоморфизм в обоих случаях. Но $(d-b)[h_2] = 0$. Это противоречие показывает, что наше предположение об элементе e ошибочно, и (22) верно. □

Определение 20. Для рационального оператора d и формального ряда β пару (d, β) назовём *редуцируемой*, если существует матрица $X \in \mathcal{M}(D, L)$, более простая, чем $(d, \beta)^\top$, и представляющая ряд $d[\beta]$. В противном случае назовём пару (d, β) *нередуцируемой*.

Отметим простейшие случаи нередуцируемости и редуцируемости.

1. Пара $(0, 0)$ нередуцируема.
2. Пара $(0, \beta)$ с ненулевым $\beta \in L$ всегда редуцируема, так как равенство $0[\beta] = 0[\beta_0]$ выполняется для любого собственного начала β_0 ряда β.
3. Если d — мономиальный оператор ($d \in \mathrm{A}$), то пара (d, β) редуцируема тогда и только тогда, когда найдутся элементы $a_1, \dots, a_k \in A$ и собственные начала $\beta_1, \dots, \beta_k$ ряда β, такие что $d[\beta] = a_1[\beta_1] + \ldots + a_k[\beta_k]$. Например, это так, если носитель $\operatorname{supp} \beta$ конечен.
4. Пара $(d, 0)$ с ненулевым $d \in D$ всегда редуцируема, так как $d[0] = 0[0]$ и $0 \lhd d$.
5. Предположим, что рациональный оператор d таков, что разность $d-b$ является мономорфизмом для любого $b \lhd d$. (Например, это так в случае $d \in \mathrm{A}$). Тогда для любой точки $h \in \Gamma$ пара (d, h) нередуцируема. Действительно, однородный ряд не имеет собственных начал. Таким образом, определение редуцируемости с $\beta = h$ может быть переписано как наличие оператора b, более простого, чем d, и такого, что $d[h] = b[h]$. Отсюда следуют равенства $(d-b)[h] = 0$ и $d = b$ согласно нашему предположению. Но тогда $d \lhd d$ — противоречие с антирефлексивностью отношения $\lhd$.

Для доказательства основного результата этого раздела нам понадобятся две леммы.

Лемма 21. *Пусть $s \in D$ — аддитивно неразложимый оператор с полным мультипликативным разложением $s = q_1 q_2 \ldots q_n$. Предположим, что $D(<s)$ — L-группа. Обозначим $b = q_2 \ldots q_n$, если $n > 1$, и $b = 1$ в противном случае. Положим также $\beta = b[h]$ для некоторого $h \in \Gamma$. Тогда пара (q_1, β) нередуцируема.*

Доказательство. Случай $s = 0$ тривиален. Если $s \in A$, то $b = 1$ и $\beta = h$. Пара (s, β) нередуцируема согласно замечанию 5, сделанному выше. Следовательно, нам надо разобрать лишь случай, когда s не принадлежит групповому кольцу FG. Обозначим $p = q_1^{-1}$ и заметим, что $p \lhd q_1$ (см. [10]). Предположим противное к заключению леммы, т. е. существует матрица

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_k \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} q_1 \\ \beta \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая условию

$$s_0[\beta_0] + s_1[\beta_1] + \ldots + s_k[\beta_k] = q_1[\beta]. \tag{23}$$

Так как $\beta_i \preceq b[h]$, то существует редукция b_i произведения $b = q_2 \dots q_n$, такая что $b_i[h] = \beta_i$ ($1 \leqslant i \leqslant k$). Подстановка $\beta_i = b_i[h]$ в (23) даёт

$$(s_0 b_0 + s_1 b_1 + \ldots + s_k b_k)[h] = s[h]. \tag{24}$$

Неравенство $s_i b_i \lhd s$ выполняется по [10, теорема 4.6, (iii)]. Таким образом, $\sum\limits_{i=0}^{k} s_i b_i \lhd s$, и $\sum\limits_{i=0}^{k} s_i b_i$ является собственной редукцией произведения $q_1 q_2 \dots q_n = s$. Тогда $s - \sum\limits_{i=0}^{k} s_i b_i$ — монотонный оператор по следствию 14. Это противоречит равенству (24). Противоречие показывает, что допущение, сделанное выше, неверно, следовательно, пара (q_1, β) нередуцируема. □

Лемма 22 (ключевая). *Пусть $q = p^{-1}$ — ненулевой атомный оператор, для которого $D(<q)$ — L-кольцо. Предположим, что пара (q, β) нередуцируема для некоторого формального ряда β. Обозначим $\gamma := d[\beta]$. Пусть элемент $h \in \Gamma$ не превосходит $\operatorname{supp}\gamma$. Тогда для любого $\tilde{h} \in \operatorname{supp}\beta$ и для любого $h' \in \operatorname{supp} p[h]$ найдётся элемент $h_0 \in \operatorname{supp}\gamma$, такой что $V_p(h_0) \geqslant \max(\tilde{h}, h')$, или, символически,*

$$\operatorname{supp}\beta \cup \Bigg(\bigcup_{h \leqslant \operatorname{supp}\gamma} \operatorname{supp} p[h] \Bigg) \leqslant V_p(\operatorname{supp}\gamma). \tag{25}$$

Доказательство. Нередуцируемость пары (q, β) влечёт неравенство $\beta \neq 0$ (см. замечание 2 перед леммой 21), следовательно, $\gamma \neq 0$.

Предположим, что неравенство (25) не выполняется (предположение А). Тогда можно найти элемент $e \in \Gamma$ со следующим свойством:

$$e \leqslant \Bigg(\operatorname{supp}\beta \cup \Bigg(\bigcup_{h \leqslant \operatorname{supp}\gamma} \operatorname{supp} p[h] \Bigg) \Bigg), \quad e > V_p(\operatorname{supp}\gamma). \tag{26}$$

Далее разделим доказательство на пять шагов.

Шаг 1. Применим ключевую лемму 9 к началу $\beta_{<e}$ ряда $\beta = p[\gamma]$ и получим

$$\beta_{<e} = p_0[\gamma_0] + p_1[\gamma_1 - \gamma_0] + \ldots + p_k[\gamma_k - \gamma_{k-1}], \tag{27}$$

$$p \geqslant p_0 \rhd p_1 \rhd \ldots \rhd p_k \neq 0, \tag{28}$$

$$0 \neq \gamma_0 \prec \gamma_1 \prec \ldots \prec \gamma_k \prec \gamma,$$

$$p_i = p_e^h \text{ для любого } h \in \operatorname{supp}(\gamma_i - \gamma_{i-1}) \quad (0 \leqslant i \leqslant k,\ \gamma_{-1} := 0), \tag{29}$$

$$h \in \operatorname{supp}(\gamma - \gamma_k) \iff v(p[h]) \geqslant e. \tag{30}$$

Так как $v(p[h]) < e$ для любого $h \in \operatorname{supp}\gamma$, то получаем из (30), что $\gamma_k = \gamma$.

Предположим на время, что $p_k = p$ (предположение Б). Во-первых, это влечёт равенство $k = 0$ (см. (28)). Таким образом, $\beta_{<e} = p_k[\gamma_k] = p[\gamma] = \beta$, и мы получаем неравенство $e > \operatorname{supp}\beta$. Из равенства $p_k = p$ также следует, что $p = p_e^h$ для любого $h \in \operatorname{supp}\gamma$ (см. (29)). Таким образом, $\operatorname{supp} p[h] < e$ для всех $h \in \operatorname{supp}\gamma$ и, более того, последнее неравенство верно для всех $h \leqslant \operatorname{supp}\gamma$

согласно предложению 19. В итоге мы имеем

$$\operatorname{supp}\beta \cup \Bigl(\bigcup_{h\leqslant \operatorname{supp}\gamma} \operatorname{supp} p[h]\Bigr) < e,$$

что противоречит соотношению (26). Это противоречие показывает, что предположение Б должно быть отвергнуто. Следовательно, неравенство $p_k \lhd p$ доказано. Попутно мы доказали, что q — собственный атомный оператор, иначе не существует ненулевого p_k, для которого $p_k \lhd p \trianglelefteq q$. Итак, $p_k^{-1} \lhd q$ по [10, теорема 4.8] и все операторы p_i проще, чем q. Из равенства (27) получаем

$$\gamma = p_k^{-1}[\beta_{<e}] + \gamma_{k-1} - p_k^{-1}p_0[\gamma_0] - p_k^{-1}p_1[\gamma_1-\gamma_0] - \ldots - p_k^{-1}p_{k-1}[\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}]. \quad (31)$$

Шаг 2. Если начало $\beta^* \prec \beta$ таково, что $\gamma^* := q[\beta^*] \prec \gamma$, то пара $(q, \beta-\beta^*)$ нередуцируема.

Действительно, если

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ \beta_0-\beta^* & \beta_1-\beta^* & \ldots & \beta_k-\beta^* \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} q \\ \beta-\beta^* \end{pmatrix}$$

и

$$\sum_{i=0}^{k} s_i[\beta_i-\beta^*] = d[\beta-\beta^*],$$

то

$$q[\beta] = s_0[\beta_0] - s_0[\beta^*] + \sum_{i=1}^{k} s_i[\beta_i] - \sum_{i=1}^{k} s_i[\beta^*] + d[\beta^*]$$

и

$$\begin{pmatrix} s_0 & -s_0 & s_1 & \ldots & s_k & -s_1 & \ldots & -s_k & q \\ \beta_0 & \beta^* & \beta_1 & \ldots & \beta_k & \beta^* & \ldots & \beta^* & \beta^* \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} q \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Если начало $\beta^* \prec \beta$ таково, что $\gamma^* := d[\beta^*] \prec \gamma$, то

$$\operatorname{supp}(\beta-\beta^*) \sim \operatorname{supp}\beta,$$
$$\operatorname{supp}(\gamma-\gamma^*) \sim \operatorname{supp}\gamma,$$
$$V_p(\operatorname{supp}(\gamma-\gamma^*)) \sim V_p(\operatorname{supp}\gamma),$$
$$\bigcup_{h\leqslant \operatorname{supp}(\gamma-\gamma^*)} \operatorname{supp} p[h] = \bigcup_{h\leqslant \operatorname{supp}\gamma} \operatorname{supp} p[h].$$

Третья взаимная кофинальность выполняется благодаря монотонности отображения V_p. Так как $\operatorname{supp}(\gamma-\gamma^*) \sim \operatorname{supp}\gamma$, мы получаем оценку

$$h \leqslant \operatorname{supp}(\gamma-\gamma^*) \iff h \leqslant \operatorname{supp}\gamma,$$

из которой следует последнее равенство.

Шаг 4. Предположим, что не существует ненулевого ряда $\beta^* \prec \beta$, для которого $d[\beta^*] \preceq \gamma_{k-1}$. Тогда по лемме 15 любой формальный ряд γ_i может быть записан в виде

$$\gamma_i = b_{i1}[\beta_{i1}] + \ldots + b_{im_i}[\beta_{im_i}], \quad (32)$$

где $b_{ij} \lhd d$ и $\beta_{ij} \preceq \beta$. Подставим (32) в (31). Получим равенство

$$\gamma = p_k^{-1}[\beta_{<e}] + \sum_j b_{k-1\,j}[\beta_{k-1\,j}] - p_k^{-1}p_0 \sum_j b_{0j}[\beta_{0j}] - p_k^{-1}p_1 \sum_j b_{1j}[\beta_{1j}] + \\ + p_k^{-1}p_1 \sum_j b_{0j}[\beta_{0j}] - \ldots - p_k^{-1}p_{k-1} \sum_j b_{k-1\,j}[\beta_{k-1\,j}] + p_k^{-1}p_{k-1} \sum_j b_{k-2\,j}[\beta_{k-2\,j}],$$

которое может быть переписано в виде

$$\gamma = s_0[\beta_0] + s_1[\beta_1] + \ldots + s_k[\beta_k],$$

где $\beta_i \preceq \beta$ и все s_i принадлежат кольцу, порождённому $p_k^{-1}, p_0, \ldots, p_{k-1}$, $b_{0j}, \ldots, b_{k-1\,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant m_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1)$. Следовательно, все s_i проще, чем d. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_k \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} q \\ \beta \end{pmatrix},$$

что противоречит условию леммы.

Шаг 5. Пусть β^* — максимальное начало β относительно условия $\gamma^* := q[\beta^*] \preceq \gamma_{k-1}$. Тогда не существует ненулевого ряда $\tilde{\beta} \prec \beta - \beta^*$, для которого $q[\tilde{\beta}] \preceq \gamma_{k-1} - \gamma^*$. Согласно второму шагу пара $(q, \beta - \beta^*)$ нередуцируема, а шаг 3 даёт соотношение

$$e \leqslant \operatorname{supp}(\beta - \beta^*) \cup \Bigg(\bigcup_{h \leqslant \operatorname{supp}(\gamma - \gamma^*)} \operatorname{supp} p[h] \Bigg), \quad e > V_p(\operatorname{supp}(\gamma - \gamma^*)).$$

Таким образом, мы можем повторить всё то, что делали с β, e и $\gamma = q[\beta]$, для $\beta - \beta^*$, e и ряда $\gamma - \gamma^* = q[\beta - \beta^*]$. Во-первых, получаем

$$(\beta - \beta^*)_{<e} = \tilde{p}_0[\tilde{\gamma}_0] + \tilde{p}_1[\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_0] + \ldots + \tilde{p}_{\tilde{k}}[\tilde{\gamma}_{\tilde{k}} - \tilde{\gamma}_{\tilde{k}-1}], \tag{33}$$

$$p \geqslant \tilde{p}_0 \rhd \tilde{p}_1 \rhd \ldots \rhd \tilde{p}_{\tilde{k}} \neq 0,$$

$$0 \neq \tilde{\gamma}_0 \prec \tilde{\gamma}_1 \prec \ldots \prec \tilde{\gamma}_{\tilde{k}} \prec \gamma - \gamma^*,$$

$$\tilde{p}_i = p_e^h \text{ для любого } h \in \operatorname{supp}(\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_{i-1}) \quad (0 \leqslant i \leqslant \tilde{k},\ \tilde{\gamma}_{-1} := 0). \tag{34}$$

Во-вторых, снова получаем соотношения $\tilde{\gamma}_{\tilde{k}} = \gamma - \gamma^*$ и $\tilde{p}_{\tilde{k}} \lhd p$. Сравнение (34) с (30) убеждает нас, что (33) может быть получено из (27) следующей процедурой. Пусть i — наименьшее число, такое что $\gamma^* \prec \gamma_i$. (Ясно, что $0 \leqslant i \leqslant k$; случаи $\gamma^* = \gamma_{k-1}$ и $i = k$ не исключаются.) Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 &= \gamma_i - \gamma^*, & \tilde{p}_0 &= p_i, \\ \tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_0 &= \gamma_{i+1} - \gamma_i, & \tilde{p}_1 &= p_{i+1}, \\ &\ldots & &\ldots \\ \tilde{\gamma}_{\tilde{k}} - \tilde{\gamma}_{\tilde{k}-1} &= \gamma - \gamma_{k-1}, & \tilde{p}_{\tilde{k}} &= p_k. \end{aligned}$$

В частности, $\tilde{\gamma}_{\tilde{k}} = \gamma_{k-1} - \gamma^*$. Значит, не существует $0 \neq \tilde{\beta} \prec \beta - \beta^*$, для которого $q[\tilde{\beta}] \preceq \tilde{\gamma}_{\tilde{k}-1}$. Применение четвёртого шага даёт, что пара $(q, \beta - \beta^*)$ не является нередуцируемой — противоречие с шагом 2. Это противоречие показывает, что предположение A неверно, что и заканчивает доказательство леммы. $\square$

Теорема 23.

1. *Пусть $q \in D$ — атомный оператор, такой что множество $D(<q)$ является L-кольцом. Выберем элементы $h_1, h_2 \in \Gamma$, для которых $h_1 < h_2$. Тогда*
$$\operatorname{supp} q[h_1] < v(q[h_2]) \tag{35}$$
или
$$\operatorname{supp} q[h_1] \sim \operatorname{supp} q[h_2]. \tag{36}$$

2. *Пусть $s \in D$ — аддитивно неразложимый оператор с полным мультипликативным разложением $s = q_1 q_2 \dots q_t$. Предположим, что $D(<s)$ — L-группа и $h_1 < h_2$ для $h_1, h_2 \in \Gamma$. Тогда для любых $k = 1, 2, \dots, t$ верна следующая импликация:*
$$\operatorname{supp} q_k \dots q_t[h_1] \sim \operatorname{supp} q_k \dots q_t[h_2] \implies \operatorname{supp} s[h_1] \sim \operatorname{supp} s[h_2]. \tag{37}$$

Доказательство. 1. Предположим, что эквивалентность (36) не имеет места. Мы докажем неравенство (35) при этом предположении. Так как $\operatorname{supp} q[h_1] \leqslant \operatorname{supp} q[h_2]$ согласно предложению 19, существует элемент $h^* \in \operatorname{supp} q[h_2]$, удовлетворяющий условию $h^* > \operatorname{supp} q[h_1]$. В частности, $q \neq 0$. Пусть h^* — наименьший элемент в $\operatorname{supp} q[h_2]$ относительно свойства $h^* > \operatorname{supp} q[h_1]$. Обозначим
$$p := q^{-1}, \quad \gamma := q[h_2], \quad \gamma_0 := \gamma_{<h^*}, \quad \gamma^* := \gamma - \gamma_0.$$
Получим
$$h_2 = p[\gamma] = p[\gamma_0] + p[\gamma^*], \quad p[\gamma^*] = h_2 - p[\gamma_0], \quad v(\gamma^*) = h^*. \tag{38}$$

Предположим, что $\gamma_0 \neq 0$. Тогда $v(p[\gamma]) = v(p[\gamma_0]) < v(p[\gamma^*])$, так как p — монотонный автоморфизм. Более того,
$$h_2 = \partial p[\gamma] = \partial p[\gamma_0] \implies h_2 \in \operatorname{supp} p[\gamma_0]. \tag{39}$$
Таким образом,
$$V_p(h^*) = v(p[h^*]) \overset{(38)}{=} v(p[\gamma^*]) \in \operatorname{supp} p[\gamma^*] \overset{(38)}{\subseteq} \operatorname{supp} p[\gamma_0] \cup \{h_2\} \overset{(39)}{=} \operatorname{supp} p[\gamma_0]. \tag{40}$$

Произвольный элемент $h \in \operatorname{supp} \gamma_0$ обладает свойством $h \leqslant \operatorname{supp} q[h_1]$ в силу минимальности элемента h^*. Продолжим выкладки в (40):
$$V_p(h^*) \in \operatorname{supp} p[\gamma_0] \subseteq \bigcup_{h \leqslant \operatorname{supp} q[h_1]} \operatorname{supp} p[h] \leqslant V_p(\operatorname{supp} q[h_1]),$$
где последнее отношение $\leqslant$ следует из леммы 22. Это значит, что существует элемент $h_0 \in \operatorname{supp} q[h_1]$, удовлетворяющий условию $V_p(h^*) \leqslant V_p(h_0)$. Отсюда $h^* \leqslant h_0$ — противоречие с неравенством $h^* > \operatorname{supp} q[h_1]$. Это показывает, что предположение, что $\gamma_0 \neq 0$, неверно, и тем самым равенство $\gamma_0 = 0$ доказано. Таким образом, $\gamma = \gamma^*$ и
$$v(q[h_2]) = v(\gamma) = v(\gamma^*) = h^* > \operatorname{supp} q[h_1].$$

2. Используем индукцию по t. Основание индукции — случай $t = 1$ с единственной возможностью для числа k быть равным единице. Тогда импликация (37) тривиальна. Предположим, что для любого аддитивно неразложимого оператора s' с числом сомножителей в полном мультипликативном разложении меньше t, такого что $D(< s')$ — L-кольцо, утверждение 2 верно. Здесь $t = 2, 3, \ldots$. Если $k = 1$ в предположениях утверждения 2, то опять (37) тривиально выполняется. Поэтому предположим, что $k > 1$. Так как $q_2 \ldots q_t$ является полным мультипликативным разложением аддитивно неразложимого оператора s' (см. [10, теорема 4.6, (i)]), получаем, что $\operatorname{supp} s'[h_1] \sim \operatorname{supp} s'[h_2]$ по предположению индукции. Обозначим

$$\beta := s'[h_1], \quad p := q_1^{-1}, \quad \gamma^* := s[h_1] = p^{-1}[\beta], \quad \gamma := s[h_2].$$

Получим $\operatorname{supp} s[h_1] \leqslant \operatorname{supp} s[h_2]$ согласно предложению 19.

Предположим, что соотношение (37) неверно. Тогда найдём наименьший элемент $h^* \in \operatorname{supp} s[h_2] = \operatorname{supp} \gamma$, который превосходит любой элемент из $\operatorname{supp} s[h_1] = \operatorname{supp} \gamma^*$. Пусть $\delta := \gamma - \gamma_{<h^*}$, тем самым $v(\delta) = h^*$ и

$$V_p(h^*) = v(p[h^*]) = v(p[\delta]). \tag{41}$$

Имеет место равенство $p[\gamma] = ps[h_2] = s'[h_2]$, из чего вытекает, что

$$p[\delta] = -p[\gamma_{<h^*}] + s'[h_2]. \tag{42}$$

Получаем цепь включений

$$\begin{aligned} V_p(h^*) \overset{(41)}{=} \operatorname{supp} p[\delta] \overset{(42)}{\subseteq} \operatorname{supp} p[\gamma_{<h^*}] \cup \operatorname{supp} s'[h_2] \subseteq \\ \subseteq \bigcup_{h \leqslant \operatorname{supp} \gamma_{<h^*}} \operatorname{supp} p[h] \cup \operatorname{supp} s'[h_2]. \end{aligned} \tag{43}$$

Последнее включение верно в силу непрерывности оператора p, который определённо проще, чем s. Так как $\operatorname{supp} s'[h_2] \sim \operatorname{supp} s'[h_1] = \operatorname{supp} \beta$ по индукционному предположению и $\operatorname{supp} \gamma_{<h^*} \leqslant \operatorname{supp} \gamma^*$ по свойству минимальности h^*, из (43) выводим неравенство

$$V_p(h^*) \leqslant \bigcup_{h \leqslant \operatorname{supp} \gamma^*} \operatorname{supp} p[h] \cup \operatorname{supp} \beta \leqslant V_p(\operatorname{supp} \gamma^*). \tag{44}$$

Здесь последнее неравенство выполняется по лемме 22, где формальный ряд $\gamma = s[\beta]$ заменён на $\gamma^* = q_1[\beta]$. Также заметим, что пара (q_1, β) нередуцируема по лемме 21. Из (44) следует, что $h^* \leqslant \operatorname{supp} \gamma^*$ — противоречие с выбором h^*. Это противоречие показывает, что наше предположение неверно, значит, импликация (37) выполняется. □

7. Основное неравенство для норм

Пусть q — какой-либо оператор (не обязательно рациональный) и $\varepsilon \in \hat{\Gamma} \setminus \Gamma$. Обозначим через $h \to \varepsilon$ фильтр, состоящий из всех пересечений $U \cap \Gamma$, где U —

окрестность точки ε в $\hat{\Gamma}$. Тогда полагаем по определению

$$V_q(\varepsilon) := \varliminf_{h\to\varepsilon} V_q(h) := \sup\,\inf\{V_q(h) \mid h \in U\cap\Gamma \text{ — элемент фильтра } h \to \varepsilon\}. \quad (45)$$

Нижний предел рассматривается в линейно упорядоченном множестве $\hat{\Gamma}\cup\{\pm\infty\}$ и всегда существует. Если q — L-автоморфизм, то правая часть в (45) совпадает с обычным пределом.

Предложение 24. *Пусть $\varepsilon, \eta \in \hat{\Gamma}$. Если верно неравенство $V_q(\varepsilon) > \eta$, то существуют элементы $h_1, h_2 \in \Gamma$, такие что*

$$\varepsilon \in [h_1, h_2] \text{ и для любого } h \in [h_1, h_2]\cap\Gamma \text{ верно неравенство } V_q(h) > \eta. \quad (46)$$

В случае, когда q — локально монотонный оператор, верно обратное утверждение: если существуют $h_1, h_2 \in \Gamma$, удовлетворяющие условию (46), *то $V_q(\varepsilon) > \eta$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon \in \Gamma$. Если $V_q(\varepsilon) > \eta$, то, взяв $h_1 = h_2 = \varepsilon$, получаем (46). Наоборот, если (46) верно, то и для $h = \varepsilon \in \in [h_1, h_2]\cap\Gamma$ выполняется неравенство $V_q(\varepsilon) = V_q(h) > \eta$. Здесь монотонностью мы не пользуемся.

Предположим, что $\varepsilon \notin \Gamma$. Пусть выполняется неравенство $V_q(\varepsilon) > \eta$. Тогда согласно определению нижнего предела найдутся точка $\eta' \in \hat{\Gamma}\cup\{\pm\infty\}$ правее точки η и интервал $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в $\hat{\Gamma}\cup\{\pm\infty\}$, содержащий такие ε, что и для любого элемента $h \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\cap\Gamma$ справедливо неравенство $V_q(h) \geqslant \eta'$. Считаем, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Обозначим

$$\Gamma_1 = \{h \in \Gamma \mid h < \varepsilon\}, \quad \Gamma_2 = \{h \in \Gamma \mid h > \varepsilon\}.$$

Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — сечение Дедекинда, причём Γ_1 не имеет наибольшего элемента, а Γ_2 не имеет наименьшего элемента. Так как $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, то найдутся $h_1 \in \Gamma_1$, $h_2 \in \Gamma_2$, удовлетворяющие условию $h_1 < \varepsilon < h_2$. Отрезок $[h_1, h_2]$ искомый, для него выполняется (46).

Теперь предположим, что верно (46) и q — локально монотонный оператор. Обозначим $\eta' = V_q(h_1)$. Тогда

$$\inf\{V_q(h) \mid h \in (h_1, h_2)\cap\Gamma\} \geqslant \eta' > \eta$$

в силу локальной монотонности. Тем самым $\varliminf\limits_{h\to\varepsilon} V_q(h) \geqslant \eta' > \eta$. □

Предложение 25. *Пусть q_1, q_2 — линейные операторы пространства L_K и либо q_1 — монотонный автоморфизм, либо $q_2 \in \mathrm{A}$. Тогда*

$$V_{q_1 q_2}(\varepsilon) = V_{q_1}(V_{q_2}(\varepsilon)) \quad (47)$$

для любого $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$.

Доказательство. 1. Предположим, что $\varepsilon = h \in \Gamma$. Если q_1 — монотонный автоморфизм, то

$$V_{q_1 q_2}(h) = v(q_1 q_2[h]) = v(q_1[q_2[h]]) = v(q_1[\partial q_2[h]]) = v(q_1[V_{q_2}(h)]) = V_{q_1} V_{q_2}(h).$$

Если $q_2 \in \mathrm{A}$, то $q_2[h] = gk$ для некоторого $g \in \Gamma$ и $k \in K^*$, откуда

$$V_{q_1 q_2}(h) = v(q_1 q_2[h]) = v(q_1[gk]) = v(q_1[g]) = V_{q_1}(g) = V_{q_1}(V_{q_2}(h)).$$

2. Предположим, что $\varepsilon \in \hat{\Gamma} \setminus \Gamma$. Пусть q_1 — монотонный автоморфизм. Тогда

$$V_{q_1 q_2}(\varepsilon) = \varliminf_{h \to \varepsilon} V_{q_1 q_2}(h) = \varliminf_{h \to \varepsilon} V_{q_1}(V_{q_2}(h)) = V_{q_1}\Big(\varliminf_{h \to \varepsilon} V_{q_2}(h)\Big) = V_{q_1} V_{q_2}(\varepsilon).$$

Если $q_2 \in A$, то

$$\begin{aligned} V_{q_1 q_2}(\varepsilon) = \varliminf_{h \to \varepsilon} V_{q_1 q_2}(h) = \varliminf_{h \to \varepsilon} V_{q_1}(V_{q_2}(h)) = \\ = \varliminf_{V_{q_2}(h) \to V_{q_2}(\varepsilon)} V_{q_1}(V_{q_2}(h)) = V_{q_1} V_{q_2}(\varepsilon). \end{aligned}$$

В третьем равенстве требуется, чтобы $q_2 \in A$. □

Теорема 26. *Для любых линейных операторов $q, p \in \operatorname{End} L_K$ и для любой точки $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ верно следующее неравенство*:

$$V_{q+p}(\varepsilon) \geqslant \min\{V_q(\varepsilon), V_p(\varepsilon)\}. \tag{48}$$

Доказательство. Если $\varepsilon \in \Gamma$, то (48) — основное неравенство для норм. Предположим, что $\varepsilon \notin \Gamma$. Будем доказывать (48) от противного. Предположим, что $V_{q+p}(\varepsilon) < \min\{V_q(\varepsilon), V_p(\varepsilon)\}$. Это эквивалентно системе

$$\begin{cases} V_{q+p}(\varepsilon) < V_q(\varepsilon), \\ V_{q+p}(\varepsilon) < V_p(\varepsilon). \end{cases} \tag{49}$$

Учитывая, что $V_q(\varepsilon) = \sup\limits_U \inf\{V_q(h) \mid h \in U \cap \Gamma\}$, где U пробегает окрестности точки ε, и аналогичное равенство верно для $V_p(\varepsilon)$, мы получаем, что (49) эквивалентно тому, что существуют окрестности U_1, U_2 точки ε в $\hat{\Gamma}$, такие что

$$\begin{cases} V_{q+p}(\varepsilon) < \inf\{V_q(h) \mid h \in U_1 \cap \Gamma\}, \\ V_{q+p}(\varepsilon) < \inf\{V_q(h) \mid h \in U_2 \cap \Gamma\}. \end{cases} \tag{50}$$

Обозначим $U_0 = U_1 \cap U_2$. Это окрестность точки ε, такая что для любого элемента $h \in U_0 \cap \Gamma$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} V_{q+p}(\varepsilon) < \eta \leqslant V_q(h), \\ V_{q+p}(\varepsilon) < \eta \leqslant V_p(h). \end{cases} \tag{51}$$

Здесь через η обозначен минимум правых частей в (50). Так как

$$V_{p+q}(h) \geqslant \min\{V_q(h), V_p(h)\},$$

то из неравенств (51) следует, что

$$\begin{aligned} & V_{p+q}(\varepsilon) < \eta \leqslant V_{p+q}(h)\ \forall h \in U_0 \cap \Gamma \iff \\ & \qquad \iff V_{p+q}(\varepsilon) < \eta \leqslant \inf\{V_{p+q}(h) \mid h \in U_0 \cap \Gamma\} \implies \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ V_{p+q}(\varepsilon) < \eta \leqslant \sup_U \inf\{V_{p+q}(h) \mid h \in U \cap \Gamma\} \overset{U - \text{окрестность } \varepsilon}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow\ V_{p+q}(\varepsilon) < \eta \leqslant V_{p+q}(\varepsilon) \implies V_{p+q}(\varepsilon) < V_{p+q}(\varepsilon) \,-$$

противоречие. Это противоречие и доказывает, что на самом деле верно неравенство (48). □

8. Разложения рациональных операторов в точке

Напомним, что D_ε есть рациональное замыкание группового кольца FU_ε в кольце $\operatorname{End} L_K$. Здесь и далее $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$.

Определение 27. Элемент $d \in D$ назовём *ε-однородным справа*, если d принадлежит множеству aD_ε для некоторого $a \in \mathrm{A}$. Аналогично элемент $d \in D$ назовём *ε-однородным слева*, если $d \in D_\varepsilon a$ для некоторого $a \in \mathrm{A}$.

Предложение 28. *Если рациональный оператор d ε-однороден справа* (*слева*)*, то adb* (*bda*) *таков же для любого элемента $a \in \mathrm{A}$ и любого оператора $b \in D_\varepsilon$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из мультипликативной замкнутости A и D_ε. □

Определение 29. Пусть $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ и $d \in D$ — ненулевой оператор. Равенство

$$d = a(u + w),\ \text{где } a \in A,\ u \in D_\varepsilon,\ w \in D, \tag{52}$$

будем называть *правым разложением рационального оператора d в точке ε*, если

$$\begin{cases} V_w(\varepsilon) > \varepsilon, \\ w \neq 0 \implies u \lhd d \text{ и } u \neq 0. \end{cases}$$

Аналогично для $\eta \in \hat{\Gamma}$ равенство

$$d = (\tilde{u} + \tilde{w})\tilde{a},\ \text{где } \tilde{a} \in A,\ \tilde{u} \in D_\eta,\ \tilde{w} \in D, \tag{53}$$

будем называть *левым разложением оператора d в точке η*, если

$$\begin{cases} V_w(\eta) > \eta, \\ \tilde{w} \neq 0 \implies \tilde{u} \lhd d \text{ и } \tilde{u} \neq 0. \end{cases}$$

Разложения (52) и (53) будем называть *согласованными*, если имеет место равенство

$$P_\eta a P_\varepsilon = P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon.$$

Установим простейшие свойства правого и левого разложений.

Предложение 30. *Для любых элементов $a \in A$ и $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ верно равенство $aD_\varepsilon a^{-1} = D_{V_a(\varepsilon)}$.*

Доказательство. Используя индукцию по сложности элемента d, докажем сначала, что для любого $d \in D_\varepsilon$ элемент ada^{-1} лежит в D_η, где $\eta{:=}V_a(\varepsilon)$. Таким образом получим включение $aD_\varepsilon a^{-1} \subseteq D_\eta$. Обратное включение доказывается аналогично. □

Предложение 31.

1. *Если* (52) *— правое разложение в точке ε, то $d = (aua^{-1}+awa^{-1})a$ — левое разложение в точке $V_a(\varepsilon)$.*
2. *Если* (53) *— левое разложение в точке η, то $d = \tilde{a}(\tilde{a}^{-1}\tilde{u}\tilde{a}+\tilde{a}^{-1}\tilde{w}\tilde{a})$ — правое разложение в точке $V_{\tilde{a}^{-1}}(\eta)$.*

Доказательство. Во-первых, $au^{-1}a \in D_\eta$ согласно предложению 30. Во-вторых, если $awa^{-1} \neq 0$, то $w \neq 0$, следовательно, $0 \neq u \lhd d$. Таким образом, $0 \neq au^{-1}a \lhd d$, так как u и aua^{-1} имеют одинаковую сложность. В-третьих,

$$V_{awa^{-1}}(\eta) = V_{awa^{-1}}V_a(\varepsilon) = V_{aw}(\varepsilon) \overset{\text{предложение 24}}{=} V_aV_w(\varepsilon) > V_a(\varepsilon) = \eta.$$

Утверждение 2 доказывается аналогично. □

Предложение 32. *Пусть $d = a'(u' + w')$ — ещё одно правое разложение рационального оператора d в точке $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$. Тогда*

$$\begin{cases} V_a(\varepsilon) = V_{a'}(\varepsilon), \\ u = a^{-1}a'u', \\ w = a^{-1}a'w'. \end{cases} \tag{54}$$

Доказательство. Предположим, что $V_a(\varepsilon) < V_{a'}(\varepsilon)$. Тогда, обозначая $c := a^{-1}a'$, мы получим $V_c(\varepsilon) > \varepsilon$ и $u + w = c(u' + w')$. Имеем $u = w - c(u' + w')$. Но $V_u(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ (см. предложение 18) и

$$V_{w-c(u'+w')}(\varepsilon) \geqslant \min\{V_w(\varepsilon), V_{c(u'+w')}(\varepsilon)\} > \varepsilon$$

согласно теореме 26. Это противоречие даёт $c \in A_\varepsilon$. Теперь $u - cu' = w - cw'$. Если $u - cu' \neq 0$, то опять

$$V_{u-cu'}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \quad V_{w-cw'}(\varepsilon) \geqslant \min\{V_w(\varepsilon), V_{cw'}(\varepsilon)\} > \varepsilon \text{ —}$$

противоречие (снова использовали теорему 26). Таким образом, $u = cu'$, следовательно, $w = cw'$, и доказательство завершено. □

Предложение 33. *Предположим, что D_ε — L-тело для любого $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$. Тогда $V_d(\varepsilon) = V_a(\varepsilon)$ для любого правого разложения* (52) *в точке ε и $V_{d^{-1}}(\eta) = V_{\tilde{a}^{-1}}(\eta)$ для любого левого разложения* (53) *в точке η.*

Доказательство. Элемент u будет монотонным автоморфизмом, и $V_u(\varepsilon) = \varepsilon$ в силу предложения 18. Это даёт равенство $V_{a^{-1}d}(\varepsilon) = \varepsilon$, так как $V_w(\varepsilon) > \varepsilon$. Равенство $V_d(\varepsilon) = V_a(\varepsilon)$ доказано.

Таким же образом можно доказать равенство $V_{d\tilde{a}^{-1}}(\eta) = \eta$, из которого вытекает соотношение $V_d(\eta) = V_a(\eta)$. □

Предложение 34. *Предположим, что D_ε — L-тело для любого элемента $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$. Если монотонный рациональный автоморфизм d имеет правое разложение в любой точке, то он имеет и левое разложение в любой точке. Обратное утверждение также верно.*

Доказательство. Пусть $\eta \in \hat{\Gamma}$ — произвольный элемент. Обозначим $\varepsilon := V_{d^{-1}}(\varepsilon)$. Пусть (52) — правое разложение оператора d в точке ε. Тогда $d = (aua^{-1} + awa^{-1})a$ — левое разложение в точке $V_a(\varepsilon)$ (см. предложение 31), которая равна $V_d(\varepsilon) = \eta$ согласно предложению 33. □

Предложение 35. *Предположим, что D_ε — L-тело для любого элемента $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — монотонные рациональные автоморфизмы, для которых существует правое разложение в любой точке. Тогда для любой точки $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ произведение $d = q_1 q_2 \ldots q_n$ может быть записано в виде $d = am$, где $a \in \mathrm{A}$ и $V_m(\varepsilon) = \varepsilon$.*

Доказательство. Применим индукцию по числу n. Основание индукции (случай $n = 1$) справедливо по предложению 33.

Предположим, что для $n - 1$ элементов утверждение верно. Тогда для любой точки $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ мы можем записать $q_2 \ldots q_n = a_1 m_1$, где $a_1 \in \mathrm{A}$, $m_1 \in D$ и $V_{m_1}(\varepsilon) = \varepsilon$. Пользуясь предложением 35, получаем, что произведение $q_1 a_1$ имеет правое разложение в любой точке. Итак, пусть $q_1 a_1 = a m_0$, где $a \in \mathrm{A}$ и $V_{m_0}(\varepsilon) = \varepsilon$ (основание индукции). Тогда $q_1 q_2 \ldots q_n = a(m_0 m_1)$ и $m := m_0 m_1$ — требуемый элемент, так как $V_{m_0 m_1}(\varepsilon) = V_{m_0} V_{m_1}(\varepsilon) = \varepsilon$ (использовано предложение 25). □

Определение 36. Рациональный L-автоморфизм будем называть *G-автоморфизмом*, если он обладает правым и левым разложением в любой точке $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$, причём если $\varepsilon, \eta \in \Gamma$, то правое разложение в точке ε и левое разложение в точке η должны быть согласованны. Назовём подгруппу (подкольцо) в D *G-группой* (соответственно *G-кольцом*), если их любой ненулевой элемент является G-автоморфизмом.

Предложение 37. *Групповое кольцо FG является G-кольцом.*

Доказательство. Следствие теоремы 2 в [3] показывает, что FG — L-кольцо (см. также теорему 16). Пусть $d \in FG$ — произвольный ненулевой элемент и $d = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — полное аддитивное разложение. В этом случае все a_i принадлежат A и n — наименьшее возможное натуральное число с этим свойством. Пусть $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ — произвольная точка. Можно считать, что

$$V_{a_1}(\varepsilon) = V_{a_2}(\varepsilon) = \ldots = V_{a_k}(\varepsilon) < V_{a_{k+1}}(\varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant V_{a_n}(\varepsilon).$$

Тогда, полагая

$$a = a_1, \quad u = 1 + a^{-1}a_2 + \ldots + a^{-1}a_k, \quad w = a^{-1}a_{k+1} + \ldots + a^{-1}a_n,$$

получаем равенство $d = a(u+w)$, которое и будет правым разложением в точке ε.

Для построения левого разложения в точке $\eta \in \hat{\Gamma}$ мы упорядочим множество $\{a_i\}$ другим способом. Предположим, что

$$V_{a^{-1}_{\tau(1)}}(\varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant V_{a^{-1}_{\tau(t-1)}}(\varepsilon) < V_{a^{-1}_{\tau(t)}}(\varepsilon) = V_{a^{-1}_{\tau(t+1)}}(\varepsilon) = \ldots = V_{a^{-1}_{\tau(n)}}(\varepsilon)$$

для некоторого t и некоторой подстановки τ. Если обозначить

$$\tilde{a} = a_{\tau(n)}, \quad \tilde{w} = [a_{\tau(1)} + \ldots + a_{\tau(t-1)}]a^{-1}_{\tau(n)}, \quad \tilde{u} = [a_{\tau(t)} + \ldots + a_{\tau(n)}]a^{-1}_{\tau(n)},$$

то $d = (\tilde{u} + \tilde{w})\tilde{a}$ будет левым разложением в точке η. Докажем теперь, что эти два разложения согласованны. Так как $a_1 P_\varepsilon \supseteq a_i P_\varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$P_\eta a P_\varepsilon = P_\eta a_1 P_\varepsilon \supseteq P_\eta a_{\tau n} P_\varepsilon = P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon. \tag{55}$$

Так как $P_\eta a_{\tau(n)} \supseteq P_\eta a_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon = P_\eta a_{\tau(n)} P_\varepsilon \supseteq P_\eta a_1 P_\varepsilon = P_\eta a P_\varepsilon. \tag{56}$$

Из соотношений (55) и (56) вытекает равенство $P_\eta a P_\varepsilon = P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon$, и утверждение полностью доказано. □

Теорема 38. *Пусть s — аддитивно неразложимый рациональный оператор и $D(<s)$ — G-кольцо. Тогда s будет G-автоморфизмом.*

Доказательство. Доказательство разобьём на части (1, 2 и т. д.), а некоторые части на шаги (2а, 2б и т. д.).

1. По теореме 16 оператор s будет L-автоморфизмом.

2. Предположим, что s — атомный рациональный оператор, который, следовательно, можно записать в виде $s = p^{-1}$, где p проще, чем s. Пусть

$$p = a(u + w) - \tag{57}$$

правое разложение в точке $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$. Тогда мы утверждаем, что

$$s = (u^{-1} + ((u + w)^{-1} - u^{-1}))a^{-1} \tag{58}$$

есть левое разложение оператора s в точке ε. Докажем это утверждение.

2а. Элемент u^{-1} существует и принадлежит D_ε.

2б. Проверим, что правая часть в (58) обратна к p:

$$(u^{-1} + ((u + w)^{-1} - u^{-1}))a^{-1}p = (u^{-1} + (u + w)^{-1} - u^{-1})(u + w) = 1.$$

2в. Если $(u+w)^{-1} - u^{-1} \neq 0$, то $w \neq 0$, откуда $u \lhd p$. Таким образом, $u^{-1} \lhd d$.

2г. Получаем равенство $(u + w)^{-1} - u^{-1} = -u^{-1}w(u + w)^{-1}$, так как после умножения справа на $u+w$ это равенство равносильно равенству $1-u^{-1}(u+w) = - u^{-1}w$, которое несомненно верно. Далее,

$$V_{(u+w)^{-1}-u^{-1}}(\varepsilon) = V_{u^{-1}w(u+w)^{-1}}(\varepsilon) \overset{\text{предложение 33}}{=} V_{u^{-1}w}(\varepsilon) > V_{u^{-1}}(\varepsilon) = \varepsilon.$$

3. Если

$$p = (\tilde{u} + \tilde{w})\tilde{a} \tag{59}$$

есть левое разложение в точке η, то

$$s = \tilde{a}^{-1}(\tilde{u}^{-1} + ((\tilde{u} + \tilde{w})^{-1} - \tilde{u}^{-1})) \tag{60}$$

будет правым разложением в точке η. Доказательство этого утверждения точно такое же, как и в части 2.

4. Согласно предположению теоремы разложения (57) и (59) согласованны, т. е. справедливо равенство $P_\eta a P_\varepsilon = P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon$. Следовательно, существуют элементы $b \in P_\eta$ и $c \in P_\varepsilon$, для которых $a = b\tilde{a}c$. Отсюда следует равенство $\tilde{a}^{-1} = ca^{-1}b$, поэтому $\tilde{a}^{-1} \in P_\varepsilon a^{-1} P_\eta$. Мы доказали включение $P_\varepsilon \tilde{a}^{-1} P_\eta \subseteq P_\varepsilon a^{-1} P_\eta$. Обратное включение доказывается аналогично. Итак, $P_\varepsilon \tilde{a}^{-1} P_\eta = P_\varepsilon a^{-1} P_\eta$, поэтому разложения (58) и (60) согласованны.

5. Случай $s \in A$ тривиален.

6. Предположим, что $s = q_1 q_2 \ldots q_n$ — полное мультипликативное разложение и $n > 1$ (случай $n = 1$ разобран в части 4). Тогда $b := q_2 \ldots q_n \lhd s$, поэтому b — G-автоморфизм. Пусть $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ и

$$b = a_1(u_1 + w_1) — \tag{61}$$

правое разложение в точке ε. Тогда $q_1 a_1 \lhd s$, поэтому $q_1 a_1$ также G-автоморфизм. Пусть

$$q_1 a_1 = a(u_2 + w_2) \tag{62}$$

есть правое разложение в точке ε. Тогда мы утверждаем, что

$$s = a(u_2 + w_2)(u_1 + w_1) = a(u_2 u_1 + (w_2 u_1 + u_2 w_1 + w_2 w_1)) \tag{63}$$

есть также правое разложение в точке ε. Проверим это по шагам.

6а. Принадлежность $u_2 u_1 \in D_\varepsilon$ следует из того, что $u_1, u_2 \in D_\varepsilon$ и D_ε — кольцо.

6б. Если $w_2 u_1 + u_2 w_1 + w_2 w_1 \neq 0$, то либо $w_1 \neq 0$, либо $w_2 \neq 0$. Отсюда следует, что либо $u_1 \lhd b$, либо $u_2 \lhd q_1 a_1 \sim q_1$. В любом случае произведение $u_2 u_1$ проще, чем $q_1 b = s$ (см. [10, теорема 4.6, (iii)]).

6в. Справедливы оценки $w_1 = a_1^{-1} b - u_1 \lhd s$, $w_2 = a^{-1} q_1 a_1 - u_2 \lhd s$. Тогда либо $w_i = 0$, либо w_i будет G-автоморфизмом ($i = 1, 2$). Следовательно, можно воспользоваться предложением 25 и получить неравенства

$$V_{u_2 w_1}(\varepsilon) > V_{u_2}(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$V_{w_2 u_1}(\varepsilon) = V_{w_2} V_{u_1}(\varepsilon) = V_{w_2}(\varepsilon) > \varepsilon, \quad V_{w_2 w_1}(\varepsilon) = V_{w_2} V_{w_1}(\varepsilon) > V_{w_2}(\varepsilon) > \varepsilon.$$

Тогда согласно теореме 26 получаем оценку

$$V_{u_2 w_1 + w_2 u_1 + w_2 w_1}(\varepsilon) \geqslant \min\{V_{w_2 u_1}(\varepsilon), V_{w_2 w_1}(\varepsilon), V_{u_2 w_1}(\varepsilon)\} > \varepsilon.$$

7. Теперь пусть

$$q_1 = (\tilde{u}_1 + \tilde{w}_1)\tilde{a}_1 \tag{64}$$

есть левое разложение в точке $\eta \in \hat{\Gamma}$, а

$$\tilde{a}_1 b = (\tilde{u}_2 + \tilde{w}_2)\tilde{a} — \tag{65}$$

левое разложение в η. Тогда так же, как на шаге 6, можно доказать, что

$$s = (\tilde{u}_1 + \tilde{w}_1)(\tilde{u}_2 + \tilde{w}_2)\tilde{a} = (\tilde{u}_1\tilde{u}_2 + (\tilde{w}_1\tilde{u}_2 + \tilde{u}_1\tilde{w}_2 + \tilde{w}_1\tilde{w}_2))\tilde{a} \qquad (66)$$

будет левым разложением в точке η.

8. У нас есть два разложения:

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 b = \tilde{a}_1 a_1(u_1 + w_1) & \text{(см. (61))},\\ \tilde{a}_1 b = (\tilde{u}_2 + \tilde{w}_2)\tilde{a} & \text{(см. (65))} \end{cases} \Longrightarrow P_\eta \tilde{a}_1 a_1 P_\varepsilon = P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon. \qquad (67)$$

Импликация поставлена в силу их согласованности. Аналогично получаем импликацию

$$\begin{cases} q_1 a_1 = a(u_2 + w_2) & \text{(см. (62))},\\ q_1 a_1 = (\tilde{u}_1 + \tilde{w}_1)\tilde{a}_1 a_1 & \text{(см. (64))} \end{cases} \Longrightarrow P_\eta \tilde{a}_1 a_1 P_\varepsilon = P_\eta a P_\varepsilon. \qquad (68)$$

Из соотношений (67) и (68) следует равенство $P_\eta \tilde{a} P_\varepsilon = P_\eta a P_\varepsilon$, т. е. разложения (63) и (66) согласованны. Теорема доказана. □

9. Достаточные условия вложимости в тело

Сохраняем обозначения предыдущих разделов. Напоминаем, что $U_\varepsilon = \{g \in G \mid V_g(\varepsilon) = \varepsilon\}$ — подгруппа группы G ($\varepsilon \in \hat{\Gamma}$). Если $\varepsilon = 1$, то $U_\varepsilon = U$. В случае $\varepsilon \in \Gamma$ группы U_ε и U сопряжены.

Теорема 39. *Предположим, что в конусе P пересечение всех идеалов пусто и для любой точки $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$ групповое кольцо FU_ε является областью Оре. Тогда D будет G-телом.*

Индукция по сложности ненулевого оператора $k \in D$ будет использована для того, чтобы доказать, что k — G-автоморфизм. Основание индукции, т. е. случай $k \in \mathrm{A}$, прост и отмечался ранее. Более того, так как FG есть G-кольцо (см. предложение 37), то можно считать, что k не принадлежит групповому кольцу FG. Предположим теперь, что любой ненулевой элемент из D, более простой, чем k, является G-автоморфизмом. Доказательство индукционного перехода будет разбито на десять шагов.

По теореме 16 любой оператор из группы $D(\leqslant k)$ вполне рационален и непрерывен.

Шаг 1. *Если пересечение вполне первичных идеалов конуса P пусто, то FG будет областью Оре, а D — её классическим телом частных, всякий ненулевой элемент которого — непрерывный монотонный обратимый оператор (L-автоморфизм).*

Доказательство. Пусть оператор $m \in D$ произволен и $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — все элементы из A, встречающиеся в рациональной записи элемента m (например, в записи вида $m = pC^{-1}q$, где p, q, C — строка, столбец и матрица над A). Согласно предположению найдётся вполне первичный идеал B конуса P, такой что $a_i \notin B$ для всех i. Тогда $a_iB = B$ (см. [4]), откуда $a_i \in F^* \times U_\varepsilon$, где $\varepsilon := \inf\{V_a(1) \mid a \in B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Отсюда вытекает, что m принадлежит $D_\varepsilon = Q_{\mathrm{cl}}(FU_\varepsilon)$. Следовательно, элемент m можно представить в виде $m = st^{-1}$ для подходящих $s, t \in FU_\varepsilon$. Так как FU_ε — подкольцо группового кольца FG, то доказано, что любой оператор из D можно записать в виде st^{-1} (аналогично в виде $t^{-1}s$) для некоторых $s, t \in FG$. Отсюда и следует, что D есть классическое тело частных группового кольца FG. Из [3, теорема 2] следует, что все ненулевые элементы из D — монотонные автоморфизмы, а из теоремы 16 следует, что все они вполне рациональны. □

Мы собираемся доказать далее (шаги 2—5), что любой ненулевой оператор $d \in D(\leqslant k)$ является монотонным мономорфизмом. Снова будет использована трансфинитная индукция, но уже по сложности элемента d. Основание индукции обеспечено тем, что $D(<k)$ есть G-группа. Итак, предположим, что любой рациональный оператор, более простой, чем d, является монотонным мономорфизмом и $d \notin FG$. Фиксируем полное аддитивное разложение оператора d:

$$d = s_1 + s_2 + \ldots + s_n.$$

Для какого-либо элемента h группы G, рассматриваемого как однородный формальный ряд, обозначим

$$S(h) = \bigcup_{i=1}^{n} s_i[h].$$

Шаг 2. *Если $h_1 < h_2$ для $h_1, h_2 \in \Gamma$, то либо $d[h_1] \neq 0$ и $V_d(h_1) < V_d(h_2)$, либо $d[h_1] = 0$ и $S(h_1) < V_d(h_2)$.*

Доказательство. Возьмём $g = v(d[h_1])$, если $d[h_1] \neq 0$, и возьмём в качестве g произвольный элемент из $S(h_1)$ в противном случае. Учитывая вполне рациональность s_i, получаем

$$0 = d[h_1]_{<g} = s_1[h_1]_{<g} + \ldots + s_n[h_1]_{<g} = b_1[h_1] + \ldots + b_n[h_1] = b[h_1]$$

для $b_i := (s_i)_g^{h_1}$ и $b = b_1 + \ldots + b_n$. Так как оператор b_i проще s_i по крайней мере для одного i, то $b \lhd d$. Тогда, учитывая равенство $b[h_1] = 0$ и предположение индукции, заключаем, что $b = 0$. Следовательно,

$$V_d(h_2) = v(d[h_2]) = v((d-b)[h_2]) \geqslant \min_i v((s_i - b_i)[h_2]) > \min_i v((s_i - b_i)[h_1]) \geqslant g,$$

где использован факт, что разности $s_i - b_i$ можно представить в виде произведения элементов, проще либо равных s_i (см. следствие 14). □

Для доказательства следующего шага понадобится лемма 40.

Лемма 40. *Пусть $s = q_1q_2 \ldots q_m$ — полное мультипликативное разложение аддитивно неразложимого рационального оператора s, проще либо равного d. Предположим, что $\varepsilon = \sup(\operatorname{supp} s[h]) \neq +\infty$. Тогда оператор q_1 ε-однороден слева.*

Доказательство. Случай, когда $s \in FG$, т. е. фактически $s \in \mathrm{A}$ ввиду неразложимости s, тривиален. Отбросив его, получим, что оператор q_1 не принадлежит A, т. е. $q_1 = p^{-1}$ — атомный оператор. Тогда по ключевой лемме 22 для любого элемента $h' \in \Gamma$, меньшего, чем ε, выполняется неравенство

$$\operatorname{supp} p[h'] \leqslant V_p(\operatorname{supp} s[h]) \leqslant V_p(\varepsilon). \tag{69}$$

Докажем, что в этом случае оператор p будет ε-однородным справа. Действительно, пусть $p = a(u+w)$ — его правое разложение в точке ε. Здесь $a \in G$, $u \in D_\varepsilon$ и $V_w(\varepsilon) > \varepsilon$. Если предположить, что $w \neq 0$, то операторы u и au, имеющие одну и ту же сложность, проще, чем p. Тем самым разность $p - au$ будет проще, чем q_1, тем более будет проще, чем s. Следовательно, $p - au = aw$ — монотонный автоморфизм. Тогда найдётся элемент $h' \in \Gamma$, меньший, чем ε, и такой, что $V_w(h') > \varepsilon$.

Действительно, если это не так, то ε — изолированная в линейно упорядоченном множестве $\operatorname{supp} s[h] \cup \{\varepsilon\}$ точка, поэтому $\varepsilon \in \operatorname{supp} s[h]$ по определению точной верхней грани. Но тогда $s[h] = \tilde{s}[h] + a[h]$ для оператора $\tilde{s} := s_\varepsilon^h \lhd s$ и некоторого $a \in \mathrm{A}$. Отсюда следует равенство $(s - \tilde{s} - a)[h] = 0$. Применяя оператор p, получим

$$(ps - p\tilde{s} - pa)[h] = 0. \tag{70}$$

Все три оператора $ps = q_2 \ldots q_m$, $p\tilde{s}$ и $pa \sim p$ проще, чем s. Тогда и их алгебраическая сумма проще s ввиду неразложимости s. Тем самым $ps - p\tilde{s} - pa$ проще d, и поэтому равенство (70) влечёт равенство нулю самого оператора $ps - p\tilde{s} - pa$. Отсюда получаем соотношение $s = \tilde{s} + a$. Это противоречит аддитивной неразложимости оператора s.

Продолжим доказательство леммы. Имеем неравенства $\operatorname{supp} au[h'] \leqslant V_p(\varepsilon)$ и $V_{aw}(h') > \varepsilon$. Это значит, что точка $V_{aw}(h')$ принадлежит носителю $\operatorname{supp} p[h']$ и превосходит $V_p(\varepsilon)$, что противоречит неравенству (69). Противоречие показывает, что $w = 0$, и тем самым оператор p будет ε-однородным справа. Следовательно, обратный оператор q ε-однороден слева. □

Шаг 3. *Если $\varepsilon := \sup S(h) \neq +\infty$ для какого-либо $h \in G$, то $d[h] \neq 0$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $\sup(\operatorname{supp} s_i[h]) = \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $i = t, t+1, \ldots, n$. Здесь $t \geqslant 1$. Обозначим

$$\eta := \sup\Bigl(\bigcup_{i<t} \operatorname{supp} s_i[h]\Bigr).$$

Если $t = 1$, то полагаем по определению $\eta = -\infty$. Предположим, что $g := v(d[h]) > \eta$. Это так, например, в случае $d[h] = 0$. Тогда легко получить равенство

$$0 = d[h]_{<g} = s_1[h] + \ldots + s_{t-1}[h] + b_1[h] + \ldots + b_n[h],$$

где $b_i = (s_i)_g^h$, причём $b_j = s_j$ для $j < t$ в силу предположения $g > \eta$. Так как g принадлежит носителю $\operatorname{supp} s_i[h]$ по крайней мере для одного i, то оператор

$s_1 + \ldots + s_{t-1} + b_1 + \ldots + b_n$ проще, чем d, и, таким образом, должен быть равен 0 в силу индукционного предположения о монотонности всех ненулевых элементов, более простых, чем d. Следовательно, получаем разложение

$$d = (s_t - b_t) + \ldots + (s_n - b_n). \tag{71}$$

Пусть q_i — первый (левый крайний) атомный оператор в полном мультипликативном разложении элемента s_i. Для $i \geqslant t$ этот атом должен быть ε-однородным слева согласно лемме 40. Тогда можно считать, что q_i принадлежит классическому телу частных группового кольца FU_ε ($i \geqslant t$). Из условия Оре следует, что найдётся такой ненулевой элемент $b \in FU_\varepsilon$, что $bq_i \in FU_\varepsilon \subseteq FG$. Если бы $s_i \in FG$ для всех $i \geqslant t$, то из разложения (71) вытекало бы, что $d \in FG$, вопреки предположению, что $d \notin FG$. Итак, можно считать, что $s_i \notin FG$ для какого-либо $i \geqslant t$, и тем самым q_i — собственный атомный элемент для этого i. Тогда произведения bs_i и bb_i проще, чем s_i, так как они представимы в виде суммы элементов, более простых, чем s_i. Действительно, если $s_i = q_i c_i$ и $bq_i = a_1 + \ldots + a_z$ для некоторых $a_j \in F^* \times U_\varepsilon$, то $bs_i = a_1 c_i + \ldots + a_z c_i$ и $a_j c_i \sim c_i \lhd s_i$ для любого j. Итак, либо $b(s_i - b_i) \in FG$, либо это произведение проще, чем s_i. Складывая, получаем $bd \lhd d$, отсюда следует, что bd — монотонный мономорфизм. Следовательно, $d = b^{-1}(bd)$ также будет монотонным мономорфизмом. В частности, $d[h] \neq 0$. □

Предположим, что пересечение вполне первичных идеалов конуса P не пусто, следовательно, существует наименьший вполне первичный идеал. Тогда то же самое верно и для конуса hPh^{-1}, где $h \in G$ — какой-либо элемент, который мы фиксируем далее. В конусе hPh^{-1} найдётся дивизориальный идеал B, для которого все его степени также дивизориальны и пересечение его степеней пусто: $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} B^i = \varnothing$. Положим

$$\varepsilon_j := \inf\{V_b(h) \mid b \in B^j\} \tag{72}$$

для любого целого числа j. Тогда

$$\begin{gathered} \ldots < \varepsilon_{-2} < \varepsilon_{-1} < \varepsilon_0 = h < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots, \\ \lim_{j \to +\infty} \varepsilon_j = +\infty, \quad \lim_{j \to -\infty} \varepsilon_j = -\infty. \end{gathered} \tag{73}$$

Обозначение ε_j сохраняем до конца доказательства теоремы. Обозначим также $\tilde{P} = hPh^{-1}$.

Лемма 41. *Пусть m — произведение G-операторов. Запишем его в виде $m = gm_0$, где $g \in G$ и $V_{m_0}(h) = h$ (см. предложение 35). Тогда неравенство $V_m(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z}$ для каких-либо целых j и z эквивалентно принадлежности $g \in B^z$.*

Доказательство. Пусть $b \in B^j$. Запишем m_0 как произведение G-операторов, $m_0 = q_1 q_2 \ldots q_k$, и построим цепочку равенств

$$\begin{aligned} q_k b &= b_k q'_k \qquad (b_k \in G,\ V_{q'_k}(h) = h), \\ q_{k-1} b_k &= b_{k-1} q'_{k-1} \quad (b_{k-1} \in G,\ V_{q'_{k-1}}(h) = h) \end{aligned}$$

и т. д. вплоть до $q_1 b_2 = b_1 q_1'$, где $b_1 \in G$ и $V_{q_1'}(h) = h$). Обозначим $m_1 = q_1' q_2' \ldots q_k'$. Тогда $m_0 b = b_1 m_1$ и $V_{m_1}(h) = 1$. Так как $\tilde{P} b_t \tilde{P} = \tilde{P} b_{t-1} \tilde{P}$ по определению согласованных разложений (см. раздел 7, здесь $1 \leqslant t \leqslant k+1$ и $b_{k+1} := b$), то элемент b_1 также принадлежит B^j. Таким образом, с учётом определения (72) получаем соотношение

$$V_m(\varepsilon_j) \leqslant V_m V_b(h) = V_{gb_1 m_1}(h) = V_{gb_1}(h). \tag{74}$$

Если $g \in B^z$, то $gb_1 \in B^{j+z}$ и $V_m V_b(h) \geqslant \varepsilon_{j+z}$. Из

$$\inf\{V_{mb}(h) \mid b \in B^j\} = V_m(\inf\{V_b(h) \mid b \in B^j\}) = V_m(\varepsilon_j)$$

выводим неравенство $V_m(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z}$.

Обратно, если верно неравенство $V_m(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z}$, то соотношение (74) показывает, что $gb_1 \in B^{j+z}$. Действительно, если $a \notin B^i$ для какого-либо элемента $a \in G$ и целого i, то $V_a(h) < \varepsilon_i$, поскольку правый главный $\tilde{P}$-идеал $a\tilde{P}$ строго содержит B^i в этом случае и идеал B^i дивизориален. Поэтому точки $V_a(h)$ и ε_i на линейно упорядоченном множестве $\hat{\Gamma}$, соответствующие этим правым $\tilde{P}$-идеалам, расположены в порядке возрастания. Так как из (74) вытекает неравенство $V_{gb_1}(h) > \varepsilon_{j+z}$, то $gb_1 \in B^{j+z}$, как и утверждалось.

В силу того что для каждого элемента $b_1 \in B^j$ можно найти элемент $b \in B^j$, удовлетворяющий условиям $b_1^{-1} m_0 = m_1 b^{-1}$, $V_{m_1}(h) = h$, справедливо включение $gB^j \subseteq B^{j+z}$. Это значит, что $g \in B^z$, так как B^z — дивизориальный идеал (имеется возможность сокращения на дивизориальный идеал). □

Лемма 42. *Пусть m — произведение G-автоморфизмов и $V_m(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z}$ для каких-либо целых чисел j, z. Тогда имеет место неравенство $V_m(\varepsilon_i) \geqslant \varepsilon_{i+z}$ для любого целого i.*

Доказательство. Это утверждение есть прямое следствие предыдущей леммы. □

Шаг 4. *Если множество $S(h)$ не ограничено сверху в $(\Gamma, \leqslant)$ для какого-либо $h \in \Gamma$, то имеет место неравенство $d[h] \neq 0$.*

Доказательство. Для любого целого z обозначим

$$s_{iz} = (s_i)^h_{\varepsilon_z}, \quad d_z = s_{1z} + \ldots + s_{nz}.$$

Из этого определения следует оценка $V_{s_i - s_{iz}}(h) \geqslant \varepsilon_z$ для любого i. Предположим, что $d[h] = 0$. Тогда и $d_z[h] = 0$ для любого целого z. Так как оператор d_z проще, чем d, в силу предположения о неограниченности носителя $S(h)$, то $d_z = 0$ для любого целого z. Все разности $s_i - s_{iz}$ либо равны нулю, либо представляют собой произведение G-автоморфизмов по первому индукционному предположению. Пусть y — такое целое число, что $\varepsilon_y \geqslant h$ (см. (73)). Тогда

$$V_{s_i - s_{iz}}(\varepsilon_y) \geqslant V_{s_i - s_{iz}}(h) \geqslant \varepsilon_z.$$

По лемме 42 тогда получаем, что $V_{s_i - s_{iz}}(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z-y}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь $h' \in \Gamma$ — произвольный элемент. Найдём целое число j, для которого

$h' \geqslant \varepsilon_j$. Тогда соотношение

$$v(d[h']) = v((d - d_z)[h']) \geqslant \min_i V_{s_i - s_{iz}}(h') \geqslant \min_i V_{s_i - s_{iz}}(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z-y}$$

верно для любого сколь угодно большого z. Следовательно, $v(d[h']) = +\infty$ и $d[h'] = 0$. Ввиду непрерывности оператора d получаем, что $d = 0$, — противоречие. Это противоречие показывает, что предположение $d[h] = 0$ неверно. □

Шаг 5. *Каждый элемент в группе $D(\leqslant k)$ — монотонный мономорфизм.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что в шагах 3, 4 мы показали, что $d[h] \neq 0$ для любого $h \in \Gamma$, а шаг 2 доказывает локальную монотонность d. Из соотношения

$$d\Big[\sum{}' hk_h\Big] = \sum{}^L d[h]k_h,$$

справедливого в силу непрерывности оператора d, вытекает монотонность, а значит, и мономорфность.

Тем самым индукционный переход, т. е. доказательство монотонности операторов из группы $D(\leqslant k)$, завершён. □

Осталось доказать обратимость и G-автоморфность оператора d. Снова до конца доказательства теоремы считаем, что d — произвольный ненулевой элемент группы $D(\leqslant k)$ и $d = s_1 + \ldots + s_n$ есть его полное аддитивное разложение.

Шаг 6. *Множества $\operatorname{supp} d[h]$ и $S(h)$ кофинальные друг в друге.*

Доказательство. Из включения $\operatorname{supp} d[h] \subseteq S(h)$ вытекает неравенство $\operatorname{supp} d[h] \leqslant S(h)$. Предположим, что противоположное неравенство не имеет места. Это означает, что найдётся элемент $\varepsilon \in S(h)$, такой что $\operatorname{supp} d[h] < \varepsilon$. Тогда

$$d[h] = d[h]_{<\varepsilon} = b_1[h] + b_2[h] + \ldots + b_n[h] = b[h],$$

где $b_i := (s_i)^h_\varepsilon$ и $b := b_1 + \ldots + b_n$. Выбор ε показывает, что $b \lhd d$. С другой стороны, $d - b \in D(\leqslant k)$ и $(d - b)[h] = 0$, т. е. $d = b$ согласно шагу 5. Это противоречие показывает, что на самом деле $S(h) \leqslant \operatorname{supp} d[h]$, что и требовалось доказать. □

Шаг 7. *Предположим, что*

$$\bigcup_{h<\varepsilon} \operatorname{supp} d[h] \leqslant \lim_{h\to\varepsilon, h>\varepsilon} V_d(h)$$

для некоторого $\varepsilon \in \hat{\Gamma}$. Тогда d будет ε-однородным справа автоморфизмом.

Доказательство. Справедливость утверждения проверяем индукцией по сложности оператора d. Основанием индукции можно считать случай, когда $d \in FG$. Тогда результат следует из предложения 37. Пусть утверждение верно для всех элементов из $D(\leqslant k)$, более простых, чем d, и $d \notin FG$.

Обозначим через q_i последний (справа) атомный оператор в полном мультипликативном разложении элемента s_i.

Если $\operatorname{supp} q_i[h] \leqslant V_{q_i}(\varepsilon)$ для любого $h < \varepsilon$, то q_i ε-однороден справа по лемме 40. В противном случае можно выбрать элементы $h_1, h_2 \in \Gamma$, такие что $h_1 < \varepsilon < h_2$ и $V_{q_i}(h_2)$ меньше некоторого элемента из носителя $\operatorname{supp} q_i[h_1]$). Можно считать, что первый случай имеет место для $i = 1, 2, \ldots, t$, а второй — для $i = t+1, \ldots, n$. Заметим, что элементы h_1, h_2 с указанными выше свойствами мы можем выбрать одинаковыми для всех $i = t+1, \ldots, n$ (см. предложение 19). Используя теорему 23, заключаем, что $\operatorname{supp} q_i[h_1] \sim \operatorname{supp} q_i[h_2]$, а следовательно, $\operatorname{supp} s_i[h_1] \sim \operatorname{supp} s_i[h_2]$ для $i = t+1, \ldots, n$. Обозначим $\eta := \lim\limits_{h\to\varepsilon,\, h>\varepsilon} V_d(h)$. Из утверждения шага 5 вытекает неравенство $\eta \leqslant V_d(h_2)$. Следовательно,

$$0 = d[h_2]_{<\eta} = b_1[h_2] + \ldots + b_t[h_2] + b_{t+1}[h_2] + \ldots + b_n[h_2],$$

где $b_i = (s_i)_\eta^{h_2}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Таким образом, $\sum\limits_i b_i = 0$ согласно шагу 5. Так как

$$\operatorname{supp} s_i[h_2] \sim \operatorname{supp} s_i[h_1] \leqslant \operatorname{supp} d[h_1] < \eta$$

для всех $i = t+1, \ldots, n$ (используем шаг 6 и предположения шага 7), то выполняется равенство $s_i = b_i$ для этих i. Следовательно, $d = (s_1 - b_1) + \ldots + (s_t - b_t)$, и так же, как и в доказательстве шага 3, мы можем выбрать ненулевой элемент $b \in FU_\varepsilon$ так, что $db \lhd d$. Более того, $db \in D(<k)$ и, таким образом, db, а значит, и d — монотонные автоморфизмы. В частности, справедливы равенства $\eta = V_d(\varepsilon) = V_{db}(\varepsilon)$. Для любой точки $h \in \Gamma$, удовлетворяющей условию $h < \varepsilon$, справедливо неравенство $\operatorname{supp} b[h] < \varepsilon$ (предложение 18), тем самым $b[h]$ представляет из себя формальную сумму однородных элементов с нормами, меньшими, чем ε. Применяя непрерывность оператора db, получаем, что

$$\operatorname{supp} db[h] \leqslant V_d(\varepsilon) = V_{db}(\varepsilon)$$

для таких h. Тогда db ε-однороден справа по предположению индукции. Следовательно, оператор $d = (db)b^{-1}$ также ε-однороден справа. □

Шаг 8. *Отображение $V_d\colon \Gamma \to \Gamma$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть элемент $\varepsilon \in \Gamma$ произволен и η определено в доказательстве предыдущего шага. Если $\operatorname{supp} d[h] \leqslant \eta$ для любого $h \in \Gamma$, $h < \varepsilon$, то утверждение следует из шага 7. Иначе найдём элементы $h', h_2 \in \Gamma$, такие что $h' < \varepsilon$ и $h_2 \in \operatorname{supp} d[h']$. Из этого следует, что оператор $d_0 := d_{h'}^{h_2}$ проще, чем d, и выполняются неравенства

$$V_{d-d_0}(h) \geqslant V_{d-d_0}(h') \geqslant h_2$$

для любого $h \in \Gamma$, большего либо равного h' (см. шаг 5). Так как $h_2 > \eta$, то существует элемент $h'' \in \Gamma$, больший, чем ε, и такой, что $V_d(h) < h_2$ для любого $h \in \Gamma$, удовлетворяющего условию $h \leqslant h''$. Следовательно, отображения V_d и V_{d_0} совпадают на отрезке $[h', h'']$. Остаётся воспользоваться индукцией по сложности элемента d. □

Шаг 9. *Оператор d — монотонный автоморфизм.*

Доказательство. Результат будет следовать из [3, теорема 1], как только мы докажем, что отображение V_d сюръективно (см. также введение). С учётом результата шага 8 остаётся доказать неограниченность сверху и снизу множества $V_d(\Gamma)$.

Докажем неограниченность сверху. Пусть элемент $g \in \Gamma$ произволен. Выберем точку $h \in \Gamma$ так, что $V_{s_i}(h) \geqslant g$. Тогда

$$V_d(h) \geqslant \min_i V_{s_i}(h) \geqslant g,$$

откуда следует неограниченность множества сверху.

Докажем неограниченность снизу. Если в конусе P нет наименьшего вполне первичного идеала, то доказывать ничего не нужно (кроме G-автоморфности, см. шаг 10) ввиду шага 1. Иначе пусть ε_j такие, как в (73). Тогда найдётся целое число $z \in \mathbb{Z}$, такое что $V_d(\varepsilon_0) = V_d(h) < \varepsilon_z$. Докажем неравенство $V_d(\varepsilon_j) < \varepsilon_{j+z+1}$ для любого целого $j \in \mathbb{Z}$, откуда и будет следовать неограниченность снизу. Для доказательства этого неравенства предположим противное, т. е. $V_d(\varepsilon_j) \geqslant \varepsilon_{j+z+1} > \varepsilon_{j+z}$. Тогда можно найти элемент $h' \in \Gamma$, удовлетворяющий условиям $h' \leqslant \varepsilon_j$ и $V_d(h') > \varepsilon_{j+z}$. Обозначим $g := V_d(h')$, $b_i := (s_i)_g^{h'}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Так как $0 = d[h']_{<g} = \sum\limits_i b_i[h']$, то $\sum\limits_i b_i = 0$ и каждая разность $s_i - b_i$ есть либо 0, либо произведение G-автоморфизмов. Кроме того,

$$V_{s_i-b_i}(\varepsilon_j) \geqslant V_{s_i-b_i}(h') \geqslant g = V_d(h') > \varepsilon_{j+z}.$$

Применяем лемму 42, получаем оценку $V_{s_i-b_i}(\varepsilon_0) \geqslant \varepsilon_z$. Следовательно, имеет место неравенство

$$V_d(\varepsilon_0) \geqslant \min_i V_{s_i-b_i}(\varepsilon_0) \geqslant \varepsilon_z.$$

Это противоречие с выбором ε_z показывает, что наше предположение неверно, т. е. исходное утверждение доказано. □

Шаг 10. *Оператор d — G-автоморфизм.*

Доказательство. Пусть ε — произвольная точка линейно упорядоченного множества $\hat{\Gamma}$ и $\eta = V_d(\varepsilon)$. Мы докажем вначале существование правого разложения в точке ε. Если $S(h) < \eta$ для любого $h \in \Gamma$, удовлетворяющего условию $h < \varepsilon$, то $d = gu$ для некоторых $g \in A$, $u \in D_\varepsilon$ (шаг 7). Это равенство и есть правое разложение в точке ε в данном случае. В противном случае возьмём элементы h', h_2, d_0, h'' такие же, как и в доказательстве шага 8. Обозначим через $d_0 = g(u+v)$ правое разложение d_0 в точке ε. Тогда $d = g(u + (g^{-1}d - u))$ — правое разложение элемента d. Действительно, неравенства $u \trianglelefteq d_0$ и $d_0 \triangleleft d$ верны по определению правого разложения и по выбору оператора d_0 соответственно. Далее,

$$V_{g^{-1}d-u}(\varepsilon) = V_{g^{-1}}V_{d-d_0+gv}(\varepsilon) \geqslant V_{g^{-1}}(\min\{V_{d-d_0}(\varepsilon), V_{gv}(\varepsilon)\}) > V_{g^{-1}}(\eta) = \varepsilon,$$

так как $V_g(\varepsilon) = V_{d_0}(\varepsilon) = V_d(\varepsilon) = \eta$ и $V_v(\varepsilon) > \eta$.

Теперь докажем согласованность. Пусть $\varepsilon, \eta \in \Gamma$ и $d = g_\varepsilon(u_1 + v_1)$, $d = (u_2 + v_2)g_\eta$ — правое и левое разложения в точках ε и η соответственно.

Нам надо доказать равенство $P_\eta g_\varepsilon P_\varepsilon = P_\eta g_\eta P_\varepsilon$. Положим $\tau := V_d(\varepsilon) = V_{g_\varepsilon}(\varepsilon)$, $b_i := (s_i)^\varepsilon_\tau$, через $s_i - b_i = g'_i(u'_i + v'_i)$, $s_i - b_i = (u''_i + v''_i)g''_i$ обозначим правое и левое разложение операторов $s_i - b_i$ в точках ε и η соответственно ($1 \leqslant i \leqslant n$). Тогда

$$g_\varepsilon P_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} g'_i P_\varepsilon, \quad P_\eta g_\eta \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} P_\eta g''_i. \tag{75}$$

Действительно, если обозначить

$$gP_\eta = \bigcup_{i=1}^{k} g'_i P_\varepsilon$$

для подходящего $g \in G$, то $g'_i = gp_i$ для некоторого $p_i \in P_\varepsilon$. Выбор элементов b_i влечёт неравенство $V_{g'_i}(\varepsilon) \geqslant \tau$, отсюда следует оценка $V_g(\varepsilon) \geqslant \tau$. С другой стороны, неравенства $V_{p_i(u'_i+v'_i)}(\varepsilon) \geqslant \varepsilon$ выполняются для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно,

$$\tau = V_d(\varepsilon) = V_{d-b_1-\ldots-b_n}(\varepsilon) \geqslant V_g(\min_i V_{p_i(u'_i+v'_i)}(\varepsilon)) \geqslant V_g(\varepsilon) \geqslant \tau.$$

Суммируя, имеем $V_g(\varepsilon) = \tau = V_{g_\varepsilon}(\varepsilon)$. Это значит, что

$$g_\varepsilon P_\varepsilon = gP = \bigcup_{i=1}^{n} g'_i P_\varepsilon,$$

как и утверждалось. Включение в (75) может быть доказано таким же путём.

Включение в (75) показывает, что существует такой элемент g''_l, что $P_\eta g_\eta \subseteq \subseteq P_\eta g''_l$. Так как $s_l - b_l$ — произведение G-автоморфизмов, мы заключаем, что $P_\eta g'_l P_\varepsilon = P_\eta g''_l P_\varepsilon$. Следовательно,

$$P_\eta g_\varepsilon P_\varepsilon \supseteq P_\eta g'_l P_\varepsilon = P_\eta g''_l P_\varepsilon \supseteq P_\eta g_\eta P_\varepsilon.$$

Для доказательства обратного включения перепишем равенства $d = g_\varepsilon m_\varepsilon = m_\eta g_\eta$, где $V_{m_\varepsilon}(\varepsilon) = \varepsilon$ и $V_{m_\eta}(\eta) = \eta$ по-другому: $d' := m_\varepsilon g_\eta^{-1} = g_\varepsilon^{-1} m_\eta$. Это не что иное, как левое разложение в точке ε и правое разложение в точке η элемента d', который имеет ту же сложность, что и d. Тогда $P_\varepsilon g_v p^{-1} P_\eta \supseteq P_\varepsilon g_\eta^{-1} P_\eta$ по доказанному выше. Из этого соотношения вытекает включение $P_\eta g_\eta P_\varepsilon \supseteq P_\varepsilon g_\eta P_\varepsilon$, откуда следует равенство $P_\eta g_\varepsilon P_\varepsilon = P_\eta g_\eta P_\varepsilon$. Согласованность правого и левого разложений доказана. □

Завершён основной индукционный переход, а именно доказано, что $D(\leqslant k)$ — G-группа. В частности, оператор k будет G-автоморфизмом.

Доказательство основной теоремы завершено.

10. Нормирование Матияка

Отображение $V\colon D^* \to \mathrm{Aut}(\Gamma, \leqslant)$ абстрактного тела D в группу монотонных биекций линейно упорядоченного множества Γ называется *нормированием в смысле Матияка*, если

MV1: $V_{ab}(h) = V_a(V_b(h))$,

MV2: $V_{a+b}(h) \geqslant \min\{V_a(h), V_b(h)\}$

для любых ненулевых элементов $a, b \in D$ и любого элемента $h \in \Gamma$ (в MV2 предполагается также, что $a + b \neq 0$). Продолжим нормирование Матияка на нулевой элемент, полагая $V_0(h) = +\infty$. Известно (см. [11]), что для фиксированной точки $h \in \Gamma$ множество $S_h := \{d \in D \mid V_d(h) \geqslant h\}$ будет цепным порядком в теле D. Действительно, неравенство MV2 показывает, что S_h аддитивно замкнуто, а гомоморфность MV1 влечёт мультипликативную замкнутость. Если $d \in D \setminus S_h$, то $V_d(h) < h$, откуда $h = V_{d^{-1}} V_d(h) < V_{d^{-1}}(h)$, поэтому $d^{-1} \in S_h$. Доказанное свойство тотальности кольца S_h ($d \in D \setminus S_h \implies d^{-1} \in S_h$) позволяет несложными и хорошо известными алгебраическими выкладками показать, что все правые идеалы, как и все левые идеалы кольца S_h, линейно упорядочены по включению, и тем самым оправданно название «цепной порядок».

Вернёмся к нашей конкретной ситуации, когда D — кольцо рациональных операторов пространства формальных рядов.

Предложение 43. *Предположим, что D — G-тело. Тогда отображение*

$$V\colon D^* \to \operatorname{Aut}\Gamma \text{ —}$$

нормирование в смысле Матияка. Более того, семейство элементов

$$S := \{d \in D \mid V_d(1) \geqslant 1\}$$

будет цепным порядком в D, ассоциированным с конусом P, т. е. выполнены следующие свойства:

1) *G есть подгруппа мультипликативной группы тела D*;
2) *для любого ненулевого элемента $d \in D$ найдутся такие элементы g_1, g_2 из группы G, а также обратимые в S элементы v_1, v_2, что $d = g_1 v_1 = v_2 g_2$ и имеет место согласованность этих разложений*: $Pg_1P = Pg_2P$;
3) *пересечение S и G совпадает с конусом P.*

Доказательство. Отображение V является гомоморфизмом, так как

$$V_{ab}(h) = v(ab[h]) = v(a(b[h])) = v(a[\partial b[h]) = v(a[g]) = V_a(g) = V_a(V_b(h)),$$

где $g := V_b(h)$ и второе равенство справедливо ввиду монотонности и непрерывности b. Основное неравенство для норм MV2 верно в любом случае. Таким образом, S будет цепным порядком в теле D согласно [11]. Этот факт достаточно просто следует из аксиом MV1, MV2.

Далее, свойство 1 следует из построения рационального замыкания группового кольца FG. Пусть d — произвольный ненулевой оператор и $d = g_1(u_1 + w_1)$, $d = (u_2 + w_2)g_2$ — правое и левое разложения оператора d в единице. Тогда $g_1, g_2 \in G$ и элементы $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$ искомые, т. е. удовлетворяют условию 2 согласно определению G-автоморфизма. Проверим свойство 3. Если $V_g(1) \geqslant 1$ для $g \in G$, то это значит, что $\overline{g} = v(g[1]) \geqslant 1$, поэтому $g \in P$ по определению порядка на множестве Γ. Эти рассуждения можно обратить. Равенство $S \cap G = P$ доказано. □

Заметим, что для любого $h \in \Gamma$ множество

$$S_h := \{d \in D \mid V_d(h) \geqslant h\}$$

также будет цепным порядком в теле D, ассоциированным с конусом hPh^{-1}, причём имеет место сопряжённость

$$S_h = hSh^{-1}.$$

Сопряжённость проверяется непосредственно, из неё и следуют остальные утверждения.

11. Тело частных для универсальной накрывающей группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

В группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ действительных (2×2)-матриц с единичным определителем рассмотрим две стандартные подгруппы:

$$\mathbb{U} = \left\{ u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\},$$
$$\mathbb{S} = \left\{ r(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Любая матрица $s \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ может быть записана единственным образом в виде

$$s = r(t)u, \text{ где } r(t) \in \mathbb{S},\ 0 \leqslant t < 2\pi,\ u \in \mathbb{U}. \tag{76}$$

Построим универсальную накрывающую группу $\mathbb{G}$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Сначала сделаем это для окружности $\mathbb{S}$. Фиксируем какой-либо символ, скажем x, и перепишем аддитивную группу действительных чисел в мультипликативном виде:

$$R = \{x^t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad x^{t_1} \cdot x^{t_2} = x^{t_1+t_2}, \quad x^{t_1} \leqslant x^{t_2} \iff t_1 \leqslant t_2. \tag{77}$$

Естественно, R, как линейно упорядоченная группа, изоморфна группе $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$. Отображение $\tau\colon R \to \mathbb{S}$, такое что $\tau(x^t) = r(t)$, даёт накрытие группы Ли $\mathbb{S}$. Это значит, что τ — эпиморфизм и его ядро есть дискретная подгруппа в R. Легко видеть, что $\ker\tau = \mathrm{gr}\{x^{2\pi}\}$ есть циклическая группа, порождённая элементом $x^{2\pi}$.

Как множество $\mathbb{G}$ совпадает с декартовым произведением $R \times \mathbb{U}$. Произвольный элемент $g \in \mathbb{G}$ будем записывать в виде $g = x^t * u$ для некоторых $x^t \in R$ и $u \in U$. Пусть $x^{t_1} * u_1$, $x^{t_2} * u_2$ — два таких элемента из $\mathbb{G}$. Для того чтобы определить произведение $(x^{t_1} * u_1)\cdot(x^{t_2} * u_2)$, сначала представим число t_2 в виде $t_2 = 2\pi k + \varphi$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$, а затем перемножим $u_1 r(\varphi) u_2 = r(\psi)u$ в группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Здесь $\psi \in [0, 2\pi)$ и $u \in U$ (см. (76)). Полагаем по определению

$$(x^{t_1} * u_1)\cdot(x^{t_2} * u_2) = x^{t_1+2\pi k+\psi} * u. \tag{78}$$

Отображение τ продолжим до отображения из $\mathbb{G}$ в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ по правилу

$$\tau(x^t * u) = r(t)u. \tag{79}$$

Доказательство следующей теоремы можно найти в [6] или в [9] (см. также другую конструкцию накрытия в [7]).

Теорема 44. *Умножение* (78) *превращает пространство* $\mathbb{G}$ *в группу, и* (79) *есть односвязное накрытие группы Ли* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*, ядро которого — циклическая группа* $\mathrm{gr}\{x^{2\pi}\}$*. Центр группы* $\mathbb{G}$ *совпадает с циклической группой, порождённой* x^π*.*

Ввиду естественных мономорфизмов $R \to \mathbb{G}$, $\mathbb{U} \to \mathbb{G}$ мы далее будем отождествлять x^t с $x^t * E$ (E — единичная матрица) и $u \in \mathbb{U}$ с $x^0 * u$, а также будем опускать звёздочку в записи $x^t * u$. Заметим, что $\mathbb{U}$ — группа Оре, так как она обладает нормальной абелевой подгруппой без кручения

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\},$$

причём фактор-группа $\mathbb{U}/N \cong (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ также абелева группа без кручения. Таким образом, групповое кольцо $F\mathbb{U}$ имеет классическое тело частных, которое обозначим K. В качестве конуса $P := P(\mathbb{G})$ в группе $\mathbb{G}$ возьмём семейство всех произведений $x^t u$ с $t \geqslant 0$. Тогда группа обратимых элементов конуса P будет в точности $\mathbb{U}$ и в качестве представителей смежных классов $g\mathbb{U}$ можно взять R (тем самым $\Gamma = R$). Отметим, что конус P индуцирует на R естественный порядок (77), а потому $\hat{\Gamma} = R$ в силу дедекиндовой замкнутости вещественной прямой. Построим модуль формальных рядов L над группой $\mathbb{G}$ с конусом $P(\mathbb{G})$, а рациональное замыкание группового кольца $F\mathbb{G}$ в $\operatorname{End} L_K$ обозначим $\mathbb{D}$. Любой формальный ряд из L имеет вид

$$\gamma = x^{t_1}k_1 + x^{t_2}k_2 + x^{t_3}k_3 + \dots,$$

где $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ — вполне упорядоченная трансфинитная последовательность вещественных чисел и $k_i \in K$. Если $g \in \mathbb{G}$ и $gx^{t_i} = x^{t'_i}u_i$, то

$$g \cdot \gamma = x^{t'_1}(u_1k_1) + x^{t'_2}(u_2k_2) + x^{t'_3}(u_3k_3) + \dots.$$

Так как $x^{t'_i} = V_g(x^{t_i})$, то точки $x^{t'_i}$ также вполне упорядочены. Заметим также, что в равенстве $x^t[x^s] = x^{t+s}$ элемент x^t — мономиальный оператор из $\operatorname{End} L_K$, а x^s и x^{t+s} — однородные формальные ряды из L.

Следующий результат есть первопричина всех предыдущих определений, предложений и теорем.

Теорема 45. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Кольцо рациональных операторов* $\mathbb{D}$ *—* G*-тело.*
2. *Отображение* $V : \mathbb{D}^* \to \mathrm{Aut}(R, \leqslant)$ *— нормирование в смысле Матияка.*
3. *Для любого вещественного числа* t *множество* $S_t := \{d \in \mathbb{D} \mid V_d(x^t) \geqslant x^t\}$ *— исключительный цепной порядок в* $\mathbb{D}$*, в котором* $x^\pi S_t$ *— первичный, но не*

вполне первичный идеал. Этот цепной порядок ассоциирован с конусом $P_t := \{g \in \mathbb{G} \mid V_g(x^t) \geqslant x^t\}$ *группы* $\mathbb{G}$.

4. *Конус* P_t *сопряжён с конусом* P, *а именно* $P_t = x^t P x^{-t}$, *а кольцо* S_t *сопряжено с кольцом* $S := S_0$ *посредством того же элемента* x^t.
5. *Любой дробный правый дивизориальный идеал кольца* S *имеет вид* $x^t S$ *для некоторого вещественного числа* t.

Доказательство. Для любой точки t справедливы соотношения

$$S_t := \{d \in \mathbb{D} \mid V_d V_{x^t}(x^0) \geqslant V_{x^t}(x^0)\} = \{d \in \mathbb{D} \mid V_{x^{-t} d x^t}(x^0) \geqslant x^0\} = \\ = \{x^t d' x^{-t} \mid d' \in \mathbb{D}\ V_{d'}(x^0) \geqslant x^0\} = x^t S_0 x^{-t},$$

и мы завершили доказательство последнего утверждения. Далее, $\mathbb{U}_0 = \{a \in \mathbb{G} \mid V_a(x^0) = x^0\} = \mathbb{U}$, $\mathbb{U}_t = x^t \mathbb{U} x^{-t}$ — группа Оре. Заметим также, что пересечение степеней главного идеала $x^\pi P$ пусто. Теперь осталось применить теорему 39. В частности, S_t — цепной порядок в D, ассоциированный с P_t. Так как P — исключительный конус с $x^\pi P$ в качестве первичного, но не вполне первичного идеала (см. [4, § 4]), то идеал $x^\pi S$ будет того же типа в кольце S. Действительно, пусть $(x^t a) S (x^s b) \subseteq x^\pi S$ для $t, s \geqslant 0$ и $a, b \in U(S)$. Если $0 < s < \pi$, то $S x^s b S = S x^s S = J(S)$, поскольку между $J(P)$ и $x^\pi P$, так же как и между $J(S)$ и $x^\pi S$, нет идеалов. Получаем, что $x^t J(S) \subseteq x^\pi S$. Тогда $t + \varepsilon \geqslant \pi$ для любого $\varepsilon > 0$, и поэтому $t \geqslant \pi$, что и требовалось для доказательства первичности идеала $x^\pi S$. Ясно, что $x^\pi S$ не вполне первичен, поскольку $x^{\pi/2} \notin x^\pi S$, но $x^{\pi/2} \cdot x^{\pi/2} = x^\pi \in x^\pi S$.

Утверждение последнего пункта немедленно следует из замкнутости Γ в смысле Дедекинда. □

Рассмотрим теперь систему точек $\varepsilon_j = x^{\pi j}$ на «прямой» $\Gamma = R$. Очевидно, эта система удовлетворяет свойствам (73).

Предложение 46. *Пусть* $c \in \mathbb{D}$ — *такой оператор, что носитель* $\operatorname{supp} c[x^t]$ *ограничен сверху хотя бы для одного* t. *Тогда* c *может быть записан в виде конечной суммы произведений вида*

$$x^{\pi j} b_1 x^{t_1} b_2 x^{t_2} \dots b_n x^{t_n}, \tag{80}$$

где $j \in \mathbb{Z}$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — *элементы классического тела частных, обозначим его* $\tilde{K}$, *группового кольца операторов* $F\mathbb{U}$ (*не путать его с изоморфным ему телом* K) *и* $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, \pi)$.

Доказательство. Мы снова будем пользоваться индукцией по сложности элемента c. Основание индукции тривиально. Предположим, что утверждение верно для всех рациональных автоморфизмов, более простых, чем c. Обоснуем индукционный переход.

Если оператор c разложи́м в сумму более простых операторов, то мы можем применить индукционное предположение к каждому слагаемому, поскольку оно проще, чем c, и удовлетворяет предположениям настоящего предложения согласно шагу 6 теоремы 39.

Рассмотрим случай неразложимого c. Обозначим $x^s := \sup \operatorname{supp} c[x^t]$. Тогда первый атом q в полном мультипликативном разложении элемента c будет x^s-однороден. Но $D_{x^s} = x^s \tilde{K} x^{-s}$, отсюда следует, что атом q может быть записан в виде (80) с некоторыми вещественными числами $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Учитывая теперь, что элементы вида $x^{\pi i}$ ($i \in \mathbb{Z}$) центральны, получаем запись вида (80), где $t_1, \ldots, t_n \in [0, \pi)$. Так как $\operatorname{supp} b[x^t] \subseteq (x^{t-\pi}, x^{t+\pi})$ для любого $b \in \tilde{K}$, то множество $\operatorname{supp} q^{-1}c[x^t]$ также ограничено сверху. Остаётся применить предположение индукции к оператору $q^{-1}c$, который заведомо проще, чем c, и из разложений q и $q^{-1}c$ в нужном виде составить разложение c. □

Теорема 47.

1. *Множество* $\hat{\mathbb{D}}$ *всех операторов вида*
$$q = x^{\pi z}(d_0 + x^{\pi} d_1 + x^{2\pi} d_2 + \ldots), \tag{81}$$
где $z \in \mathbb{Z}$, *а операторы* $d_i \in \mathbb{D}$ *таковы, что* $\operatorname{supp} d_i[x^0] \subseteq [x^0, x^{\pi})$ (*т. е. это сумма элементов вида* (80) *с* $j = 0$), *является* $x^{\pi}S$*-адическим пополнением тела* $\mathbb{D}$.
2. $x^{\pi}S$*-адическое пополнение* $\hat{S}$ *цепного кольца* S *состоит из всех элементов вида* (81) *с* $z = 0$.
3. *Если* $q' = x^{\pi z'}(d'_0 + x^{\pi} d'_1 + x^{2\pi} d'_2 + \ldots)$ — *ещё один элемент из* $\hat{\mathbb{D}}$, *то*
$$qq' = x^{\pi(z+z')}(d_0 d'_0 + x^{\pi}(d_1 d'_0 + d_0 d'_1) + \ldots + x^{\pi n}\left(\sum_{j=0}^{n} d_j d'_{n-j}\right) + \ldots\Big). \tag{82}$$
4. *Пусть* $d_0 \neq 0$ *в* (81). *Обозначим*
$$m := (x^{2\pi} d_2 + x^{3\pi} d_3 + \ldots)(d_0 + x^{\pi} d_1)^{-1}.$$
Тогда последовательность операторов $1, m, m^2, \ldots$ *топологического пространства* L *суммируема* (*в топологии точечной сходимости*) *и*
$$q^{-1} = x^{-\pi z}(d_0 + x^{\pi} d_1)^{-1}(1 - m + m^2 - m^3 + \ldots). \tag{83}$$
5. *Каждый ненулевой элемент тела* $\hat{\mathbb{D}}$ — L*-автоморфизм, и* $V \colon \hat{\mathbb{D}}^* \to \operatorname{Aut}\Gamma$ *есть нормирование Матияка.*
6. $\hat{S}$ — *исключительный цепной порядок в теле* $\hat{\mathbb{D}}$ *и* $x^{\pi}\hat{S}$ — *первичный, но не вполне первичный идеал.*

Доказательство. Для доказательства утверждения 3 заметим, что определение (81) элемента q корректно, так как $v(x^{\pi j} d_j[x^0]) \geqslant x^{\pi j}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Тогда формула (82) — это результат обычного перемножения двух рядов.

Докажем утверждение 4. Неравенство $d_0 \neq 0$ влечёт $v(d_0[x^0]) \in [x^0, x^{\pi})$, откуда $v((d_0 + d_1 x^{\pi})[x^0]) = v(d_0[x^0]) \neq \infty$ и $d_0 + x^{\pi} d_1 \neq 0$. Более того,
$$v((d_0 + x^{\pi} d_1)^{-1}[x^0]) \in (x^{-\pi}, x^0], \quad V_m(x^0) \geqslant x^{\pi}.$$
Следовательно, $V_{m^i}(x^{\pi j}) > x^{\pi(i+j)}$ для любых $i \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{Z}$. Тогда формула (83) представляет собой фактически сумму геометрической прогрессии.

Чтобы доказать утверждение 1, покажем, что любой рациональный оператор d может быть записан в виде (81). Отбросим тривиальный случай $d = 0$. Тогда найдётся такое целое число z, что $V_d(x^0) \in [x^{\pi z}, x^{\pi(z+1)})$. Запишем $d[x^0]$ в виде $\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\ldots$, где $\operatorname{supp}\gamma_i \subseteq [x^{\pi(z+i)}, x^{\pi(z+i+1)})$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Так как d вполне рационален, можно найти такие $d_i \in \mathbb{D}$, что $x^{\pi(z+i)} d_i[x^0] = \gamma_i$. Отсюда следует, что $\operatorname{supp} d_i[x^0] \subseteq [x^o, x^\pi)$ и $d = x^{\pi z} \sum\limits_i x^{\pi i} d_i$. Теперь утверждения 3 и 4 показывают, что $\hat{\mathbb{D}}$ — тело, содержащее $\mathbb{D}$ как подтело, причём каждая система элементов $b_i \in x^{\pi i} S_0$ имеет сумму $\sum\limits_{i \geqslant z} b_i \in \hat{\mathbb{D}}$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 ясно, а утверждения 5 и 6 следуют из общих результатов о пополнении цепного кольца по топологии, заданной степенями идеала. $\square$

Литература

[1] Дубровин Н. И. Обратимость группового кольца правоупорядоченной группы над телом // Мат. заметки. — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 508—518.

[2] Дубровин Н. И. Рациональные замыкания групповых колец левоупорядоченных групп // Мат. сб. — 1993. — Т. 184, № 7. — С. 3—48.

[3] Дубровин Н. И. Формальные суммы и степенные ряды над группой // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 7. — С. 13—30.

[4] Дубровина Т. В., Дубровин Н. И. Конусы в группах // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, № 7. — С. 59—74.

[5] Дубровина Т. В., Дубровин Н. И. Корни в универсальной накрывающей группе группы унимодулярных матриц второго порядка // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, № 3. — С. 757—776.

[6] Дубровина Т. В., Дубровин Н. И. Топологические линейные пространства формальных сумм // Математичнi Студiї. — 2004. — Т. 21, № 2. — С. 209—220.

[7] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.

[8] Dubrovin N. I. The rational closure of group rings of left-ordered groups. — SM-DU-254. — Duisburg, 1994.

[9] Dubrovin N. I., Brungs H. H. A classification and examples of rank one chain domain // Trans. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 335, no. 7. — P. 2733—2753.

[10] Dubrovin N. I., Gräter J., Hanke T. Complexity of elements in rings // Algebr. Represent. Theory. — 2003. — Vol. 6. — P. 33—45.

[11] Mathiak K. Zur Bewertungstheorie nicht kommutativer Körper // J. Algebra. — 1981. — Vol. 73, no. 2. — P. 586—560.