Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп

Д. З. КАГАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kagan@radioagency.ru

УДК 512.543.76

Ключевые слова: нетривиальный псевдохарактер, ограниченные когомологии, локально индикабельные группы, аномальные произведения.

Аннотация

Рассматривается вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях локально индикабельных групп. Получены результаты, обобщающие теоремы Р. И. Григорчука и А. Г. Бардакова о существовании нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединённой подгруппой. Доказывается, что нетривиальные псевдохарактеры существуют на аномальном произведении бесконечной циклической и локально индикабельной, не являющейся циклической, групп. Также доказываются некоторые утверждения о существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп, из которых можно сделать выводы о вторых группах когомологий этих произведений, а также об их неаменабельности.

Abstract

D. Z. Kagan, Pseudocharacters on anomalous products of locally indicable groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 55—64.

The question on the existence of nontrivial pseudocharacters on anomalous products of locally indicable groups is considered. Some generalizations of theorems of R. I. Grigorchuk and V. G. Bardakov on the existence of nontrivial pseudocharacters on free products with the amalgamation subgroup are found. It is proved that they exist on an anomalous product $\langle G, x \mid w = 1\rangle$, where G is a locally indicable noncyclic group. We also prove some other propositions on the existence of nontrivial pseudocharacters on anomalous products of groups. Results on the second cohomologies of these products and their nonamenability follow from the propositions on the existence of nontrivial pseudocharacters on these groups.

Напомним некоторые определения, встречающиеся в [1, 3, 8, 9]. Квазихарактер на произвольной группе G — это функция f из группы G в пространство действительных чисел $\mathbb{R}$, такая что $|f(ab) - f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon$ для некоторого положительного числа ε и для любых $a, b \in G$. Псевдохарактер — это квазихарактер φ, такой что $\varphi(a^n) = n\varphi(a)$ для любого $a \in G$. Нетривиальный псевдохарактер — это псевдохарактер, для которого существуют элементы $a, b \in G$,

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 55—64.

такие что $\varphi(ab)-\varphi(a)-\varphi(b)\neq 0$. В [4] доказывается, что существование нетривиального псевдохарактера эквивалентно существованию квазихарактера, сколь угодно сильно отличного от любого аддитивного характера. Под аддитивным характером мы понимаем функцию f на группе G, для которой выполняется равенство $f(xy)=f(x)+f(y)$ для любых элементов $x,y\in G$.

В [8] В. А. Файзиев доказал, что нетривиальные псевдохарактеры существуют на свободных произведениях неединичных групп, за исключением $Z_2 * Z_2$. В [1, 3] найдены условия для существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединённой подгруппой и на HNN-расширениях групп. Мы приведём формулировки этих теорем. В дальнейшем будем обозначать свободное произведение групп A и B с объединённой подгруппой V через $(A*B;V)$, а HNN-расширении группы G_0 с изоморфными подгруппами A и B и проходной буквой t через $G=\langle G_0,t \mid tAt^{-1}=B\rangle$.

Теорема 1 ([1, 3]). *Нетривиальный псевдохарактер существует на свободном произведении $(A*B;V)$ групп A и B с объединённой подгруппой V, если выполняются следующие условия: число двойных смежных классов $|A::V|$ не меньше трёх и V является собственной подгруппой группы B.*

Теорема 2 ([1,3]). *Нетривиальный псевдохарактер существует на HNN-расширении $G=\langle G_0,t \mid tAt^{-1}=B\rangle$ группы G_0, если A и B являются собственными подгруппами в G_0.*

Из теоремы 2, в частности, следует, что группа с одним определяющим соотношением и по крайней мере с тремя образующими имеет нетривиальный псевдохарактер. В [4] доказывается существование нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях двух групп, одна из которых бесконечная циклическая, а другая не является нормальным замыканием никакого своего элемента и для неё выполняется теорема о свободе, при дополнительном условии: суммарная степень, с которой порождающий бесконечной циклической группы входит в аномальное соотношение, равна 0.

В [3,11] показано, что существование на группе нетривиального псевдохарактера связано со второй группой когомологий этой группы, а также с её аменабельностью. Предположим, что некоторая группа G является свободным произведением с объединённой подгруппой или HNN-расширением и для неё выполняются изложенные выше условия существования нетривиальных псевдохарактеров на таких группах. Тогда для группы G согласно [3, 11] $\dim H^{(2)}_{b,2}(G)=\infty$, где $H^{(n)}_{b,2}(G)$ — ядро естественного отображения $\Theta\colon H^{(n)}_b(G)\to H^{(n)}(G,\mathbb{R})$ n-й группы ограниченных когомологий $H^{(n)}_b(G)$, названное в [3] сингулярной частью группы $H^{(n)}_b(G)$. В теореме и утверждениях данной статьи при доказательстве того, что некоторые группы имеют нетривиальный псевдохарактер, в большинстве случаев мы будем сводить их к свободным произведениям с объединённой подгруппой или HNN-расширениям и доказывать, что они удовлетворяют условиям существования нетривиальных псевдохарактеров на таких группах. Поэтому для большинства таких групп будет выполняться равенство

$\dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$. Согласно теореме Траубера ограниченные когомологии аменабельных групп нулевые, отсюда, в частности, вытекает, что нетривиальные псевдохарактеры не могут существовать на аменабельных группах. Поэтому те группы, про которые будет, в частности, доказано, что они удовлетворяют условиям существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединённой подгруппой и на HNN-расширениях групп, являются неаменабельными.

В данной статье доказывается некоторое обобщение утверждений и теорем из [1, 3]. Рассматриваются аномальные произведения локально индикабельных групп и находятся условия существования на них нетривиальных псевдохарактеров. При этом используется то, что для локально индикабельных групп выполняется теорема о свободе, а также некоторые конструкции, которые вводятся в [2] при доказательстве этого. Под теоремой о свободе мы подразумеваем следующий факт: если $F = A * B$ и элемент w является циклически несократимым в свободном произведении, то $A \cap \langle w\rangle^F = 1$, $B \cap \langle w\rangle^F = 1$, т. е. отображения $A \to F/\langle\langle w\rangle\rangle$, $B \to F/\langle\langle w\rangle\rangle$ являются вложениями. Теорема о свободе выполнена для группы B, если выполняется следующее условие. Пусть

$$C = B * B * \ldots * B/\langle\langle w\rangle\rangle \,—$$

свободное произведение нескольких изоморфных копий группы B, на которое наложено одно дополнительное соотношение w, считаемое циклически несократимым. Тогда подгруппа группы C, порождённая всеми копиями B, за исключением одной, элементы из которой входят в дополнительное соотношение w, является свободным произведением этих копий.

Напомним определения локально индикабельных групп и аномальных произведений. Локально индикабельной называется группа, в которой любая конечно порождённая подгруппа обладает гомоморфизмом на бесконечную циклическую группу. Если A — конечно порождённая и локально индикабельная группа, то она представляется в виде полупрямого произведения $A = \tilde{A} \leftthreetimes \langle x\rangle$. Пусть $F = A * B$ — свободное произведение некоторых групп A и B. Пусть также $G = F/\langle w^F\rangle$, где $w = a_1b_1 \ldots a_lb_l$ — циклически несократимый элемент группы F. Любой элемент в свободном произведении $F = A * B$ обладает единственной несократимой записью, т. е. записью вида $x_1 \ldots x_n$, где x_i принадлежит $A \cup B$, причём элементы x_i и x_{i+1} принадлежат разным группам A, B (см. [6, 7]). Циклически несократимым называется элемент, обладающий циклически несократимой записью, т. е. записью $x_1 \ldots x_n$, где элементы x_1, x_n принадлежат разным группам A, B. Элементы групп A и B не являются циклически несократимыми по определению. Циклическая несократимость элемента w эквивалентна в данном случае тому, что элемент w не сопряжён с элементами из групп A и B. Если последнее условие выполняется, то в соотношении $w = 1$, которое накладывается на свободное произведение $F = A * B$, элемент w можно заменить на циклически несократимый и рассматривать его циклически несократимую запись. В [4] такая конструкция $G = F/\langle w^F\rangle$ называется аномальным произведением групп A и B и обозначается A_wB. Само слово w называется аномалией. В [4] доказывается, что для локально индикабельных групп выполняется теорема о свободе.

Пусть A и B — локально индикабельные группы, причём хотя бы одна из них, например B, не является циклической. Мы будем доказывать, что в этой ситуации на аномальном произведении $A_w B$ групп A и B существует нетривиальный псевдохарактер, если A не конечно порождённая. В случае, когда A конечно порождённая, потребуется ещё одно дополнительное условие, заключающееся в том, что произведение всех $a_i \in w$ лежит в группе $\tilde{A}$, которая возникает из разложения $A = \tilde{A} \leftthreetimes \langle x \rangle$. Для дальнейшего нам потребуются две леммы.

Лемма 1 ([10]). *Пусть G является фактор-группой свободного произведения группы A и бесконечной циклической группы $B = \langle x \rangle$ по нормальному замыканию произвольного элемента w. Пусть также группа A не имеет кручения. Тогда естественное отображение $A \to G$ является сюръективным, только если элемент w представляется в виде $w \equiv a_1 x^{\pm 1} a_2$, где $a_1, a_2 \in A$.*

Лемма 2. *Пусть группа G может быть представлена в виде*

$$G = \langle A, B \mid b^{w(A,B)} = \varphi(b),\ b \in B \rangle, \quad w(A, B) \in A * B,$$

где φ — некоторый инъективный эндоморфизм группы B и A, B — группы без кручения. Тогда естественное отображение $A \to G$ является сюръективным только в случаях, когда $w(A, B)$ в свободном произведении $A * B$ принадлежит группе B или группа B является единичной.

Эта лемма легко доказывается с помощью методов, изложенных в [5].

Утверждение 1. *Пусть $G = A_w B$ — аномальное произведение двух локально индикабельных групп A и B, где A не является конечно порождённой, B не является циклической и элемент w не лежит в группах A и B и не сопряжён с элементами из этих групп. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Доказательство. Поскольку элемент w не лежит в группах A и B и не сопряжён с элементами из этих групп, можно, не изменяя группы G, считать, что элемент w является циклически несократимым в произведении $F = A * B$, и рассматривать его циклически несократимую запись $w = a_1 b_1 \ldots a_l b_l$ в этом произведении. Обозначим через A^0 подгруппу группы A, порождённую элементами a_i, т. е. $A^0 = \mathrm{gp}(a_1, \ldots, a_l)$. Тогда $A_w B = (A * A^0_w B; A^0)$ — свободное произведение групп A и $A^0_w B$ с объединённой подгруппой A^0. Заметим, что образы групп A, B при естественных отображениях $A \to A_w B$, $B \to A_w B$ будут изоморфны группам A, B, образ группы A^0 при естественном отображении $A^0 \to A^0_w B$ будет изоморфен группе A^0, поскольку для локально индикабельных групп выполняется теорема о свободе. Число двойных смежных классов группы A по подгруппе A^0 больше двух. Действительно, пусть существует только два смежных класса: A_0 и $A_0 a A_0$, где a — некоторый элемент группы A, не лежащий в подгруппе A^0. Тогда группа A порождается подгруппой A^0 и a, т. е.

она порождается элементами $a, a_1, \ldots, a_l$. Следовательно, группа A является конечно порождённой, что противоречит условию утверждения. Таким образом, $|A :: A^0| = \infty$.

Докажем теперь, что подгруппа A^0 является собственной в группе $A^0_w B$. Обозначим через B^0 подгруппу группы B, порождённую b_i, т. е.

$$B^0 = \mathrm{gp}(b_1, \ldots, b_l).$$

Тогда $B^0 = \tilde{B}^0 \leftthreetimes \langle y\rangle$. Группа $A^0_w B^0$ будет являться подгруппой $A^0_w B$ и содержать в себе подгруппу A^0. Предположим, что $A^0_w B^0 = A^0$. Тогда гомоморфный образ группы $A^0_w B^0$ при отображении $B^0 \to \langle y\rangle$, равный группе $A^0_v\langle y\rangle$, также совпадает с A^0, $A^0_v\langle y\rangle = A^0$, где v — образ элемента w при этом отображении.

Равенство $A^0_v\langle y\rangle = A^0$, где A^0 локально индикабельная, возможно, по лемме 1, только в случае, если слово v имеет вид $c_1 y^{\pm 1} c_2$, $c_1, c_2 \in A^0$. Поскольку группа $A^0_v\langle y\rangle$ является образом группы $A^0_w B^0$ при гомоморфизме $B^0 \to \langle y\rangle$, а элемент v является образом элемента w при этом отображении, то соотношение $w = 1$, выполняющееся в группе $A^0 * B^0$ в случае $v \equiv c_1 y^{\pm 1} c_2$, $c_1, c_2 \in A^0$, может быть представлено в виде $y = u(A^0, \tilde{B}^0)$.

Группа $A^0_w B^0$ тогда может быть представлена в виде

$$\left\langle A^0, \tilde{B}^0 \;\middle|\; b^{u(A^0, \tilde{B}^0)} = \varphi(b),\ b \in \tilde{B}^0 \right\rangle,$$

где $\varphi(b) = b^y$, $b \in \tilde{B}^0$. Такая группа, согласно лемме 2, может быть равна группе A^0 только в случае, когда $u \in \tilde{B}^0$ или когда $\tilde{B}^0 = 1$. Если выполняется первый из этих случаев, то элемент w может быть представлен в виде $y^{-1}u(\tilde{B}^0) \in B$ и слово $w \in B$ не является циклически сократимым, что противоречит условиям утверждения. Заметим, что в этом случае $A^0_w B = A^0 * (B/\langle w\rangle^B)$. При условии, что B не совпадает с нормальным замыканием своего элемента w, на группе $A_w B$ можно задать нетривиальный псевдохарактер, как на свободном произведении неединичных групп, согласно результатам Файзиева. Если выполняется второй случай $\tilde{B}^0 = 1$, то группа B^0 является циклической, $B^0 = \langle y\rangle$. Тогда соотношение $w = 1$ можно представить в виде $y = a$, $a \in A^0$, и группа $A^0_w B$ является свободным произведением с объединённой циклической подгруппой. Если B совпадает с подгруппой B^0, то B является циклической группой, что противоречит условиям утверждения. В противном случае A^0 будет собственной подгруппой в $A^0_w B$. Таким образом, группа $A_w B = (A * A^0_w B; A^0)$ будет удовлетворять условиям теоремы 1 о существовании нетривиального псевдохарактера на свободном произведении с объединённой подгруппой. Утверждение доказано. $\square$

С помощью методов, которые использовались при доказательстве утверждения 1, можно получить и другой более общий результат.

Утверждение 2. *Пусть $G = A_w B$ — аномальное произведение бесконечной циклической группы $A = \langle x\rangle$ и группы B без кручения, на которой существует нетривиальный псевдохарактер и которая не является конечно порождённой. Тогда на группе G также существует нетривиальный псевдохарактер.*

Доказательство. Будем рассматривать циклически несократимую запись $w = x^{p_1}b_1 \dots x^{p_l}b_l$ элемента w свободного произведения $F = \langle x\rangle * B$. Группа A_wB может быть представлена в виде свободного произведения с объединённой подгруппой $A_wB = (A_wB^0 * B; B^0)$, где $B^0 = \mathrm{gp}(b_1, \dots, b_l)$. То, что число двойных смежных классов группы B по подгруппе B^0 будет не меньше трёх, следует из того, что группа B не является конечно порождённой. Остаётся доказать, что группа B^0 будет собственной подгруппой группы A_wB^0. Тогда группа A_wB будет удовлетворять условиям существования нетривиального псевдохарактера на свободном произведении с объединённой подгруппой.

Используя лемму 1, можно получить, что, для того чтобы группа B^0 являлась собственной подгруппой в группе A_wB^0, достаточно, чтобы элемент w не представлялся в виде $w \equiv b_1x^{\pm1}b_2$, где $b_1, b_2 \in B^0$. В этом случае соотношение $w = 1$ представляется в виде $x = b$, $b \in B$, и группа $\langle x\rangle_wB$ совпадает с группой B. По условию утверждения группа B имеет нетривиальный псевдохарактер, поэтому группа A_wB также имеет нетривиальный псевдохарактер. Утверждение доказано. □

Теорема 3. *Пусть $G = A_wB$ — аномальное произведение группы $A = \langle x\rangle$ и локально индикабельной группы B, причём B не является циклической группой и элемент w не сопряжён с элементами из групп A и B. Пусть сумма всех p_i из формулы $w = x^{p_1}b_1 \dots x^{p_l}b_l$ равна 0. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Доказательство. Поскольку элемент w не сопряжён с элементами групп A и B и, в частности, не лежит в группах A и B, можно, не меняя группы G, считать, что элемент w является циклически несократимым в произведении $F = A * B$, и рассматривать его циклически несократимую запись в этом произведении $w = x^{p_1}b_1 \dots x^{p_l}b_l$. Повторим некоторые предварительные рассуждения, которые использовались в [2]. Обозначим через H нормальное замыкание подгруппы B в F. Элемент w лежит в H, поскольку произведение всех степеней x^{p_i} буквы x, входящих в циклически несократимую запись элемента w, равно 1. Обозначим через B_i, $i \in \mathbb{Z}$, группу, сопряжённую с B при помощи элемента x^i, $B_i = x^iBx^{-i}$. Группа H является свободным произведением B_i:

$$H = \prod_{i\subset\mathbb{Z}}^{*} B_i. \tag{1}$$

Обозначим через k и n соответственно минимальный и максимальный индексы, с которыми элементы из B_i входят в несократимую запись w в разложении (1). Будем рассматривать группу

$$H_{k,n} = \prod_{i=k}^{n}{}^{*} B_i.$$

Для выбранных нами k и n $w \in H_{k,n}$.

Предположим, что $k = n$. Однако это будет противоречить циклической несократимости элемента w и, таким образом, условиям теоремы. Далее будем считать, что $k < n$. В этом случае группа $F = A * B$ является HNN-расширением посредством x базы $H_{k,n}$ с изоморфными подгруппами $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$. Поскольку локально индикабельные группы удовлетворяют теореме о свободе и класс локально индикабельных групп замкнут относительно свободных произведений, пересечение групп $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ с нормальным замыканием элемента w является тривиальным. Если $G = \mathrm{HNN}(t, S; t^{-1}At = B)$ для некоторых групп G, A, B, S и N — нормальный делитель группы G, такой что $N \cap A = 1$, $N \cap B = 1$, то

$$G/N^G = \mathrm{HNN}(t, S/N; t^{-1}(AN/N)t = BN/N).$$

Отсюда следует, что

$$G = F/N = \mathrm{HNN}(x, H_{k,n}/N; xH_{k,n-1}x^{-1} = H_{k+1,n}),$$

где N — нормальное замыкание w в группе $H_{k,n}$. Согласно теореме 2 достаточным для существования нетривиального псевдохарактера на группе G является следующее условие: группы $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ должны быть собственными подгруппами в группе $H_{k,n}/N$.

Предположим сначала, что B — конечно порождённая группа. Тогда она представляется в виде полупрямого произведения $B = \tilde{B} \leftthreetimes \langle y \rangle$. Поскольку для любого i группа B_i является изоморфной копией B, то $B_i = \tilde{B}_i \leftthreetimes \langle y_i \rangle$, где $y_i = x^i y x^{-i}$. Имеем $H_{k,n} = H_{k,n-1} * B_n$. Поскольку класс локально индикабельных групп замкнут относительно свободных произведений, то группа $H_{k,n-1}$ является локально индикабельной. Возьмём гомоморфный образ группы $H_{k,n} = H_{k,n-1} * B_n$ относительно гомоморфизма $B_n \to \langle y_n \rangle$, где $y_n = x^n y x^{-n}$. Он будет равен $H_{k,n-1} * \langle y_n \rangle$. Элемент $w \in H_{k,n}$ перейдёт при этом отображении в некоторый элемент $w_1 \in H_{k,n-1} * \langle y_n \rangle$. Рассмотрим фактор-группу $H_{k,n-1} * \langle y_n \rangle / \langle\langle w_1 \rangle\rangle$. Поскольку обе группы $H_{k,n-1}$ и $\langle y_n \rangle$ являются группами без кручения, то согласно лемме 1 равенство $H_{k,n-1} * \langle y_n \rangle / \langle\langle w_1 \rangle\rangle = H_{k,n-1}$ может выполняться только в том случае, когда w_1 имеет вид $h_1 y_n^{\pm 1} h_2$, где $h_1, h_2 \in H_{k,n-1}$. (Следовательно, $y_n = v_1(H_{k,n-1})$ в группе $H_{k,n-1} * \langle y_n \rangle$.) Элемент w_1 является образом элемента w при гомоморфизме $B_n \to \langle y_n \rangle$, поэтому соотношение $w = 1$ можно представить в виде $y_n = v(H_{k,n-1}, \tilde{B}_n)$.

Рассмотрим группу $H_{k,n}/N = H_{k,n-1} * B_n / \langle\langle w \rangle\rangle$. Используя равенство $y_n = v(H_{k,n-1}, \tilde{B}_n)$, её можно представить в виде

$$H_{k,n-1} * B_n / \langle\langle w \rangle\rangle = \left\langle H_{k,n-1} * \tilde{B}_n \;\middle|\; b_n^{v(H_{k,n-1}, \tilde{B}_n)} = \nu(b_n) \text{ для всех } b_n \in \tilde{B}_n \right\rangle,$$

где $\nu(b_n) = b_n^{y_n}$, $b_n \in \tilde{B}_n$, $b_n = x^n b x^{-n}$, $b \in B$. Такая группа может совпадать с группой $H_{k,n-1}$ по лемме 2 только в случаях, когда $v \in \tilde{B}_n$ или $\tilde{B}_n = 1$. Во всех остальных случаях $H_{k,n-1}$ является собственной подгруппой в $H_{k,n}/N$. Если $v \in \tilde{B}_n$, то изначально соотношение $w = 1$ выглядит следующим образом: $y_n^{-1} v(\tilde{B}_n) = 1$. Это означает, что $w \in B_n = x^n B x^{-n}$. Очевидно, что это возможно только при $n = 0$, но тогда $w \in B$, следовательно, w не является циклически несократимым, что противоречит условиям теоремы. Если $\tilde{B}_n = 1$, то $B_n = \tilde{B}_n \rightthreetimes \langle y_n\rangle = \langle y_n\rangle$. Поскольку B_n является изоморфной копией B, для группы B также выполняется $B = \langle y\rangle$. Однако по условию теоремы группа B не является циклической. Следовательно, группа $H_{k,n-1}$ является собственной подгруппой в $H_{k,n}/N$. Аналогично доказывается, что группа $H_{k+1,n}$ также является собственной подгруппой в $H_{k,n}/N$. Таким образом, в случае, когда группа B является конечно порождённой, утверждение теоремы выполняется.

Пусть теперь группа B не является конечно порождённой. Тогда $A_wB = (A_wB^0 * B; B^0)$, где $B^0 = \mathrm{gp}(b_1, \ldots, b_l)$. То, что число двойных смежных классов группы B по подгруппе B^0 будет не меньше трёх, доказывается аналогично тому, как это доказывалось в утверждении 1 для группы A. Покажем теперь, что B^0 является собственной подгруппой в $A_wB^0 = \langle x\rangle * B^0/\langle\langle w\rangle\rangle$. Предположим, что x^i для некоторого $i \neq 0$ лежит в подгруппе B^0 группы $\langle x\rangle * B^0/\langle\langle w\rangle\rangle$. Это означает, что в нормальном замыкании элемента w в этой группе лежит элемент вида x^ib, $b \in B^0$.

Любой элемент q, принадлежащий нормальному замыканию w, представляется в виде произведения слов, сопряжённых с w или с w^{-1}: $q = \prod(w^{\pm1})^{g_i}$, $g_i \in \langle x\rangle * B^0$. Произведение всех x^{k_i}, входящих в циклически несократимую запись w, равно единице. Поэтому для любого элемента q, принадлежащего нормальному замыканию w в группе $\langle x\rangle * B^0$, произведение всех x^{k_i}, входящих в циклически несократимую запись q, также должно быть равно 1. Но для элемента x^ib такое произведение, очевидно, равно x^i. Следовательно, при $i \neq 0$ элемент x^ib, $b \in B^0$, не принадлежит нормальному замыканию элемента w в группе $\langle x\rangle * B^0$. А значит, элемент x^i, $i \neq 0$, не лежит в подгруппе B^0 группы $A_wB^0 = \langle x\rangle * B^0/\langle\langle w\rangle\rangle$, следовательно, группа B_0 является собственной подгруппой в группе A_wB^0. Таким образом, для группы $A_wB = (A_wB^0 * B; B^0)$ выполнены условия теоремы 1 о существовании нетривиального псевдохарактера на свободном произведении с объединённой подгруппой. Теорема доказана. $\square$

Утверждение 3. *Пусть $G = A_wB$ — аномальное произведение двух локально индикабельных групп A и B, где B не является циклической группой и элемент $w = a_1b_1 \ldots a_lb_l$ не сопряжён с элементами из A и B. Пусть A — конечно порождённая группа. Пусть также произведение всех a_i лежит в $\tilde{A}$, $a_1 \ldots a_l \in \tilde{A}$, где группа $\tilde{A}$ получается из разложения $A = \tilde{A} \rightthreetimes \langle x\rangle$. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Доказательство. Элемент w можно считать циклически несократимым в свободном произведении $A * B$. Рассмотрим гомоморфизм $A * B \to \langle x\rangle * B$. Ядром этого гомоморфизма будет нормальное замыкание подгруппы $\tilde{A}$ в группе F. Произведение всех a_i, лежащих в w, принадлежит $\tilde{A}$ и, соответственно, перейдёт в 1, а сам элемент w перейдёт в некоторый элемент $w_1 \in \langle x\rangle * B$. Поскольку произведение степеней, с которыми x входит в запись элемента w, равно 1, то согласно предшествующей теореме группа $\langle x\rangle_{w_1}B$ будет иметь нетривиальный псевдохарактер, если только элемент w_1 не сопряжён с элементом из группы B. Группа $\langle x\rangle_{w_1}B$ является гомоморфным образом группы A_wB, и если на ней существует нетривиальный псевдохарактер, то и на группе A_wB существует нетривиальный псевдохарактер.

Поскольку элемент w мы рассматриваем как циклически несократимый, условие, что w_1 сопряжён с элементом из подгруппы B в группе $\langle x\rangle*B$, означает, что w_1 принадлежит B в этой группе. Это возможно только в том случае, если все элементы a_i, лежащие в циклически несократимой записи $w = a_1b_1\dots a_lb_l$, принадлежат $\tilde{A}$.

Обозначим через A^0 подгруппу группы A, порождённую элементами a_i. Поскольку все a_i лежат в подгруппе $\tilde{A}$, то $A^0 \in \tilde{A}$. Аномальное произведение A_wB можно представить в виде $A_wB = (A * A^0_wB; A^0)$. Докажем, что все x^i, $i \in \mathbb{Z}$, лежат в разных двойных смежных классах группы A по подгруппе A^0. Предположим, что для некоторых $i \neq j$ элементы x^i, x^j лежат в одном двойном смежном классе. Тогда $x^i = a_{01}x^ja_{02}$ для некоторых $a_{01}, a_{02} \in A^0$. Следовательно, $x^{-i}a_{01}x^ja_{02} = 1$, но тогда $x^{-i}a_{01}x^ja_{02} \in \tilde{A}$. При гомоморфизме $A \to \langle x\rangle$ элемент $x^{-i}a_{01}x^ja_{02}$ переходит в элемент x^{j-i}, поскольку $a_{01}, a_{02} \in \tilde{A}$. При $i \neq j$ имеем $x^{i-j} \neq 1$, а следовательно, и $x^{-i}a_{01}x^ja_{02} \neq 1$. Соответственно, x^i и x^j лежат в разных двойных смежных классах для любых целочисленных $i \neq j$. Таким образом, $|A :: A^0| = \infty$. То, что группа A^0 будет собственной подгруппой группы A^0_wB, доказывается аналогично тому, как это было сделано в предыдущем утверждении статьи. Группа $A_wB = (A * A^0_wB; A^0)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 о существовании нетривиального псевдохарактера на свободных произведениях с объединённой подгруппой. Утверждение доказано. □

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Клячко за постановку задачи и руководство работой.

Литература

[1] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 5. — С. 494—517.

[2] Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 2. — С. 84—103.

[3] Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 546—550.

[4] Каган Д. З. О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2004. — № 6. — С. 24—28.

[5] Клячко А. А. Гипотеза Кервера—Лауденбаха и копредставления простых групп. — 2004. — arXiv:math.GR/0409146.

[6] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[7] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.

[8] Файзиев В. А. Об устойчивости одного функционального уравнения на группах // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 1. — С. 193—194.

[9] Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 70—73.

[10] Cohen M. M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geom. Topol. — 2001. — Vol. 5. — P. 127—142.

[11] Grigorchuk R. I. Some results on bounded cohomology // Combinatorial and Geometric Group Theory. Proceedings of a workshop held at Heriot-Watt University, Edinburgh, GB, spring of 1993 / A. J. Duncan, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 284). — P. 111—163.