

Тройные произведения семейств Колмана

А. А. ПАНЧИШКИН

Институт Фурье, Гренобль, Франция
e-mail: panchish@m Mozart.ujf-grenoble.fr

УДК 511.334

Ключевые слова: модулярные формы, p -адические L -функции, p -адические банаховы модули.

Аннотация

Модулярные формы изучаются с точки зрения компьютерной алгебры, а также как элементы p -адических банаховых модулей. Представлены методы решения задач теории чисел посредством производящих функций и их связи с модулярными формами. В частности, обсуждаются специальные значения L -функций. Для простого числа p рассматриваются тройки классических модулярных форм

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} e(nz) \in \mathcal{S}_{k_j}(N_j, \psi_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

весов k_1, k_2, k_3 , уровней N_1, N_2, N_3 и характеров $\psi_j \bmod N_j$. Описаны p -адические L -функции четырёх переменных, связанные с тройными произведениями семейств Колмана

$$k_j \mapsto \left\{ f_{j,k_j} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j}(k) q^n \right\}$$

параболических форм положительного наклона $\sigma_j = v_p(\alpha_{p,j}^{(1)}(k_j)) \geq 0$, где $\alpha_{p,j}^{(1)} = \alpha_{p,j}^{(1)}(k_j)$ — собственные значения оператора Аткина $U = U_p$.

Abstract

A. A. Panchishkin, Triple products of Coleman's families, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 89–100.

We discuss modular forms as objects of computer algebra and as elements of certain p -adic Banach modules. We discuss a problem-solving approach in number theory, which is based on the use of generating functions and their connection with modular forms. In particular, the critical values of various L -functions of modular forms produce nontrivial but computable solutions of arithmetical problems. Namely, for a prime number we consider three classical cusp eigenforms

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} e(nz) \in \mathcal{S}_{k_j}(N_j, \psi_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

of weights k_1, k_2 , and k_3 , of conductors N_1, N_2 , and N_3 , and of Nebentypus characters $\psi_j \bmod N_j$. The purpose of this paper is to describe a four-variable p -adic L -function attached to Garrett's triple product of three Coleman's families

$$k_j \mapsto \left\{ f_{j,k_j} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j}(k) q^n \right\}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 89–100.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

of cusp eigenforms of three fixed slopes $\sigma_j = v_p(\alpha_{p,j}^{(1)}(k_j)) \geq 0$, where $\alpha_{p,j}^{(1)} = \alpha_{p,j}^{(1)}(k_j)$ is an eigenvalue (which depends on k_j) of Atkin's operator $U = U_p$.

1. Введение

Модулярные формы как объекты компьютерной алгебры

Костя Бейдар был очень жизнерадостным человеком, про которых говорят «душа компании». Он любил танцевать, но также любил решать открытые математические проблемы и уважал компьютерную алгебру. В некоторых работах он использовал p -адические числа, банаховы кольца и модули.

Решение проблемы Колмана—Мазура о существовании p -адических L -функций двух переменных, связанных с собственными семействами положительного наклона было дано автором в [64]. Цель данной работы — перенести результаты статьи [64] на тройные произведения Гарретта семейств модулярных форм Колмана.

Мы рассматриваем модулярные формы как *степенные ряды*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{C}[[q]]$$

и как *голоморфные функции на верхней полуплоскости* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, где $q = \exp(2\pi iz)$, $z \in \mathbb{H}$. Рассмотрим L -функцию

$$L(f, s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a_n n^{-s}$$

для любого характера Дирихле $\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Знаменитый пример — функция Рамануджана $\tau(n)$: $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = -24$, $\tau(3) = 252$, $\tau(4) = -1472$, $\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$, если $(n, m) = 1$, $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ для всех простых чисел p .

Функция Δ (переменной z) определена формальным выражением

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 + \dots$$

(модулярная форма относительно группы $\Gamma = \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$).

Быстрое вычисление функции Рамануджана

Положим

$$h_k := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} q^n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d^{k-1} q^d}{1 - q^d}.$$

Доказывается, что $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/1728$, где $E_4 = 1 + 240h_4$ и $E_6 = 1 - 504h_6$. Вычисление, проведённое с использованием PARI-GP (см. [6]), даёт

$$h_k := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} q^n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d^{k-1} q^d}{1-q^d} \implies$$

```
gp > h6=sum(d=1,20,d^5*q^d/(1-q^d)+O(q^20))
gp > h4=sum(d=1,20,d^3*q^d/(1-q^d)+O(q^20))
gp > Delta=((1+240*h4)^3-(1-504*h6)^2)/1728
```

$$\begin{aligned} q &- 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 \\ &- 16744q^7 + 84480q^8 - 113643q^9 - 115920q^{10} \\ &+ 534612q^{11} - 370944q^{12} - 577738q^{13} + 401856q^{14} \\ &+ 1217160q^{15} + 987136q^{16} - 6905934q^{17} + 2727432q^{18} \\ &+ 10661420q^{19} + O(q^{20}) \end{aligned}$$

Сравнение Рамануджана $\tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \pmod{691}$:

```
gp > (Delta-h12)/691
%10 = -3*q^2 - 256*q^3 - 6075*q^4 - 70656*q^5 - 525300*q^6
- 2861568*q^7 - 12437115*q^8 - 45414400*q^9
- 144788634*q^10 - 412896000*q^11 - 1075797268*q^12
- 2593575936*q^13 - 5863302600*q^14 - 12517805568*q^15
- 25471460475*q^16 - 49597544448*q^17
- 93053764671*q^18 - 168582124800*q^19 + O(q^20)
```

Применение модулярных форм к проблемам теории чисел

Производящая функция $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{C}[[q]]$ для арифметической функции $n \mapsto a_n$, например $a_n = p(n)$	$\rightsquigarrow$	Выражение через модулярную форму, например $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n =$ $= (\Delta/q)^{-1/24}$	$\rightsquigarrow$	Число (ответ)
Пример (Харди—Рамануджан, см. [16]):				
$p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{2/3}(n-1/24)}}{4\sqrt{3}\lambda_n^2} +$ $+ O(e^{\pi\sqrt{2/3}\lambda_n}/\lambda_n^3),$ $\lambda_n = \sqrt{n-1/24}$		Хорошие базисы, конечномерность, много соотношений и тождеств		Значения L -функций, сравнения и т. д.

Другие примеры (см. [50]): теорема Ферма—Уайлза, гипотеза Бёрча—Суин-
нертона—Дайера.

2. Семейства модулярных форм Колмана

Семейства модулярных форм Колмана переменного веса $k \geq 2$:

$$k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) q^n \in \bar{\mathbb{Q}}[[q]] \subset \mathbb{C}_p[[q]].$$

Модельный пример p -адического семейства: ряд Эйзенштейна веса k

$$a_n(k) = \sum_{d|n} d^{k-1}, \quad f_k = E_k.$$

1. Функции $k \mapsto a_n(k)$ (коэффициенты ряда) и p -параметр Сатаке $k \mapsto \alpha_p^{(1)}(k)$ являются p -адическими аналитическими при $(n, p) = 1$:

$$1 - a_p X + \psi(p) p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha_p^{(1)}(k) X)(1 - \alpha_p^{(2)}(k) X).$$

2. Наклон $\text{ord}_p(\alpha(k)) = \sigma > 0$ постоянен и положителен.

Колман и Хида установили, что все классические модулярные формы лежат в p -адических аналитических семействах (см. [19, 36]). Компьютерная программа на PARI для вычисления таких семейств описана в [21] (см. также <http://modular.fas.harvard.edu/>).

Теория банаховых модулей (Колман):

- 1) оператор U действует как вполне непрерывный оператор на банаховом $\mathcal{A}$ -подмодуле $\mathcal{M}^\dagger(Np^v; \mathcal{A}) \subset \mathcal{A}[[q]]$ (т. е. U — это предел конечномерных операторов). Поэтому существует *определитель Фредгольма* $P_U(T) = \det(\text{Id} - T \cdot U) \in \mathcal{A}[[T]]$.
- 2) построен вариант *теории Рисса*: для любого обратного корня $\alpha \in \mathcal{A}^*$ ряда $P_U(T)$ существует собственная функция g , $Ug = \alpha g$, такая что все значения $ev_k(g) \in \mathbb{C}_p[[q]]$ являются классическими параболическими формами для всех k весов в некоторой окрестности $\mathcal{B} \subset X$ (см. [19]).

3. Тройные произведения Гарретта

Рассмотрим тройки (примитивных) модулярных форм

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} q^n \in \mathcal{S}_{k_j}(N_j, \psi_j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

весов k_1, k_2, k_3 , кондукторов N_1, N_2, N_3 и характеров $\psi_j \bmod N_j$, $N := \text{LCM}(N_1, N_2, N_3)$. Пусть p — простое число, $p \nmid N$. Здесь $f_j \in \bar{\mathbb{Q}}[[q]] \xrightarrow{i_p} \mathbb{C}_p[[q]]$ при фиксированном вложении $\bar{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i_p} \mathbb{C}_p$, $\mathbb{C}_p = \hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ — поле Тэйта.

Будем всегда считать, что тройки весов сбалансированные:

$$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 2, \quad k_1 \leq k_2 + k_3 - 2.$$

Тройное произведение Гарретта

Тройное произведение Гарретта — это некоторое произведение Эйлера степени 8:

$$L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \prod_{p \nmid N} L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, \chi(p)p^{-s}),$$

где

$$\begin{aligned} & L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, X)^{-1} = \\ & = \det \left(1_8 - X \begin{pmatrix} \alpha_{p,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,1}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,2}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,3}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,3}^{(2)} \end{pmatrix} \right) = \\ & = \prod_{\eta} \left(1 - \alpha_{p,1}^{(\eta(1))} \alpha_{p,2}^{(\eta(2))} \alpha_{p,3}^{(\eta(3))} X \right) = \\ & = \left(1 - \alpha_{p,1}^{(1)} \alpha_{p,2}^{(1)} \alpha_{p,3}^{(1)} X \right) \left(1 - \alpha_{p,1}^{(1)} \alpha_{p,2}^{(1)} \alpha_{p,3}^{(2)} X \right) \cdots \left(1 - \alpha_{p,1}^{(2)} \alpha_{p,2}^{(2)} \alpha_{p,3}^{(2)} X \right), \end{aligned}$$

произведение берётся по всем восьми отображениям $\eta: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$.

Критические значения и функциональное уравнение

Нормализованная L -функция (см. [17, 18, 27]) имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) &= \\ &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_3 + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_2 + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_1 + 1) L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi), \end{aligned}$$

где $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$. Гамма-множитель определяет критические значения $s = k_1, \dots, k_2 + k_3 - 2$ для $\Lambda(s)$.

Функциональное уравнение для $\Lambda(s)$ имеет вид

$$s \mapsto k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s.$$

Метод: интегральное представление Гарретта

Используется вариант *интегрального представления Гарретта* тройной L -функции для $r = 0, \dots, k_2 + k_3 - k_1 - 2$ в виде

$$\begin{aligned} \Lambda(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, k_2 + k_3 - r, \chi) &= \\ &= \iiint_{(\Gamma_0(N^2 p^{2v}) \backslash \mathbb{H})^3} \overline{\tilde{f}_{1,k_1}(z_1) \tilde{f}_{2,k_2}(z_2) \tilde{f}_{3,k_3}(z_3)} \mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi) \prod_j \frac{dx_j dy_j}{y_j^2}, \end{aligned}$$

где $\tilde{f}_{j,k_j} =: f_{j,k_j}^0$ — это собственная функция сопряжённого оператора Аткина U_p^* в $\mathcal{M}_{k_j}(Np, \psi_j)$, $f_{j,k_j,0}$ — собственная функция оператора Аткина U_p ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi) &\in \mathcal{M}_T(N^2 p^{2v}) = \\ &= \mathcal{M}_{k_1}(N^2 p^{2v}, \psi_1) \otimes \mathcal{M}_{k_2}(N^2 p^{2v}, \psi_2) \otimes \mathcal{M}_{k_3}(N^2 p^{2v}, \psi_3) - \end{aligned}$$

тройная модулярная форма веса (k_1, k_2, k_3) с фиксированным тройным характером (ψ_1, ψ_2, ψ_3) .

Тройная модулярная форма $\mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi)$ строится из некоторого почти голоморфного ряда Зигеля—Эйзенштейна $F_{\chi, r} = G^*(z, -r; k, (Np^v)^2, \psi)$ рода три, веса $k = k_2 + k_3 - k_1$ и характера $\psi = \chi^2 \psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3$. Для этого к ряду $F_{\chi, r}$ применяются:

- оператор скручивания Бёхерера, введённый в [13];
- дифференциальный оператор Ибукиямы (см. [12, 40]).

Также используются:

- теория p -адического интегрирования со значениями в банаховых $\mathcal{A}$ -модулях $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})$ тройных модулярных форм над p -адической банаховой алгеброй $\mathcal{A}$. В этой теории строятся меры на группе $Y = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$ с использованием элементов $\mathcal{E}(-r, \chi)$ модуля $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})$;
- спектральная теория тройного оператора Аткина $U = U_{p, T}$, которая позволяет вычислить интеграл через проекцию π_λ модуля $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})$ на его λ -часть $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})^\lambda$.

Доказывается, что U — это вполне непрерывный $\mathcal{A}$ -линейный оператор (т. е. предел конечномерных операторов) и проекция π_λ существует по общему результату Серра и Колмана (см. [19, 74]).

4. Основной результат:

L -функция четырёх переменных

Обозначим χ переменный характер Дирихле $\text{mod } Np^v$, $v \geq 1$, и пусть k_j — переменные веса в пространстве p -адических весов $X = X_{Np^v} = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y, \mathbb{C}_p^*)$, $Y = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$ (p -адическое аналитическое пространство). Для $r \in \mathbb{Z}$ точка $(r, \chi) \in X$ даёт гомоморфизм $(y_1, y_2) \mapsto \chi(y_1)\chi(y_2 \bmod p^v)y_2^r$.

Символ $\langle g, h \rangle$ обозначает нормализованное скалярное произведение Петерсона на модулярных формах.

Теорема.

1. Функция

$$\mathcal{L}_{\underline{f}}: (s, k_1, k_2, k_3) \mapsto \frac{\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle}{\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0 \rangle}$$

зависит p -адически аналитически от четырёх переменных

$$(\chi \cdot y_p^r, k_1, k_2, k_3) \in X \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3.$$

2. Для всех p -адических весов (k_1, k_2, k_3) в некоторой p -адической окрестности $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$ с условием $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$ значения в точках $s = k_2 + k_3 - 2 - r$ совпадают с нормализованными критическими значениями $L^*(f_{1, k_1} \otimes f_{2, k_2} \otimes f_{3, k_3}, k_2 + k_3 - 2 - r, \chi)$ ($r = 0, \dots, k_2 + k_3 - k_1 - 2$) для характеров Дирихле $\chi \bmod Np^v$, $v \geq 1$, с Np -полным кондуктором.

3. Положим $H = [2 \operatorname{ord}_p(\lambda)] + 1$. Для всех весов $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B}$ и $x = \chi \cdot y_p^r$ функция

$$x \mapsto \frac{\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle}{\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0 \rangle}$$

продолжается до p -адической аналитической функции типа $o(\log^H(\cdot))$ переменной $x \in X$.

Набросок доказательства. Для любого веса (k_1, k_2, k_3) используем равенство

$$\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle = \langle \underline{f}^0, \pi_\lambda(\mathcal{E}(-r, \chi)) \rangle,$$

которое выводится из соотношений

$$\operatorname{Im} \pi_\lambda = \operatorname{Ker}(U_T - \lambda I)^n, \quad \operatorname{Ker} \pi_\lambda = \operatorname{Im}(U_T - \lambda I)^n.$$

Отсюда следует, что $\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle$ зависит p -адически аналитически от $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$, где $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)$ — p -адическая банахова алгебра аналитических функций на $\mathcal{B}$.

Для любого веса (k_1, k_2, k_3) скалярное произведение $\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle$ даётся первой координатой вектора $\pi_\lambda(\mathcal{E}(-r, \chi))$ в любом ортогональном базисе модуля $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$, содержащем $\underline{f}^0$, относительно алгебраического произведения Петерсона—Хиды

$$\langle g, h \rangle_a = \left\langle g^\rho \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np & 0 \end{pmatrix}, h \right. \right\rangle$$

(расширенного на модуль $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$ по трилинейности).

Выберем (локальный) базис $\ell^1, \dots, \ell^n$, дающийся некоторыми тройными коэффициентами Фурье двойственного $\mathcal{A}$ -модуля (локально свободного конечного ранга) $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})^*$. Используем обозначение

$$\ell(h) = \frac{\langle \underline{f}^0, h \rangle}{\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0 \rangle}.$$

Геометрический смысл заключается в том, что ℓ — первая координата $\mathcal{A}$ -базиса собственных функций операторов Гекке T_q для всех $q \nmid Np$ с первым базисным элементом $f_0 \in \mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$. Такой базис несложно построить с помощью действия T_q на степенных рядах.

Кроме того, $\ell = \beta_1 \ell^1 + \dots + \beta_n \ell^n$ и $\beta_i = \ell(\ell_i)$, причём ℓ_i обозначает двойственный базис модуля $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$: $\ell^j(\ell_i) = \delta_{ij}$. Отсюда

$$\beta_i = \ell(\ell_i) = \frac{\langle \underline{f}^0, \ell^i \rangle}{\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0 \rangle} \in \mathcal{A}.$$

Для любого веса (k_1, k_2, k_3) имеем

$$\ell(\mathcal{E}(-r, \chi)) = \beta_1 \ell^1(\mathcal{E}(-r, \chi)) + \dots + \beta_n \ell^n(\mathcal{E}(-r, \chi)),$$

где $\beta_i = \ell(\ell_i) \in \mathcal{A}$, причём $\ell^i(\mathcal{E}(-r, \chi)) \in \mathcal{A}$ — некоторые тройные коэффициенты Фурье функции $\mathcal{E}(-r, \chi)$.

Отсюда вытекает утверждение 1, поскольку все коэффициенты Фурье функции $\mathcal{E}(-r, \chi)$ лежат в $\mathcal{A}$.

Итак, $\beta_i \ell_i(\mathcal{E}(-r, \chi))$ лежат в $\mathcal{A}$ и корректно определены для всех p -адических весов, а не только для классических весов (k_1, k_2, k_3) , откуда вытекает утверждение 1, что и даёт интерполяцию по переменным (k_1, k_2, k_3) .

Отсюда видно, что существует функция $\tilde{\mathcal{E}}(-r, \chi) \in \mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$, такая что

$$\ell(\mathcal{E}(-r, \chi)) = \ell(\pi_\lambda(\mathcal{E}(-r, \chi))) = \ell(\tilde{\mathcal{E}}(-r, \chi))$$

(для любого веса (k_1, k_2, k_3)).

Для доказательства утверждений 2 и 3 изучается зависимость от характера $x = \chi \cdot y_p^r$ и теория p -адического интегрирования.

Строятся p -адические меры μ со значениями в модуле $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$. Для этого мы доказываем сравнения для коэффициентов Фурье тройной модулярной формы $\mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi)$, как в [59, 64].

Функция $\mathcal{L}$ строится как преобразование Меллина $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_\mu(x)$ меры, которое всегда аналитически зависит от характера x .

Эти меры определены сначала лишь на «пробных функциях» $x = \chi \cdot y_p^r$, но они допускают каноническое продолжение на все локально-аналитические функции. $\square$

Литература

- [1] Манин Ю. И. Периоды параболических форм и p -адические ряды Гекке // Мат. сб. — 1973. — Т. 92, № 3. — С. 378—401.
- [2] Манин Ю. И. Значения p -адических рядов Гекке в целых точках критической полосы // Мат. сб. — 1974. — Т. 93. — С. 621—626.
- [3] Манин Ю. И. Неархимедово интегрирование и p -адические L -функции Жаке—Ленглендса // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31. — С. 3—54.
- [4] Манин Ю. И., Панчишкин А. А. Свёртки рядов Гекке и их значения в целых точках // Мат. сб. — 1977. — Т. 104. — С. 617—651.
- [5] Amice Y., Vêlu J. Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke // Astérisque. — 1975. — No. 24/25. — P. 119—131.
- [6] Batut C., Belabas D., Bernardi H., Cohen H., Olivier M. The PARI/GP number theory system. — <http://pari.math.u-bordeaux.fr>.
- [7] Böcherer S. Über die Fourier—Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen // Math. Z. — 1983. — Vol. 183. — P. 21—46.
- [8] Böcherer S. Über die Fourier—Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. II // Math. Z. — 1985. — Vol. 189. — P. 81—100.
- [9] Böcherer S. Über die Funktionalgleichung automorpher L -Funktionen zur Siegelscher Modulgruppe // J. Reine Angew. Math. — 1985. — B. 362. — S. 146—168.
- [10] Böcherer S. Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1986. — B. 56. — S. 35—47.

- [11] Böcherer S., Heim B. L -functions on $\mathrm{GSp}_2 \times \mathrm{GL}_2$ of mixed weights // *Math. Z.* — 2000. — Vol. 235, no. 1. — P. 11–51.
- [12] Böcherer S., Satoh T., Yamazaki T. On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series // *Comm. Math. Univ. S. Pauli.* — 1992. — Vol. 41. — P. 1–22.
- [13] Böcherer S., Schmidt C.-G. p -adic measures attached to Siegel modular forms // *Ann. Inst. Fourier.* — 2000. — Vol. 50, no. 5. — P. 1375–1443.
- [14] Böcherer S., Schulze-Pillot R. On the central critical value of the triple product L -function // *Number theory. Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1993–94* / D. Sinou, ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 1996. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 235.) — P. 1–46.
- [15] Buecker K. Congruences between Siegel modular forms on the level of group cohomology // *Ann. Inst. Fourier.* — 1996. — Vol. 46, no. 4. — P. 877–897.
- [16] Chandrasekharan K. *Arithmetical Functions.* — Berlin: Springer, 1970.
- [17] Coates J. On p -adic L -functions // *Astérisque.* — 1989. — Vol. 177/178. — P. 33–59.
- [18] Coates J., Perrin-Riou B. On p -adic L -functions attached to motives over $\mathbb{Q}$ // *Algebraic Number Theory — in Honor of K. Iwasawa. Proc. Workshop Iwasawa Theory Spec. Values L -Funct., Berkeley (USA) 1987.* — (Adv. Stud. Pure Math.; Vol. 17.) — Boston: Academic Press, 1989. — P. 23–54.
- [19] Coleman R. F. p -adic Banach spaces and families of modular forms // *Invent. Math.* — 1997. — Vol. 127, no. 3. — P. 417–479.
- [20] Coleman R., Mazur B. The eigencurve // Scholl A. J. (ed.) et al. *Galois representations in arithmetic algebraic geometry. Proc. of the symposium, Durham, UK, July 9–18, 1996.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1998. — (London Math. Soc. Lect. Notes; Vol. 254.) — P. 1–113.
- [21] Coleman R., Stevens G., Teitelbaum J. Numerical experiments on families of p -adic modular forms // *Computational Perspectives in Number Theory. Proc. of a Conference in Honor of A. O. L. Atkin, Chicago, USA, September 1995* / D. A. Buell, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1998. — (AMS/IP Stud. Adv. Math.; Vol. 7.) — P. 143–158.
- [22] Colmez P. Fonctions L p -adiques // *Séminaire Bourbaki.* Vol. 1998/99. Exp. 851. — *Astérisque.* — 2000. — Vol. 266. — P. 21–58.
- [23] Colmez P. La conjecture de Birch et Swinnerton—Dyer p -adique // *Séminaire Bourbaki.* Vol. 2002/2003. Exp. 919. — *Astérisque.* — 2004. — Vol. 294. — P. 251–319.
- [24] Courtieu M. Familles d'opérateurs sur les formes modulaires de Siegel et fonctions L p -adiques. — Thèse de Doctorat, Institut Fourier, 2000. — <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/t101.ps.gz>.
- [25] Courtieu M., Panchishkin A. A. *Non-Archimedean L -Functions and Arithmetical Siegel Modular Forms.* — 2nd augmented ed. — Springer, 2004. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1471.)
- [26] Deligne P. Formes modulaires et représentations l -adiques // *Séminaire Bourbaki.* Vol. 1968/69. Exp. 335. — Springer, 1971. — (Lect. Notes Math.; Vol. 179.) — P. 139–172
- [27] Deligne P. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales // *Automorphic Forms, Representations and L -Functions.* — Amer. Math. Soc., 1979. — (Proc. Symp. Pure Math.; Vol. 33, No. 2.) — P. 313–346.

- [28] Feit P. Poles and Residues of Eisenstein Series for Symplectic and Unitary Groups. — Amer. Math. Soc., 1986. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 346.)
- [29] Garrett P. B. Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products // Ann. Math. — 1987. — Vol. 125. — P. 209—235.
- [30] Garrett P. B., Harris M. Special values of triple product L -functions // Amer. J. Math. — 1993. — Vol. 115. — P. 159—238.
- [31] Gorsse B. Carrés symétriques de formes modulaires et intégration p -adique. — Mémoire de DEA de l'Institut Fourier. — 2002.
- [32] Gorsse B., Robert G. Computing the Petersson product $\langle f^0, f_0 \rangle$. — Prépublication de l'Institut Fourier, No. 654. — 2004.
- [33] Ha Huy Khoai. p -adic interpolation and the Mellin—Mazur transform // Acta Math. Vietnam. — 1980. — Vol. 5. — P. 77—99.
- [34] Harris M., Kudla S. The central critical value of a triple product L -functions // Ann. Math. — 1991. — Vol. 133. — P. 605—672.
- [35] Hida H. A p -adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic cusp forms. I // Invent. Math. — 1985. — Vol. 79. — P. 159—195.
- [36] Hida H. Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms // Invent. Math. — 1986. — Vol. 85. — P. 545—613.
- [37] Hida H. Le produit de Petersson et de Rankin p -adique // Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988—1989. — Boston: Birkhäuser, 1990. — (Prog. Math.; Vol. 91.) — P. 87—102.
- [38] Hida H., Elementary Theory of L -Functions and Eisenstein Series. — Cambridge: Cambridge University Press, 1993. — (London Math. Soc. Student Texts; Vol. 26.)
- [39] Hida H. p -Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties. — New York: Springer, 2004. — (Springer Monographs in Math.)
- [40] Ibukiyama T. On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials // Comm. Math. Univ. S. Pauli. — 1999. — Vol. 48. — P. 103—118.
- [41] Iwasawa K. Lectures on p -Adic L -Functions. — Princeton University Press, 1972. — (Ann. Math. Stud.; Vol. 74.)
- [42] Jory-Hugue F. Unicité des h -mesures admissibles p -adiques données par des valeurs de fonctions L sur les caractères. — Prépublication de l'Institut Fourier, No. 676. — 2005.
- [43] Kaneko M., Zagier D. A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms // Dijkgraaf R. H. (ed.) et al. The Moduli Space of Curves. Proc. of the Conf. (Texel Island, Netherlands, 1994). — Boston: Birkhäuser, 1995. — (Prog. Math.; Vol. 129.) — P. 165—172.
- [44] Katz N. M. p -Adic interpolation of real analytic Eisenstein series // Ann. Math. — 1976. — Vol. 104. — P. 459—571.
- [45] Katz N. M. p -adic L -functions for CM -fields // Invent. Math. — 1978. — Vol. 48. — P. 199—297.
- [46] Kitagawa K. On standard p -adic L -functions of families of elliptic cusp forms // B. Mazur (ed.) et al. p -Adic Monodromy and the Birch and Swinnerton—Dyer Conjecture. A workshop held August 12-16, 1991 in Boston, USA. — Providence: Amer. Math. Society, 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 165.) — P. 81—110.
- [47] Kubota T., Leopoldt H.-W. Eine p -adische Theorie der Zetawerte // J. Reine Angew. Math. — 1964. — Vol. 214/215. — P. 328—339.

- [48] Lang S. Introduction to Modular Forms. — Springer, 1976
- [49] Maass H. Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series. — Springer, 1971. — (Lect. Notes Math.; Vol. 216.)
- [50] Manin Yu. I., Panchishkin A. A. Introduction to Modern Number Theory. — 2nd ed. — Springer, 2005. — (Encyclopaedia of Mathematical Sciences; Vol. 49.)
- [51] Mazur B., Tate J., Teitelbaum J. On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer // Invent. Math. — 1986. — Vol. 84. — P. 1–48.
- [52] Miyake T. Modular Forms. — Berlin: Springer, 1989.
- [53] Orloff T. Special values and mixed weight triple products (with an Appendix by D. Blasius) // Invent. Math. — 1987. — Vol. 90. — P. 169–180.
- [54] Nagaoka S. A remark on Serre's example of p -adic Eisenstein series // Math. Z. — 2000. — Vol. 235. — P. 227–250.
- [55] Nagaoka S. Note on mod p Siegel modular forms // Math. Z. — 2000. — Vol. 235. — P. 405–420.
- [56] Panchishkin A. A. Admissible non-Archimedean standard zeta functions of Siegel modular forms // Jannsen U. (ed.) et al., Motives. Proc. of the Summer Research Conf. on Motives, held at the University of Washington, Seattle, USA, July 20–August 2, 1991. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Proc. Symp. Pure Math.; Vol. 55, Pt. 2.) — P. 251–292.
- [57] Panchishkin A. A. Non-Archimedean Mellin transform and p -adic L -functions // Vietnam J. Math. — 1997. — No. 3. — P. 179–202.
- [58] Panchishkin A. A. On the Siegel–Eisenstein measure // Israel J. Math. — 2000. — Vol. 120, Pt. B. — P. 467–509.
- [59] Panchishkin A. A. A new method of constructing p -adic L -functions associated with modular forms // Moscow Math. J. — 2002. — Vol. 2, no. 2. — P. 1–16.
- [60] Panchishkin A. A. The Maass–Shimura differential operators and congruences between arithmetical Siegel modular forms. — Preprint MPI. No. 41. — 2002.
- [61] Panchishkin A. A. Admissible measures for standard L -functions and nearly holomorphic Siegel modular forms. — Preprint MPI. No. 42. — 2002.
- [62] Panchishkin A. A. On p -adic integration in spaces of modular forms and its applications // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 115, no. 3. — P. 2357–2377.
- [63] Panchishkin A. A. Sur une condition suffisante pour l'existence des mesures p -adiques admissibles // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15. — P. 1–24.
- [64] Panchishkin A. A. Two variable p -adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope // Invent. Math. — 2003. — Vol. 154, no. 3. — P. 551–615.
- [65] Piatetski-Shapiro I. I., Rallis S. Rankin triple L -functions // Compositio Math. — 1987. — Vol. 64. — P. 333–399.
- [66] Puydt J. Valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires adéliques. — Thèse de Doctorat, Institut Fourier (Grenoble). — 2003.
- [67] Rankin R. A. Contribution to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I, II // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1939. — Vol. 35. — P. 351–372.
- [68] Rankin R. A. The scalar product of modular forms // Proc. London Math. Soc. — 1952. — Vol. 2, no. 3. — P. 198–217.

- [69] Rankin R. A. The adjoint Hecke operator // *Automorphic Functions and Their Applications*. Int. Conf., Khabarovsk/USSR 1988. — 1990. — P. 163–166.
- [70] Satoh T. Some remarks on triple L -functions // *Math. Ann.* — 1987. — Vol. 276. — P. 687–698.
- [71] Schmidt C.-G. The p -adic L -functions attached to Rankin convolutions of modular forms // *J. Reine Angew. Math.* — 1986. — Vol. 368. — P. 201–220.
- [72] Scholl A. Motives for modular forms // *Invent. Math.* — 1990. — Vol. 100. — P. 419–430.
- [73] Scholl A. J. An introduction to Kato's Euler systems // Scholl A. J. (ed.) et al. *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*. Proc. of the Symposium, Durham, UK, July 9–18, 1996. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998. — (London Math. Soc. Lect. Notes; Vol. 254.) — P. 379–460.
- [74] Serre J.-P. Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques // *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.* — 1962. — Vol. 12. — P. 69–85.
- [75] Serre J.-P. Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques // *Modular Functions of one Variable III*, Proc. Int. Summer School, Univ. Antwerp 1972. — Springer, 1973. — (Lect. Notes Math.; Vol. 350). — P. 191–268.
- [76] Shimura G. *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. — Princeton Univ. Press, 1971.
- [77] Shimura G. On the holomorphy of certain Dirichlet series // *Proc. London Math. Soc.* — 1975. — Vol. 31. — P. 79–98.
- [78] Shimura G. The special values of the zeta functions associated with cusp forms // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1976. — Vol. 29, no. 6. — P. 783–804.
- [79] Shimura G. On the periods of modular forms // *Math. Ann.* — 1977. — Vol. 229. — P. 211–221.
- [80] Shimura G. Confluent hypergeometric functions on tube domains // *Math. Ann.* — 1982. — Vol. 260. — P. 269–302.
- [81] Shimura G. On Eisentsein series // *Duke Math. J.* — 1983. — Vol. 50. — P. 417–476.
- [82] Shimura G. *Arithmeticity in the Theory of Automorphic Forms*. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 82.)
- [83] Tilouine J., Urban E. Several variable p -adic families of Siegel–Hilbert cusp eigenforms and their Galois representations // *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4^e sér. — 1999. — Vol. 32. — P. 499–574.
- [84] Visik M. M. Non-Archimedean measures connected with Dirichlet series // *Math. USSR Sb.* — 1978. — Vol. 28. — P. 216–228.
- [85] Vishik M. M., Manin Yu. I. p -adic Hecke series of imaginary quadratic fields // *Math. USSR Sb.* — 1976. — Vol. 24. — P. 345–371.
- [86] Weil A. On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field // *Proc. of the Int. Symp. on Algebraic Number Theory*, Tokyo & Nikko, 1955. — Tokyo: Science Council of Japan, 1956. — P. 1–7.
- [87] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem // *Ann. Math.* — 1995. — Vol. 141, no. 3. — P. 443–55.