Характеризация решёточной группы функций, интегрируемых по Риману

А. А. СЕРЕДИНСКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.518.2+517.982.1+517.987.1

Ключевые слова: решёточные группы, расширение Римана, интегрируемые по Риману функции, непрерывные функции, граничность, полнота.

Аннотация

В данной работе приводится алгебраическая характеризация семейства функций, интегрируемых по Риману, в терминах решёточных групп и полностью описывается расширение Римана решёточной группы всех непрерывных функций. Приводится теорема единственности для расширения Римана как регулярного пополнения решёточной группы всех непрерывных функций.

Abstract

A. A. Seredinskii, A characterization of the lattice group of Riemann integrable functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 101—140.

In this paper, we give an algebraic characterization of the family of Riemann integrable functions in terms of lattice groups and a complete description of the Riemann extension of the lattice group of all continuous functions. We formulate a uniqueness theorem for the Riemann extension as a regular completion of the lattice group of all continuous functions.

1. Введение

Пусть RI обозначает множество всех функций на отрезке $[a,b]$, интегрируемых по Риману. Рассмотрим его подмножество C, состоящее из всех непрерывных функций.

Пусть λ — мера Лебега на отрезке $[a,b]$ и $\mathcal{LN}$ — σ-идеал всех множеств нулевой меры. Функции f и g назовём *эквивалентными*, если

$$\{t \in T \mid |f(t) - g(t)| > 0\} \in \mathcal{LN}.$$

Класс эквивалентности функции $f \in \mathrm{RI}$ относительно идеала $\mathcal{LN}_\mu$ будем обозначать через $\bar f \bmod \mathcal{LN}_\mu$. Множество классов эквивалентности $\bar f$ в RI всех функций $f \in \mathrm{RI}$ обозначим через $\mathrm{RI}/\mathcal{LN}$. Рассмотрим его подмножество $\bar C \equiv \{\bar c \mid c \in C\}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 101—140.

Рассмотрим вложение $u\colon C \to \mathrm{RI}/\mathcal{LN}$, такое что $uc \equiv \bar{c} \bmod \mathcal{LN}$. Расширение $u\colon C \rightarrowtail \mathrm{RI}/\mathcal{LN}$ назовём *расширением Римана семейства C*.

В работе решается следующая задача: *можно ли описать расширение Римана $C \to \mathrm{RI}/\mathcal{LN}$ с помощью сечений по типу описания расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, данного Дедекиндом?*

Напомним описание расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Теорема граничности. *Пусть $r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множества*

$$P \equiv \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leqslant r\}, \quad Q \equiv \{q \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant q\}.$$

Тогда $r = \sup P = \inf Q$.

Эта теорема утверждает, что любое вещественное число r является границей некоторого сечения (P, Q) в множестве $\mathbb{Q}$.

Теорема полноты. *Для любого сечения (P, Q) в $\mathbb{R}$ существует число $r \in \mathbb{R}$, такое что $r = \sup P = \inf Q$.*

Эта теорема утверждает, что любое сечение в $\mathbb{R}$ имеет границу в $\mathbb{R}$.

Для расширения Дедекинда $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ справедлива также *теорема единственности*, утверждающая, что свойства граничности и полноты полностью определяют это расширение.

В работе доказывается, что расширение Римана $C \to \mathrm{RI}/\mathcal{LN}$ является аналогом расширения Дедекинда при введении на C и на $\mathrm{RI}/\mathcal{LN}$ новой дополнительной структуры, названной в [2] *измельчением*. Для расширения Римана справедливы теоремы граничности и полноты, аналогичные приведённым выше теоремам граничности и полноты для расширения Дедекинда, но в более сложном варианте, учитывающем структуру измельчения (см. [5]).

Для него также справедливо важное *свойство регулярности вложения C в $\mathrm{RI}/\mathcal{LN}$ относительно введённых измельчений* (теорема 8).

Основным результатом работы является *теорема единственности* (теорема 9), утверждающая, что расширение Римана полностью определяется свойствами граничности, полноты и регулярности.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своим научным руководителям: А. В. Михалёву и В. К. Захарову.

2. Латгруппы с измельчениями и c-латгруппы с измельчениями

2.1. Латгруппы и c-латгруппы

Прежде всего покажем, что произвольная c-латгруппа A реализуется в виде c-латгруппы C всех непрерывных ограниченных функций на некотором компактном пространстве. Этот результат был анонсирован в [3].

Напомним, что *решёточной группой* ($\equiv$ *латгруппой*) называется математическая система $|A; 0, -, +, \vee, \wedge|$, такая что

1) $|A; 0, -, +|$ является коммутативной группой;
2) $|A; \vee, \wedge|$ является решёткой;
3) для любых $a, b, c \in A$ выполняется $a \vee b + c = (a + c) \vee (b + c)$.

В латгруппе определён модуль элемента $|a| \equiv a \vee (-a) = a \vee 0 - a \wedge 0$. Латгруппа является группой без кручения в том смысле, что

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in A\ (na = 0 \implies a = 0).$$

Свойство $a = nb$ обозначается через $b = a/n$, а свойство $a \wedge b = a$ обозначается через $a \leqslant b$.

Латгруппу A с выделенным элементом $\mathbf{1}$ будем называть *c-латгруппой*, если

1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in A\ \exists b \in A\ (a = nb)$;
2) $\forall a, b \in A,\ a \geqslant 0\ ((\forall n \in \mathbb{N} \mid na < b) \implies (a = 0))$;
3) $\forall a, b \in A\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n(a \vee b) = na \vee nb)$;
4) $\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\ (|a| < n\mathbf{1})$;
5) для любой последовательности $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$, для которой для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|a_p - a_q| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любых $p, q \geqslant n$, существует такой элемент $a \in A$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|a - a_p| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $p \geqslant n$.

Подлатгруппу B c-латгруппы A, являющуюся c-латгруппой, будем называть *c-подлатгруппой c-латгруппы A*. Пусть C — фиксированная латгруппа. Инъективный (латгрупповой) гомоморфизм $u\colon C \to A$, где A является латгруппой, назовём *расширением латгруппы C*. В случае, когда C — фиксированная c-латгруппа, инъективный (c-латгрупповой) гомоморфизм $u\colon C \to A$, где A является c-латгруппой, назовём *c-расширением c-латгруппы C*.

2.2. Функциональная характеризация c-латгрупп

2.2.1. Необходимые характеристические c-латгрупповые свойства семейства непрерывных функций на компактном пространстве

Покажем, что абстрактные свойства c-латгруппы отражают важные и хорошо известные свойства латгруппы непрерывных функций.

Далее K всегда означает компактное топологическое пространство, $C(K)$ — семейство всех непрерывных (ограниченных) вещественнозначных функций на K, а $\mathbf{1}$ — единичную функцию.

Проверим, что $C(K)$ обладает свойствами 1—5. Очевидно, что для семейства $C(K)$ выполняются свойства 1 и 3.

Свойство 2 для семейства $C(K)$ следует из архимедовости поля $\mathbb{R}$. Действительно, пусть для функции $f \in C(K)$, такой что $f(t) \geqslant 0$ для любого $t \in K$, выполняется равенство $nf = g$ для некоторой функции $g \in C(K)$ и любого числа $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(t) \leqslant g(t)/n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $t \in K$. Из ограниченности непрерывной функции на компакте и принципа Архимеда для $\mathbb{R}$ мы получаем равенство $f(t) = 0$.

Свойство 4 для семейства $C(K)$ следует из того, что любая непрерывная функция на компакте ограничена. Действительно, пусть функция f принадлежит семейству $C(K)$. Так как K — компакт, то выполняется неравенство $|f| \leqslant n\mathbf{1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Свойство 5 для $C(K)$ следует из равномерной полноты $C(K)$. Действительно, пусть $(f_n \in C(K) \mid n \in \mathbb{N})$ — последовательность, для которой существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $|f_p - f_q| \leqslant \mathbf{1}/k$ для всех чисел $p, q \geqslant n$. Возьмём число $\varepsilon > 0$, подберём число k, что $1/k < \varepsilon$. Тогда $|f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon$ для любого $t \in K$ и любых $p, q \geqslant n$. В силу канторовой полноты $\mathbb{R}$ существует функция $f\colon K \to \mathbb{R}$, такая что $f(t) = \lim(f_p(t) \in C(K) \mid p \in \mathbb{N})$ для каждого $t \in K$. Известно, что $f \in C(K)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $|f(t) - f_p(t)| < \varepsilon$ для любого $p \geqslant m$ и каждого $t \in K$. Положим $\varepsilon = 1/k$. Для этого ε выполняется неравенство $|f - f_p| < \mathbf{1}/k$ для любого $p \geqslant M$.

Таким образом, латгруппа $C(K)$ обладает всеми свойствами 1—5.

2.2.2. Наделение c-латгруппы структурой линейного решёточного пространства над полем $\mathbb{R}$

Пусть A — фиксированная c-латгруппа. Определим внешнее умножение ($\equiv$ композицию) A на $\mathbb{Z}$, полагая $0a \equiv 0$, $1a \equiv a$, $(n+1)a \equiv (na) + a$ и $(-n)a \equiv -(na)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пара $(A, \mathbb{Z})$ вместе с композицией $(n, a) \mapsto na$ образует $\mathbb{Z}$-модуль.

Лемма 1. *Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и элемента $a \in A$ справедливо равенство $m(a/n) = (ma)/n$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку равенств

$$n(m(a/n) - (ma)/n) = n(m(a/n)) - n((ma)/n) = m(n(a/n)) - ma = ma - ma = 0.$$

Из неё следует, что $n(m(a/n) - (ma)/n) = 0$. Так как c-латгруппа A не имеет кручения, то справедливо равенство $m(a/n) = (ma)/n$. □

Лемма 2. *Для любых чисел $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и элемента $a \in A$ справедливо равенство $(a/n_1)/n_2 = a/(n_1 n_2)$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} &n_1 n_2((a/n_1)/n_2 - a/(n_1 n_2)) = \\ &\qquad = n_1(n_2((a/n_1)/n_2)) - (n_1 n_2)(a/(n_1 n_2)) = n_1(a/n_1) - a = a - a = 0. \end{aligned}$$

Из неё следует, что $n_1 n_2((a/n_1)/n_2 - a/(n_1 n_2)) = 0$. Так как c-латгруппа A не имеет кручения, то справедливо равенство $(a/n_1)/n_2 = a/(n_1 n_2)$. □

Лемма 3. *Пусть $a, b \in A$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(a \vee b)/n = (a/n) \vee (b/n)$.*

Доказательство. Заметим, что выполняются равенства

$$n((a \vee b)/n) = a \vee b$$

и, по свойству 3 c-латгруппы,

$$n((a/n) \vee (b/n)) = (n(a/n)) \vee (n(b/n)) = a \vee b.$$

Отсюда следует, что выполняется равенство $n((a \vee b)/n) - (a/n) \vee (b/n)) = 0$. Так как c-латгруппа A не имеет кручения, приходим к равенству $(a \vee b)/n = (a/n) \vee (b/n)$. □

Лемма 4. *Пусть $a, b \in A$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a \leqslant b \iff na \leqslant nb$.*

Доказательство. Проверим сначала, что неравенство $a \leqslant b$ влечёт неравенство $na \leqslant nb$. По определению $a \leqslant b$ означает, что $a \vee b = b$. По свойству 3 c-латгруппы выполняются равенства $nb = n(a \vee b) = na \vee nb$. Отсюда получаем, что справедливо неравенство $na \leqslant nb$.

Проверим теперь, что неравенство $na \leqslant nb$ влечёт неравенство $a \leqslant b$. Неравенство $na \leqslant nb$ по определению равносильно равенству $na \vee nb = nb$. Поэтому выполняются равенства $(na \vee nb)/n = (nb)/n = b$. Из леммы 3 теперь следует, что $a \vee b = b$, и, значит, справедливо неравенство $a \leqslant b$. □

Следствие. *Пара $(A, \mathbb{Z})$ является решёточным модулем над кольцом $\mathbb{Z}$.*

Лемма 5. *Пусть $m_1/n_1 = m_2/n_2 \in \mathbb{Q}$, причём $n_1, n_2 > 0$. Тогда справедливо равенство $m_1(a/n_2) = m_2(a/n_1)$.*

Доказательство. По определению числовой дроби выполняется равенство $m_1 n_2 = m_2 n_1$ в кольце $\mathbb{Z}$. Поэтому справедливы равенства

$$m_1(a/n_1) = m_1((n_2(a/n_2))/n_1) = m_1(n_2((a/n_2)/n_1)) =$$
$$= m_1 n_2((a/n_2)/n_1) = m_2 n_1((a/n_2)/n_1) = m_2(n_1((a/n_2)/n_1)) = m_2(a/n_2).$$

Итак, выполняется равенство $m_1(a/n_2) = m_2(a/n_1)$. □

Из леммы 5 следует, что мы можем корректно определить внешнее умножение A на $\mathbb{Q}$, полагая $pa \equiv m(a/n)$ для любого элемента a из c-латгруппы A и любого числа $p = m/n \in \mathbb{Q}$, такого что $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$. Далее будем обозначать элемент $m(a/n)$ через $(m/n)a$.

Лемма 6. *Пара $(A, \mathbb{Q})$ вместе с композицией $(p, a) \mapsto pa$ образует линейное решёточное пространство над полем $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда по определению композиции выполняется равенство $(m/n)(a+b) = m((a+b)/n)$. Так как выполняется цепочка равенств

$$n((a+b)/n - (a/n + b/n)) = a + b - n(a/n + b/n) = a + b - (a+b) = 0$$

и c-латгруппа A не имеет кручения, то справедливо равенство $(a+b)/n = (a/n + b/n)$. Отсюда

$$m((a+b)/n) = m(a/n + b/n) = m(a/n) + m(b/n).$$

Итак, справедливо равенство $(m/n)(a+b) = (m/n)a + (m/n)b$.

Пусть $a \in A$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}&((m_1/n_1) + (m_2/n_2))a = \\ &\quad = ((m_1n_2 + m_2n_1)/(n_1n_2))a = (m_1n_2 + m_2n_1)(a/n_1n_2) = \\ &\quad = m_1n_2(a/n_1n_2) + m_2n_1(a/n_1n_2) = m_1(a/n_1) + m_2(a/n_2).\end{aligned}$$

Итак, выполняется равенство $((m_1/n_1) + (m_2/n_2))a = (m_1/n_1)a + (m_2/n_2)a$.

Пусть $a \in A$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned}&((m_1/n_1)(m_2/n_2))a = \\ &= (m_1m_2/n_1n_2)a = m_1m_2(a/n_1n_2) = m_1(m_2((a/n_2)/n_1)) = \\ &= m_1((m_2(a/n_2))/n_1) = m_1(((m_2/n_2)a)/n_1) = (m_1/n_1)((m_2/n_2)a).\end{aligned}$$

Итак, справедливо равенство $((m_1/n_1)(m_2/n_2))a = (m_1/n_1)((m_2/n_2)a)$.

Пусть $a, b \in A$ и $m, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что если $a \leqslant b$, то $(m/n)a \leqslant (m/n)b$. По лемме 4 выполняется неравенство $ma \leqslant mb$. Это неравенство по определению равносильно равенству $ma \vee mb = mb$. По лемме 3 выполняется равенство $(ma \vee mb)/n = (ma/n) \vee (mb/n)) = mb/n$. Согласно определению композиции последнее равенство примет вид $(m/n)a \vee (m/n)b = (m/n)b$. Итак, справедливо неравенство $(m/n)a \leqslant (m/n)b$. □

Лемма 7. *Структура решёточного $\mathbb{Z}$-модуля на паре $(A, \mathbb{Z})$ продолжается до структуры линейного решёточного пространства над полем $\mathbb{Q}$ на паре $(A, \mathbb{Q})$ единственным образом.*

Доказательство. Пусть существует внешнее умножение $*\colon \mathbb{Q} \times A \to A$, такое что $(A, \mathbb{Q}, *)$ является линейным решёточным пространством над полем $\mathbb{Q}$ и $m/n \in \mathbb{Q}$. Тогда согласно свойствам линейного решёточного пространства над полем $\mathbb{Q}$ справедливы равенства $n((m/n)*a) = (nm/n)*a = m*a = ma$. С другой стороны, выполняются равенства $ma = m(n(a/n)) = n((m/n)a)$. Следовательно, приходим к равенству $n((m/n) * a - (m/n)a) = 0$. Так как c-латгруппа A не имеет кручения, то справедливо равенство $(m/n) * a = (m/n)a$. □

Лемма 8. *Пусть $a \in A$ и $p \in \mathbb{Q}$. Тогда справедливо равенство $|pa| = |p|\,|a|$.*

Доказательство. Пусть $p = m/n$ для некоторых $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned}&|(m/n)a| = |m(a/n)| = (m(a/n)) \vee (-(m(a/n))) = \\ &\qquad = (|m|((a/n)) \vee (-|m|(a/n)) = |m|(1/|m|)(|m|((a/n)) \vee (-|m|(a/n)).\end{aligned}$$

Применяя дважды лемму 3 к последнему выражению, приходим к равенствам

$$|m|(1/|m|)(|m|((a/n)) \vee (-|m|(a/n)) = |m|((a/n) \vee (-(a/n))) = |m|((a \vee (-a))/n).$$

Итак,

$$(m(a/n)) \vee (-(m(a/n))) = |m|((a \vee (-a))/n),$$

или, в других обозначениях, $|(m/n)a| = |(m/n)|\,|a|$. □

Определим внешнее умножение A на $\mathbb{R}$. Пусть $a \in A$ и $r \in \mathbb{R}$. Для r возьмём некоторую последовательность действительных чисел $(r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$, такую что $\lim(r_n \mid n \in \mathbb{N}) = r$. По свойству 4 c-латгруппы A существует такое число $l \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство $|a| \leqslant l\mathbf{1}$. Рассмотрим последовательность $(a_n \equiv r_n a \in A \mid n \in \mathbb{N})$. Фиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}$. Тогда для числа $kl \in \mathbb{N}$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство $|r_m - r_n| \leqslant (1/kl)$ для любых чисел $m, n \geqslant N$. С учётом леммы 8 получаем

$$|a_m - a_n| = |r_m a - r_n a| = |r_m - r_n|\,|a| \leqslant |r_m - r_n| l\mathbf{1} \leqslant (1/k)\mathbf{1}$$

для любых $m, n \geqslant N$.

Последовательность $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$ удовлетворяет условиям свойства 5 c-латгруппы. Поэтому существует элемент $\alpha \in A$, такой что для любого числа $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $|\alpha - a_n| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого числа $n \geqslant N$.

Лемма 9. *Элемент $\alpha \in A$ не зависит от выбора последовательности $(r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$.*

Доказательство. Пусть выбрана другая последовательность $(\bar{r}_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$, такая что $\lim(\bar{r}_n \mid n \in \mathbb{N}) = r$. Тогда, как показано ранее, существуют числа $N_k \in \mathbb{N}$ и $\bar{N}_k \in \mathbb{N}$, такие что $|\alpha - (r_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant N_k$ и $|\bar{\alpha} - (\bar{r}_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant \bar{N}_k$.

Образуем последовательность $(\hat{r}_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$ следующим образом:

$$\hat{r}_1 = 0, \quad \hat{r}_{2k} = r_k, \quad \hat{r}_{2k+1} = \bar{r}_k.$$

Тогда $\lim(\hat{r}_n \mid n \in \mathbb{N}) = r$. Как указано выше, для последовательности $(\hat{r}_n \mid n \in \mathbb{N})$ существуют такие элемент $\hat{\alpha}$ и число $\hat{N}_k \in \mathbb{N}$, что $|\hat{\alpha} - (\hat{r}_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant \hat{N}_k$. Фиксируем число k и возьмём $m_1 = \max\{N_k, \hat{N}_k\}$. Тогда можно рассмотреть неравенства $|\alpha - r_{m_1} a| \leqslant \mathbf{1}/k$ и $|\hat{\alpha} - \hat{r}_{2m_1} a| \leqslant \mathbf{1}/k$. По определению модуля это означает, что выполняются неравенства $-\mathbf{1}/k \leqslant \alpha - r_{m_1} a) \leqslant \mathbf{1}/k$ и $-\mathbf{1}/k \leqslant \hat{r}_{2m_1} a - \hat{\alpha} \leqslant \mathbf{1}/k$. По построению последовательности $(\hat{r}_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$ выполняется равенство $r_{m_1} = \hat{r}_{2m_1}$. Отсюда, складывая неравенства, получаем $|\hat{\alpha} - \alpha| \leqslant 2(\mathbf{1}/k)$. Так как это неравенство выполняется для любого числа $k \in \mathbb{N}$, то, выбирая число $k = 2n$ и используя свойство 2 c-латгруппы, выводим равенство $\hat{\alpha} - \alpha = 0$.

Аналогичным образом показывается, что для числа $m_2 = \max\{\bar{N}_k, \hat{N}_k\}$ справедливы неравенства $|\alpha - r_{m_2} a| \leqslant \mathbf{1}/k$ и $|\bar{\alpha} - \bar{r}_{2m_2+1} a| \leqslant \mathbf{1}/k$. Отсюда, как и выше, используя равенство $\bar{r}_{m_2} = \hat{r}_{2m_2+1}$, выводим равенство $\hat{\alpha} - \bar{\alpha} = 0$. В результате мы установили, что выполняется равенство $\alpha = \hat{\alpha}$. $\square$

Из этой леммы следует, что мы можем корректно определить элемент $ra \in A$, полагая $ra \equiv \alpha$.

Предложение 1. *Пара $(A, \mathbb{R})$ вместе с композицией $(r, a) \mapsto ra$ образует линейное решёточное пространство над полем $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Далее при проверке свойств линейного решёточного пространства над полем $\mathbb{R}$ будем каждый раз фиксировать число $k \in \mathbb{N}$, через r_n и s_n обозначим элементы последовательностей, сходящихся к действительным числам r и s соответственно, а число $n \in \mathbb{N}$ будем считать достаточно большим, чтобы выполнялись все необходимые равенства аналогично тому, как это делалось в предыдущей лемме и определении композиции.

Рассмотрим неравенства из определения умножения для элементов $a, b \in A$ и числа $r \in \mathbb{R}$ следующего вида:

$$|ra - r_n a| \leqslant \mathbf{1}/k, \quad |rb - r_n b| \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$|r(a+b) - r_n(a+b)| \leqslant \mathbf{1}/k.$$

По определению модуля это означает, что выполняются неравенства

$$-\mathbf{1}/k \leqslant ra - r_n a \leqslant \mathbf{1}/k, \quad -\mathbf{1}/k \leqslant rb - r_n b \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$-\mathbf{1}/k \leqslant -r(a+b) + (r_n)(a+b) \leqslant \mathbf{1}/k.$$

Складывая эти неравенства получаем, что выполняется неравенство

$$|(ra + rb) - r(a+b)| \leqslant 3(\mathbf{1}/k).$$

Так как эти рассуждения выполняются для любого числа $k \in \mathbb{N}$, то, выбирая соответствующим образом числа k, по свойству 2 c-латгруппы выводим равенство $(ra + rb) - r(a+b) = 0$. Итак, справедливо равенство $r(a+b) = ra + rb$.

Применим те же рассуждения к неравенствам

$$|ra - r_n a| \leqslant \mathbf{1}/k, \quad |sa - s_n a| \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$|(r+s)a - (r_n + s_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k.$$

Аналогично предыдущему случаю в результате получим равенство $ra + sa - (r+s)a = 0$. Итак, выполняется равенство $(r+s)a = ra + sa$.

Проверим, что $(rs)a = r(sa)$. В качестве последовательности $(t_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$, сходящейся к rs, можно взять $t_n = r_n s_n$. Рассмотрим неравенства

$$|r(sa) - r_n(sa)| \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$|sa - s_n a| \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$|(rs)a - (r_n s_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k.$$

По определению модуля эти неравенства можно записать в виде

$$-\mathbf{1}/k \leqslant r(sa) - r_n(sa) \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$-\mathbf{1}/k \leqslant sa - s_n a) \leqslant \mathbf{1}/k,$$
$$-\mathbf{1}/k \leqslant -(rs)a + (r_n s_n)a \leqslant \mathbf{1}/k.$$

Из первого и третьего неравенства получаем

$$|r(sa) - (rs)a + r_n(s_n a - sa)| \leqslant 2(\mathbf{1}/k).$$

Из второго неравенства следует, что

$$|r(sa) - (rs)a| \leqslant (2 + r_n)(\mathbf{1}/k).$$

Так как число $k \in \mathbb{N}$ произвольное, то, выбирая достаточно большие числа k, по свойству 4 c-латгруппы получаем равенство $r(sa)-(rs)a = 0$. Итак, справедливо равенство $r(sa) = (rs)a$.

Пусть $a \wedge b = c$ для некоторых $a, b, c \in A$, а $r \in \mathbb{R}$. Тогда из определения умножения на число r выполняются неравенства

$$|ra - (r_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k, \quad |rb - (r_n)b| \leqslant \mathbf{1}/k, \quad |rc - (r_n)c| \leqslant \mathbf{1}/k.$$

Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} ra \wedge rb - rc &= ra \wedge rb - (r_n)a \wedge (r_n)b + (r_n)a \wedge (r_n)b - (r_n)c + (r_n)c - rc = \\ &= ra \wedge rb + (-(r_n)a) \vee (-(r_n)b) + (r_n)c - rc = \\ &= (ra \wedge rb - (r_n)a) \vee (ra \wedge rb - (r_n)b) + (r_n)c - rc = \\ &= ((ra - (r_n)a) \wedge (rb - (r_n)a)) \vee ((ra - (r_n)b) \wedge (rb - (r_n)b)) + (r_n)c - rc. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что выполняется неравенство $ra \wedge rb - rc \leqslant 2(\mathbf{1}/k)$.

Теперь рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} rc - ra \wedge rb &= \\ &= (-ra) \vee (-rb) + (r_n)a \wedge (r_n)b - (r_n)a \wedge (r_n)b + (r_n)c - (r_n)c + rc = \\ &= ((r_n)a \wedge (r_n)b - ra) \vee ((r_n)a \wedge (r_n)b - rb) - (r_n)c + rc = \\ &= (((r_n)a - ra) \wedge ((r_n)b - ra)) \vee (((r_n)a - rb) \wedge ((r_n)b - rb)) - (r_n)c + rc. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что выполняется неравенство $rc - ra \wedge rb \leqslant 2(\mathbf{1}/k)$.

Объединяя два предыдущих неравенства, получаем $|ra \wedge rb - rc| \leqslant 2(\mathbf{1}/k)$. Выбирая подходящие числа k, по свойству 2 c-латгруппы получаем $ra \wedge rb - rc = 0$. Итак, выполняется равенство $ra \wedge rb = rc$.

Очевидно, что и, в обратную сторону, равенство $ra \wedge rb = rc$ влечёт справедливость равенства $a \wedge b = c$. □

2.2.3. Введение структуры нормированного решёточного пространства

Так как по свойству 4 c-латгруппы A для любого элемента $a \in A$ существует число $n \in \mathbb{N}$, такое что $|a| \leqslant n\mathbf{1}$, то мы можем определить оценивание $\|\cdot\| \colon A \to \mathbb{R}$, полагая

$$\|a\| \equiv \inf\{q \in \mathbb{Q}_+ \mid |a| \leqslant q\mathbf{1}\}$$

для $a \in A$. Ясно, что $\|a\| = \|\,|a|\,\|$. Кроме того, неравенство $|a| \leqslant |b|$ влечёт неравенство $\|a\| \leqslant \|b\|$.

Лемма 10. *Оценивание $\|\cdot\|$ является нормой на $\mathbb{R}$-линейном решёточном пространстве A.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. По определению

$$\|a\| = \inf\{q \in \mathbb{Q}_+ \mid |a| \leqslant q\mathbf{1}\}, \quad \|b\| = \inf\{q' \in \mathbb{Q}_+ \mid |b| \leqslant q'\mathbf{1}\}.$$

Исходя из определения модуля, неравенства (из определения нормы) можно переписать следующим образом: $a \leqslant q\mathbf{1}$, $-a \leqslant q\mathbf{1}$, $b \leqslant q'\mathbf{1}$, $-b \leqslant q'\mathbf{1}$. Складывая первое неравенство с третьим неравенством и второе неравенство с четвёртым, получаем неравенства $a + b \leqslant (q + q')\mathbf{1}$ и $-a - b \leqslant (q + q')\mathbf{1}$. Отсюда получаем, что справедливо неравенство $|a+b| \leqslant (q+q')\mathbf{1}$. Последнее неравенство означает, что $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$.

Пусть $\|a\| = 0$. Тогда из определения инфимума следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $p = p(k) \in \mathbb{Q}$, что $0 \leqslant p < (1/k)$ и $|a| \leqslant p\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}/k$. По свойству 4 c-латгруппы выполняется равенство $a = 0$. Очевидно, что $\|0\| = 0$. Итак, $\|a\| = 0 \iff a = 0$.

Пусть $r \in \mathbb{Q}$ и $r \neq 0$. Умножая неравенство из определения $\|a\|$ на r, получим $r|a| = ra \vee -ra \leqslant |r|q\mathbf{1}$, откуда видно, что $\|ra\| \leqslant |r|\,\|a\|$. Рассмотрим оценивание

$$\|ra\| = \inf\{q' \in \mathbb{Q}_+ \mid |ra| \leqslant q'\mathbf{1}\}.$$

Умножая неравенство в скобках на $(1/r)$, получим

$$(1/r)|ra| = (1/r)(ra \vee -ra) = |a| \leqslant (1/r)q'\mathbf{1}.$$

Следовательно, $\|a\| \leqslant \|ra\|/|r|$. Если $r = 0$, то очевидным образом $\|ra\| = 0 = |r|\,\|a\|$. Если $r \neq 0$, то выполняется неравенство $|r|\,\|a\| \leqslant \|ra\|$. Итак, справедливо равенство $\|ra\| = |r|\,\|a\|$.

Пусть теперь $r \in \mathbb{R}$. Тогда, повторяя рассуждения из определения умножения на действительные числа и фиксируя число $k \in \mathbb{N}$, получим число $N \in \mathbb{N}$ и последовательность $(r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$, такие что $|ra - (r_n)a| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant N$. Это означает, что $\|ra - r_n a\| \leqslant 1/k$ для любого $n \geqslant N$. Далее, используя доказанные выше свойства оценивания, получим

$$\|ra\| = \|ra - r_n a + r_n a\| \leqslant \|ra - r_n a\| + \|r_n a\| \leqslant 1/k + |r_n|\,\|a\| = \\ = 1/k + |r_n - r + r|\,\|a\| \leqslant 1/k + |r_n - r|\,\|a\| + |r|\,\|a\| \leqslant (1 + \|a\|)/k + |r|\,\|a\|.$$

Устремляя число k к бесконечности, приходим к неравенству $\|ra\| \leqslant |r|\,\|a\|$. С другой стороны,

$$|r|\,\|a\| = |r - r_n + r_n|\,\|a\| \leqslant |r - r_n|\,\|a\| + |r_n|\,\|a\| \leqslant \\ \leqslant \|a\|/k + \|r_n a\| = \|a\|/k + \|ra - ra + r_n a\| \leqslant \|a\|/k + 1/k + \|ra\|.$$

Опять устремляя число k к бесконечности, получим $|r|\,\|a\| \leqslant \|ra\|$. Итак, $\|ra\| = |r|\,\|a\|$. □

Лемма 11. *Нормированное линейное решёточное пространство $(A, \|\cdot\|)$ над полем $\mathbb{R}$ является полным.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда множество

$$L(k) \equiv \{l \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N}\ (m, n \geqslant l \implies \|a_m - a_n\| < 1/k)\}$$

не пусто для каждого $k \in \mathbb{N}$. Применяя функцию выбора $c\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, получаем последовательность $m_k \equiv c(L(k))$. Тогда для $m, n \geqslant m_k$ по определению нормы существуют $p_{mn} \leqslant 1/k$, такие что $|a_n - a_m| \leqslant p_{mn}\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}/k$. По свойству 5 c-латгруппы существуют элемент $a \in A$ и число $n_k \in \mathbb{N}$, такие что $|a - a_n| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant n_k$, откуда $\|a - a_n\| \leqslant 1/k$. По определению предела последовательности по норме $a = \lim(a_n \mid n \in \mathbb{N})$. □

Лемма 12. *Структура линейного решёточного пространства на паре* $(A, \mathbb{Q})$ *над полем* $\mathbb{Q}$ *продолжается до структуры линейного решёточного пространства на паре* $(A, \mathbb{R})$ *над полем* $\mathbb{R}$ *единственным образом.*

Доказательство. Пусть существует внешнее умножение $*\colon \mathbb{R} \times A \to A$, такое что $(A, \mathbb{R}, *)$ является линейным решёточным пространством над полем $\mathbb{R}$. Для произвольного $r \in \mathbb{R}$ оценим $\|r * a - ra\|$. Для этого рассмотрим последовательность $(r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$, для которой $\lim(r_n \mid n \in \mathbb{N}) = r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\|r * a - ra\| = \|r * a - r_n * a + r_n a - ra\| \leqslant \\ \leqslant \|r * a - r_n * a\| + \|ra - r_n a\| = 2|r - r_n|\,\|a\|.$$

Так как $\lim(|r - r_n| \mid n \in \mathbb{N}) = 0$, то $\|r * a - ra\| = 0$. Из леммы 10 следует, что выполняется равенство $r * a = ra$. □

Следствие. *Структура* $\mathbb{Z}$*-модуля на паре* $(A, \mathbb{Z})$ *продолжается до структуры линейного решёточного пространства* $(A, \mathbb{R})$ *над полем* $\mathbb{R}$ *единственным образом.*

Итак, c-латгруппа A является линейным решёточным пространством над полем $\mathbb{R}$ с сильной единицей.

2.2.4. Реализация c-латгруппы в виде латгруппы непрерывных вещественнозначных функций

Лемма 13. *Для любого элемента* $a \in A$ *неравенства* $\|a\| \leqslant \mathbf{1}$ *и* $|a| \leqslant \mathbf{1}$ *равносильны.*

Доказательство. Если выполняется неравенство $|a| \leqslant \mathbf{1}$, то из определения нормы следует, что справедливо неравенство $\|a\| \leqslant \mathbf{1}$.

Пусть имеет место неравенство $\|a\| \leqslant \mathbf{1}$. Тогда для любого числа $\varepsilon = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, существует такое число $q \in \mathbb{Q}$, что $|a| \leqslant q\mathbf{1}$ и справедливо неравенство $1 + \varepsilon \geqslant q$. Следовательно, выполняется неравенство $|a| \leqslant (1 + \varepsilon)\mathbf{1}$ и поэтому $n((|a| - \mathbf{1}) \vee 0) \leqslant \mathbf{1}$. По свойству 2 c-латгруппы выводим равенство $(|a| - \mathbf{1}) \vee 0 = 0$ и приходим к неравенству $|a| \leqslant \mathbf{1}$. □

Лемма 14. *Для любого элемента* $a \in A$ *справедливо равенство* $\|a \vee b\| = \|a\| \vee \|b\|$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\|a\| \vee \|b\| \leqslant \|a \vee b\|$. Имеем

$$\|a \vee b\| = \|\,|a \vee b|\,\| \leqslant \|\,|a| \vee |b|\,\| = \inf\{q \in \mathbb{Q} \mid |a| \vee |b| \leqslant q\mathbf{1}\}.$$

Следовательно, справедливы неравенства $|a| \leqslant q\mathbf{1}$ и $|b| \leqslant q\mathbf{1}$. Отсюда приходим к неравенствам $\|a\| \leqslant q\mathbf{1}$ и $\|b\| \leqslant q\mathbf{1}$, а следовательно, выполняется неравенство $\|a\| \vee \|b\| \leqslant \|a\| \vee \|b\|$.

Теперь покажем, что $\|a \vee b\| \leqslant \|a\| \vee \|b\|$. По определению

$$\|a\| = \inf\{q_1 \in \mathbb{Q}_+ \mid |a| \leqslant q_1 \mathbf{1}\}, \quad \|b\| = \inf\{q_2 \in \mathbb{Q}_+ \mid |b| \leqslant q_2 \mathbf{1}\}.$$

Пусть выполняются неравенства $\|a\| \leqslant q_1$ и $\|b\| \leqslant q_2$. По определению нормы это означает, что выполняются неравенства $|a| \leqslant q_1\mathbf{1}$ и $|b| \leqslant q_2\mathbf{1}$. Отсюда следует, что выполняются неравенства

$$|a \vee b| \leqslant |a| \vee |b| \leqslant q_1\mathbf{1} \vee q_2\mathbf{1} \leqslant q_1 \vee q_2\mathbf{1}.$$

Приходим к неравенству $\|a \vee b\| \leqslant q_1 \vee q_2$, откуда последовательно получаем неравенства $\|a \vee b\| \leqslant \|a\| \vee q_2$ и $\|a \vee b\| \leqslant \|a\| \vee \|b\|$.

Объединяя полученные выше неравенства, приходим к равенству $\|a \vee b\| = \|a\| \vee \|b\|$. □

Из двух предыдущих лемм следует, что мы превратили c-латгруппу A в MI-пространство в смысле Какутани (см. [9, 13.2]). Следующая теорема является прямым следствием теоремы Крейнов—Какутани (см. [9, 13.2.3]).

Теорема 1. *Латгруппа является с-латгруппой, если и только если она изоморфна с-латгруппе C всех непрерывных ограниченных функций на некотором тихоновском пространстве.*

2.3. r-латгруппы и cr-латгруппы

2.3.1. c-латгрупповые фактор-пространства

В данном пункте будем считать, что A является c-латгруппой. Напомним, что подгруппа и подрешётка ($\equiv$ *подлатгруппа*) E латгруппы A называется *идеалом* в A, если из $a \in E$, $b \in A$ и $|b| \leqslant |a|$ следует, что $b \in E$. Идеал E c-латгруппы A назовём *замкнутым*, если для любой последовательности $(a_n \in E \mid n \in \mathbb{N})$ и любого элемента $a \in A$, таких что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a - a_n| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant N$, справедливо $a \in E$. Семейство всех замкнутых идеалов в A обозначим $\mathcal{C}(A)$.

Лемма 15. *Пусть E — замкнутый идеал в с-латгруппе A. Тогда идеал E является замкнутым в банаховом пространстве $(A, \|\cdot\|)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(a_n \in E \mid n \in \mathbb{N})$ и элемент $a \in A$, такие что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\|a - a_n\| = \inf\{q \in \mathbb{Q}_+ \mid |a - a_n| \leqslant q\mathbf{1}\} \leqslant 1/k$$

для любого $n \geqslant N$. По свойству инфимума это означает, что $|a - a_n| \leqslant (2/k)\mathbf{1}$ для любого $n \geqslant N$. Подбирая соответствующие числа $k \in \mathbb{N}$, получаем по определению замкнутого идеала в c-латгруппе A, что $a \in E$. Следовательно, идеал E является замкнутым в банаховом пространстве $(A, \|\cdot\|)$. □

Лемма 16. *Пусть E — замкнутый идеал в банаховом пространстве $(A, \|\cdot\|)$. Тогда идеал E является замкнутым в с-латгруппе A.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(a_n \in E \mid n \in \mathbb{N})$ и элемент $a \in A$, такие что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a - a_n| \leqslant \mathbf{1}/k$ для любого $n \geqslant N$. Тогда очевидно, что

$$\|a - a_n\| = \inf\{q \in \mathbb{Q}_+ \mid |a - a_n| \leqslant q\mathbf{1}\} \leqslant 1/k$$

для любого $n \geqslant N$. Отсюда по определению замкнутого идеала в банаховом пространстве $(A, \|\cdot\|)$ следует, что $a \in E$. Следовательно, идеал E является замкнутым в c-латгруппе A. □

Из теории банаховых пространств хорошо известно, что фактор-пространство A/E по замкнутому относительно нормы $\|\cdot\|$ идеалу E является полным относительно нормы

$$\|\bar{a}\| \equiv \inf\{\|a'\| \mid a' \in \bar{a}\}.$$

Лемма 17. *Пусть для некоторых элементов $a \in A$ и $e \in E$ и некоторого числа $q \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $|a| + e \leqslant \mathbf{1}$. Тогда выполняется неравенство $|a + ((-a) \vee e) \wedge (-e)| \leqslant \mathbf{1}$ и элемент $((-a) \vee e) \wedge (-e)$ принадлежит идеалу E.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $((-a) \vee e) \wedge (-e) \in A$. Для него выполняются равенства

$$(((-a) \vee e) \wedge (-e)) \wedge |e| = (((-a) \vee e) \wedge (-e)) \wedge (e \vee (-e)) =$$
$$= (((-a) \vee e)) \wedge ((-e) \wedge (e \vee (-e))) = ((-a) \vee e) \wedge (-e) \wedge (-e) = ((-a) \vee e) \wedge (-e).$$

Последнее равенство означает, что выполняется неравенство $((-a) \vee e) \wedge (-e) \leqslant |e|$. Теперь рассмотрим элемент $-(((-a) \vee e) \wedge (-e)) \in A$. Преобразуем запись этого элемента:

$$-(((-a) \vee e) \wedge (-e)) = (-((-a) \vee e)) \vee e = (a \wedge (-e)) \vee e.$$

Для него выполняются равенства

$$((a \wedge (-e)) \vee e) \vee |e| =$$
$$= (a \wedge (-e)) \vee e) \vee (e \vee (-e)) = ((a \wedge (-e)) \vee (-e)) \vee e = (-e) \vee e = |e|.$$

Последнее равенство означает, что выполняется неравенство $-((-a) \vee e) \wedge (-e) \leqslant |e|$. Следовательно, справедливо неравенство $|((-a) \vee e) \wedge (-e)| \leqslant |e|$, а значит, элемент $((-a) \vee e) \wedge (-e)$ принадлежит идеалу E.

Рассмотрим равенства

$$a + ((-a) \vee e) \wedge (-e) = (a + (-a) \vee e) \wedge (a - e) = (0 \vee (a + e)) \wedge (a - e).$$

Так как по условию выполняется неравенство $a + e \leqslant \mathbf{1}$, то выполняется неравенство $0 \vee (a + e) \leqslant \mathbf{1}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$a + ((-a) \vee e) \wedge (-e) \leqslant \mathbf{1}.$$

Также по условию выполняется неравенство $-a + e \leqslant \mathbf{1}$, откуда $a - e \geqslant -q\mathbf{1}$. В силу того что выполняется неравенство $0 \vee (a + e) \geqslant 0$, выполняется неравенство $(0 \vee (a + e)) \wedge (a - e) \geqslant -q\mathbf{1}$. Это означает, что $a + ((-a) \vee e) \wedge (-e) \geqslant -q\mathbf{1}$. Следовательно, приходим к неравенству $|a + ((-a) \vee e) \wedge (-e)| \leqslant \mathbf{1}$. □

Лемма 18. *Для любого элемента $a \in A$ выполняется равенство $\| |\bar{a}| \| = \|\bar{a}\|$.*

Доказательство. Положим $r_1 \equiv \| |\bar{a}| \|$ и $r_2 \equiv \|\bar{a}\|$. Покажем сначала, что выполняется неравенство $r_1 \leqslant r_2$.

Пусть для некоторого элемента $a+e \in \bar{a}$ выполняется неравенство $|a+e| \leqslant q\mathbf{1}$. По определению модуля выполняются неравенства $a+e \leqslant q\mathbf{1}$ и $-a-e \leqslant q\mathbf{1}$. Так как выполняются равенства

$$(a+e) \wedge (a+e \wedge (-e)) = a + e \wedge e \wedge (-e) = a + e \wedge (-e),$$
$$(-a-e) \wedge (-a+e \wedge (-e)) = -a + (-e) \wedge e \wedge (-e) = -a + e \wedge (-e),$$
$$e \wedge (-e) = -((-e) \vee e) = -|e|,$$

то выполняются неравенства $a - |e| \leqslant q\mathbf{1}$ и $-a - |e| \leqslant q\mathbf{1}$. Это означает, что выполняется неравенство $|a| - |e| \leqslant q\mathbf{1}$. Так как элемент $|a| - |e|$ принадлежит классу $\overline{|a|} = |\bar{a}|$, то $\| |\bar{a}| \| \leqslant q$.

Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Для числа r_2 существует число $q \in \mathbb{Q}$, такое что $|q - r_2| < \varepsilon$. По определению нормы в фактор-пространстве A/E существует такой элемент $e \in E$, что $a + e \in \bar{a}$ и $|a+e| \leqslant q\mathbf{1}$. Отсюда и из предыдущего абзаца получаем неравенства $r_1 \equiv \| |\bar{a}| \| \leqslant q < r_2 + \varepsilon$. В силу произвольности числа ε выполняется неравенство $r_1 \leqslant r_2$.

Теперь покажем, что выполняется неравенство $r_2 \leqslant r_1$. Пусть для некоторого элемента $e \in E$, такого что $|a| + e \in \bar{a}$, выполняется неравенство $| |a| + e| \leqslant q\mathbf{1}$. По определению модуля выполняется неравенство $|a| + e \leqslant q\mathbf{1}$. По предыдущей лемме справедливо неравенство $|a + ((-a) \vee e) \wedge (-e)| \leqslant q\mathbf{1}$. Так как по той же лемме элемент $a + ((-a) \vee e) \wedge (-e)$ принадлежит классу $\bar{a}$, то $r_2 \equiv \|\bar{a}\| \leqslant q$.

Аналогично предыдущему случаю фиксируем число $\varepsilon > 0$. Для числа r_1 существует такое число $q \in \mathbb{Q}$, что $|q - r_1| < \varepsilon$. По определению нормы в фактор-пространстве A/E существует такой элемент e, что $|a| + e \in \overline{|a|}$ и $| |a| + e| \leqslant q\mathbf{1}$. Теперь так же, как и выше, получаем неравенства $r_2 \equiv \|\bar{a}\| \leqslant q < r_1 + \varepsilon$. В силу произвольности числа ε выполняется неравенство $r_2 \leqslant r_1$.

Объединяя полученные неравенства для чисел r_1 и r_2, приходим к тому, что выполняется равенство $r_1 = r_2$. □

Лемма 19. *Пусть E — замкнутый идеал в c-латгруппе A. Тогда фактор-пространство A/E также является c-латгруппой.*

Доказательство. Известно, что фактор-пространство A/E является латгруппой.

Проверим выполнение свойства 1 c-латгруппы в латгруппе A/E. Пусть $\bar{a} \in A/E$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда для элемента $a \in \bar{a}$ по свойству 1 c-латгруппы A существует элемент $b \in A$, для которого выполняется равенство $a = nb$. Отсюда следует, что в латгруппе A/E выполняется равенство $\bar{a} = \overline{nb} = n\bar{b}$.

Проверим свойство 2 c-латгруппы. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in A/E$ и выполняется неравенство $n\bar{a} \leqslant \bar{b}$ для любого числа $n \in \mathbb{N}$. По свойству 4 c-латгруппы A существует число $m \in \mathbb{N}$, такое что $|b| \leqslant m\mathbf{1}$, а следовательно, $|\bar{b}| \leqslant m\bar{\mathbf{1}}$. Отсюда заключаем, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $n\bar{a} \leqslant m\bar{\mathbf{1}}$.

Это неравенство означает, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует такой элемент $e_n \in E$, что выполняется неравенство $a + e_n \leqslant q\mathbf{1}$. По лемме 17 выполняется неравенство $|a + ((-a) \vee e_n) \wedge (-e_n)| \leqslant q\mathbf{1}$, и $((-a) \vee e_n) \wedge (-e_n) \in E$. Другими словами, элемент $a \in A$ является пределом последовательности $((-a) \vee e_n) \wedge (-e_n) \in E \mid n \in \mathbb{N})$. В силу замкнутости идеала E имеем $a \in E$. Следовательно, справедливо равенство $\bar{a} = \bar{0}$.

Справедливость свойств 3 и 4 c-латгруппы для латгруппы A/E напрямую следует из определений супремума и порядка в латгруппе A/E.

Проверим свойство 5 c-латгруппы. Пусть для последовательности $(\bar{a}_n \in A/E \mid n \in \mathbb{N})$ выполняется, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|\bar{a}_p - \bar{a}_q| \leqslant \bar{\mathbf{1}}/k$ для любых $p, q \geqslant n$. Так как выполняются равенства

$$|\bar{a}_p - \bar{a}_q| = |\overline{a_p - a_q}| = \overline{|a_p - a_q|},$$

то предыдущее неравенство принимает вид $\overline{|a_p - a_q|} \leqslant \bar{\mathbf{1}}/k$. Это означает, что выполняется неравенство $|a_p - a_q| + e_k \leqslant \mathbf{1}/k$. По лемме 17 выполняется неравенство

$$|\,|a_p - a_q| + ((-|a_p - a_q|) \vee e_k) \wedge (-e_k)| \leqslant \mathbf{1}/k,$$

и $((-|a_p - a_q|) \vee e_k) \wedge (-e_k) \in E$. Так как элемент

$$|a_p - a_q| + ((-|a_p - a_q|) \vee e_k) \wedge (-e_k) \vee e_k)$$

принадлежит классу $\overline{|a_p - a_q|}$, то выполняется неравенство $\|\,\overline{|a_p - a_q|}\,\| = \|\,|\bar{a}_p - \bar{a}_q|\,\| \leqslant 1/k$. По предыдущей лемме теперь справедливо равенство $\|\,|\bar{a}_p - \bar{a}_q|\,\| = \|\bar{a}_p - \bar{a}_q\|$.

Так как нормированное фактор-пространство A/E является полным относительно нормы, то существует элемент $\bar{a} \in A/E$, такой что для последовательности $(\bar{a}_p \in A \mid p \in \mathbb{N})$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $\|\bar{a} - \bar{a}_p\| < 1/k$ для любых $p \geqslant N$.

Фиксируем произвольное число $p \geqslant N$. По определению нормы в фактор-пространстве A/E существует элемент $e \in E$, такой что $b \equiv a - a_p + e \in \bar{a} - \bar{a}_p$ и $\|b\| < \mathbf{1}/k$. По определению нормы в c-латгруппе A это означает, что выполняется неравенство $|a - a_p + e| \leqslant \mathbf{1}/k$. Последнее неравенство можно переписать в виде двух неравенств $b \leqslant \mathbf{1}/k$ и $-b \leqslant \mathbf{1}/k$. Легко показать, что из этих неравенств следует справедливость неравенств $a - a_p - |e| \leqslant \mathbf{1}/k$ и $-a + a_p - |e| \leqslant \mathbf{1}/k$. Перепишем неравенства в следующем виде: $a - a_p \leqslant \mathbf{1}/k + |e|$ и $-a + a_p \leqslant \mathbf{1}/k + |e|$. Эти неравенства влекут неравенство $|a - a_p| \leqslant \mathbf{1}/k + |e|$ и, следовательно, неравенство $|a - a_p| - |e| \leqslant \mathbf{1}/k$. Так как элемент $-|e|$ принадлежит идеалу E, то это неравенство влечёт неравенство $|\bar{a} - \bar{a_p}| = \overline{|a - a_p|} \leqslant \mathbf{1}/k$.

Итак, мы пришли к тому, что для элемента $\bar{a}$, последовательности $(\bar{a}_p \in A \mid n \in \mathbb{N})$ и любого числа $k \in \mathbb{N}$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|\bar{a} - \bar{a}_p| \leqslant \bar{\mathbf{1}}/k$ для любого $p \geqslant N$. Это и означает выполнение свойства 5 c-латгруппы в латгруппе A/E. □

2.3.2. r-латгруппы и r-расширения

В этом пункте достаточно, чтобы A являлась латгруппой. Пусть Λ — фиксированное упорядоченное множество с наименьшим элементом 0. Для элемента $\lambda \in \Lambda$ и коллекции $(\lambda_\xi \in \Lambda \mid \xi \in \Xi)$ будем писать $\lambda = \mathrm{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$, если $\lambda_\xi \leqslant \lambda$ и для любого $0 < \mu \leqslant \lambda$ существуют такие ξ_0 и ν, что $0 < \nu \leqslant \mu$ и $\nu \leqslant \lambda_{\xi_0}$.

Семейство всех идеалов в латгруппе A будем обозначать через $\mathcal{I}(A)$. Коллекцию идеалов $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{I}(A) \mid \lambda \in \Lambda)$ назовём *измельчением латгруппы* A, если

а) $A_\lambda = A$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$;
б) $\bigcap(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = 0$;
в) $\lambda \leqslant \mu$ влечёт $A_\mu \subset A_\lambda$;
г) $\lambda = \mathrm{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $A_\lambda = \bigcap(A_{\lambda_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

Латгруппу A с измельчением $\mathfrak{A}$ назовём *r-латгруппой* и обозначим через $(A, \mathfrak{A})$. Фактор-гомоморфизм из латгруппы A в латгруппу A/A_λ будем обозначать через $u_\lambda\colon A \to A/A_\lambda$.

Пусть $(C, \mathfrak{C})$ — фиксированная r-латгруппа с фиксированным измельчением $\mathfrak{C} \equiv (C_\lambda \in \mathcal{I}(C) \mid \lambda \in \Lambda)$. Расширение $u\colon C \to A$, где $(A, \mathfrak{A})$ является r-латгруппой с измельчением $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{I}(A) \mid \lambda \in \Lambda)$, назовём *r-расширением r-латгруппы* $(C, \mathfrak{C})$, если $C_\lambda = u^{-1}[A_\lambda]$. Такое расширение обозначим через $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$. *Гомоморфизмом из* $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$ *в* $\hat{u}\colon (C, \mathfrak{C}) \to (\hat{A}, \hat{\mathfrak{A}})$ назовём такой (латгрупповой) гомоморфизм $v\colon A \to \hat{A}$, что $v \circ u = \hat{u}$ и $v[A_\lambda] \subset \hat{A}_\lambda$. Если вдобавок v инъективен и $A_\lambda = v^{-1}[\hat{A}_\lambda]$, то скажем, что *второе r-расширение больше первого*. Этот гомоморфизм назовём *изоморфизмом*, если

1) w является биективным;
2) $v[A_\lambda] = \hat{A}_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

2.3.3. cr-латгруппы и cr-расширения

Здесь мы снова считаем A c-латгруппой. Коллекцию замкнутых идеалов $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(A) \mid \lambda \in \Lambda)$ назовём *измельчением c-латгруппы* A, если

а) $A_\lambda = A$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$;
б) $\bigcap(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = 0$;
в) $\lambda \leqslant \mu$ влечёт $A_\mu \subset A_\lambda$;
г) $\lambda = \mathrm{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $A_\lambda = \bigcap(A_{\lambda_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

c-латгруппу A с измельчением $\mathfrak{A}$ назовём *cr-латгруппой* и обозначим через $(A, \mathfrak{A})$. Фактор-гомоморфизм из c-латгруппы A в c-латгруппу A/A_λ (см. лемму 19) будем обозначать через $u_\lambda\colon A \to A/A_\lambda$.

Пусть $(C, \mathfrak{C})$ — фиксированная cr-латгруппа с фиксированным измельчением $\mathfrak{C} \equiv (C_\lambda \in \mathcal{C}(C) \mid \lambda \in \Lambda)$. c-расширение $u\colon C \to A$, где $(A, \mathfrak{A})$ является cr-латгруппой с измельчением $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(A) \mid \lambda \in \Lambda)$, назовём *cr-расширением*

cr-латгруппы $(C, \mathfrak{C})$, если $C_\lambda = u^{-1}[A_\lambda]$. Такое расширение обозначим через $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$. *Морфизмом из* $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$ *в* $\hat{u}\colon (C, \mathfrak{C}) \to (\hat{A}, \hat{\mathfrak{A}})$ назовём такой (c-латгрупповой) гомоморфизм $v\colon A \to \hat{A}$, что $v \circ u = \hat{u}$ и $v[A_\lambda] \subset \hat{A}_\lambda$. Если вдобавок v инъективен и $A_\lambda = v^{-1}[\hat{A}_\lambda]$, то скажем, что *второе cr-расширение больше первого*.

Для идеала E в A рассмотрим идеал

$$E^d \equiv \{a \in A \mid \forall e \in E\ (|a| \wedge |e| = 0)\}.$$

Идеал E называется *полосой*, если $E = E^{dd}$.

Коллекцию замкнутых идеалов $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(A) \mid \lambda \in \Lambda)$ назовём *насыщенной*, если для любого $\lambda > 0$ и любой собственной полосы E, такой что $E^d \not\subseteq A_\lambda$, существует такое $0 < \mu < \lambda$, что $A_\lambda \cup E \subset A_\mu$.

Лемма 20. *Пусть коллекция* $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(A) \mid \lambda \in \Lambda)$ *обладает свойствами* а)—в) *из определения измельчения и является насыщенной. Тогда коллекция* $\mathfrak{A}$ *является измельчением.*

Доказательство. По теореме 1 мы можем считать, что $A = C(H)$ для некоторого компактного пространства H. Рассмотрим замкнутое подмножество

$$H_\lambda \equiv \{s \in H \mid \forall a \in A_\lambda\ (a(s) = 0)\}.$$

Пусть $\lambda = \operatorname{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$. Предположим, что существует такое открытое множество G, что $G \cap H_\lambda \neq \varnothing$ и $G \cap \bigcup H_{\lambda_\xi} = \varnothing$. Возьмём регулярное замкнутое множество $F = \operatorname{cl}\operatorname{int} F \subset G$, такое что $H_\lambda \cap \operatorname{int} F \neq \varnothing$. Рассмотрим собственную полосу $E \equiv \{a \in A \mid a[F] = \{0\}\}$. Из определения собственной полосы следует, что существует некоторая функция $f \in a$, такая что $f(s) \neq 0$ для некоторого $s \in H_\lambda \cap \operatorname{int} F$, а следовательно, $E^d \not\subseteq A_\lambda$. Так как коллекция $\mathfrak{A}$ насыщенная, то существует такое $0 < \mu \leqslant \lambda$, что $E \cup A_\lambda \subset A_\mu$. Поэтому $H_\mu \subset G \cap H_\lambda$. Так как $\lambda = \operatorname{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$, то существуют такие ν и λ_{ξ_0}, что $0 < \nu \leqslant \mu$ и $\nu \leqslant \lambda_{\xi_0}$ для некоторого ξ. Следовательно, $\varnothing \neq H_\nu \subset H_\mu \cap H_{\lambda_{\xi_0}} = \varnothing$. Из полученного противоречия мы заключаем, что такого множества G не существует. Это означает, что $H_\lambda = \operatorname{cl} \bigcup H_{\lambda_\xi}$.

Пусть $0 \leqslant a \in \bigcap A_{\lambda_\xi}$. Тогда из непрерывности функции a следует, что $a(H_\lambda) = \{0\}$. Рассмотрим функции $a_k \equiv (a - (1/k)\mathbf{1}) \vee 0$ и компактные множества $F_k \equiv \operatorname{cl}\operatorname{coz} a_k$. Так как $H_\lambda \cap F_k \neq \varnothing$, то для любой точки $s \in F_k$ существует функция $b_s \in A_\lambda$, такая что $b_s(s) \neq 0$. Можно считать, что $b_s(r) = 1 \vee a(r)$ для всех r из некоторой окрестности U_s точки s. Выберем из покрытия $(U_s \mid s \in F_k)$ конечное покрытие $(U_i \mid i \in I)$ и рассмотрим функцию $b \equiv \sum(b_i \mid i \in I) \in A_\lambda$. Рассмотрим непрерывную функцию c, такую что $c(s) \equiv a_k(s)/b(s)$ для любого $s \in F_k$ и $c(s) \equiv 0$ для любого $s \notin F_k$. Тогда из того что A_λ является идеалом, следует $a_k = cb \in A_\lambda$. Так как A_λ является замкнутым идеалом и последовательность функций $(a_k \mid k \in \mathbb{N})$ сходится к функции a, имеем $a \in A_\lambda$. Следовательно, $A_\lambda = \bigcap A_{\lambda_\xi}$. □

cr-латгруппу $(A, \mathfrak{A})$ назовём *насыщенной*, если измельчение $\mathfrak{A}$ является насыщенным.

cr-расширение $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A,\mathfrak{A})$ назовём *насыщенным*, если cr-латгруппа $(A,\mathfrak{A})$ является насыщенной.

2.3.4. Элементарные типы полноты. Понятие регулярного пополнения

Пусть A является латгруппой и P и Q — непустые подмножества в A. Пару (P,Q) назовём (*порядковым*) *сечением в* A, если $p \leqslant q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$ и

$$\inf\{q - p \mid p \in P \wedge q \in Q\} = 0$$

в A. Пусть $(A,\mathfrak{A})$ — некоторая r-латгруппа. Пару (P,Q) назовём *r-сечением*, если $p \leqslant q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$ и

$$\inf\{u_\lambda q - u_\lambda p \mid p \in P \wedge q \in Q\} = 0$$

в A/A_λ для каждого $\lambda \in \Lambda$, где u_λ — фактор-гомоморфизм из латгруппы A в латгруппу A/A_λ. Элемент $a \in A$ назовём *r-супремумом* (*r-инфимумом*) множества P (соответственно Q), если $u_\lambda a = \sup u_\lambda[P]$ (соответственно $u_\lambda a = \inf u_\lambda[Q]$) в A/A_λ для любого $\lambda \in \Lambda$, что равносильно тому, что пара $(P,\{a\})$ (соответственно $(\{a\},Q)$) является r-сечением. В этом случае будем писать $a = r\text{-}\sup P$ (соответственно $a = r\text{-}\inf Q$).

Лемма 21. *Любое r-сечение (P,Q) является сечением.*

Доказательство. Пусть $c \in A$ и выполняется неравенство $c \leqslant q - p$ для любых элементов $p \in P$ и $q \in Q$. Тогда выполняется неравенство $u_\lambda c \leqslant u_\lambda q - u_\lambda p$ для любого элемента $\lambda \in \Lambda$. Отсюда следует неравенство $u_\lambda c \leqslant 0$. Поэтому из равенства $u_\lambda(c \vee 0) = u_\lambda 0$ следует, что элемент $c \vee 0$ принадлежит пересечению $\bigcap(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = \{0\}$. Это означает, что $c \vee 0 = 0$, т. е. $c \leqslant 0$. Следовательно, $\inf\{q - p \mid p \in P \wedge q \in Q\} = 0$ в A. □

Следствие. *Если $a = r\text{-}\sup P$ $(a = r\text{-}\inf Q)$, то $a = \sup P$ (соответственно $a = \inf Q$).*

Если пара (P,Q) является сечением, то для любого элемента $a \in A$ следующие три свойства равносильны: $a = \sup P$, $a = \inf Q$ и $a = \sup P = \inf Q$. Если пара (P,Q) является r-сечением, то для любого элемента $a \in A$ следующие три свойства равносильны: $a = r\text{-}\sup P$, $a = r\text{-}\inf Q$ и $a = r\text{-}\sup P = r\text{-}\inf Q$.

Если выполняется равенство $\sup P = \inf Q$, то пара (P,Q) является сечением. Если выполняется равенство $r\text{-}\sup P = r\text{-}\inf Q$, то пара (P,Q) является r-сечением.

Элемент $a \in A$ назовём *границей сечения* (P,Q), если $a = \sup P = \inf Q$. Элемент $a \in A$ назовём *r-границей r-сечения* (P,Q), если $a = r\text{-}\sup P = r\text{-}\inf Q$.

Множество всех r-сечений (P,Q) в A будем обозначать через Cut. Множество всех счётных r-сечений (P,Q) в A будем обозначать через Cut^0. Далее через θ будем обозначать один из символов $\varnothing$ и 0, при этом условимся символ $\varnothing$ в индексе опускать.

r-латгруппу A назовём *полной по типу* Cut^θ, если любое r-сечение (P, Q) в A, такое что $(P, Q) \in \mathrm{Cut}^\theta$, имеет в A r-границу. Исходя из этого определения, r-расширение $u\colon C \rightarrowtail A$ назовём *полным по типу* Cut^θ, если r-латгруппа A является таковой по типу Cut^θ.

r-расширение $u\colon C \rightarrowtail A$ назовём *граничным r-расширением типа* Cut^θ, если любой элемент $a \in A$ является r-границей некоторого r-сечения (P, Q) в A, такого что $(P, Q) \in \mathrm{Cut}^\theta$ и $P, Q \subset u[C]$.

В случае, если A является cr-латгруппой, предыдущее определение примет следующий вид: cr-расширение $u\colon C \rightarrowtail A$ назовём *граничным cr-расширением типа* Cut^θ, если любой элемент $a \in A$ является r-границей некоторого r-сечения (P, Q) в A, такого что $P, Q \subset u[C]$.

Общее понятие cr-пополнения было введено в [2]. Это понятие обслуживает многие различные классические cr-расширения cr-латгруппы C всех ограниченных непрерывных функций на тихоновском пространстве T (см. там же).

Однако для расширения Римана $C \to \mathrm{RI}_\mu/\mathcal{LN}_\mu$ автором было введено новое более простое и более алгебраическое понятие регулярного *r-пополнения*.

Пусть отображение $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$ является некоторым r-расширением r-латгруппы $(C, \mathfrak{C})$. Это r-расширение назовём *регулярным*, если для любой коллекции $(c_i \in C \mid i \in I)$ и для любого элемента $c \in C$ равенства $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$ в C и $uc = r\text{-}\sup(uc_i \in A \mid i \in I)$ в A равносильны.

Регулярное r-расширение $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$ назовём *регулярным r-пополнением типа* Cut^θ *r-латгруппы* $(C, \mathfrak{C})$, если:

1) оно является граничным по типу Cut^θ;
2) оно является полным по типу Cut^θ.

Далее будет показано, что общее расширение Римана

$$(C, \mathfrak{C}_\mu) \to (\mathrm{RI}_\mu/\mathcal{LN}_\mu, \mathfrak{A})$$

для достаточно произвольной радоновской меры μ на тихоновском пространстве T является регулярным r_μ-пополнением типа Cut^θ r_μ-латгруппы $(C, \mathfrak{C}_\mu)$. В конце статьи будет доказано, что регулярное r_μ-пополнение типа Cut^θ является единственным.

В отличие от cr_μ-пополнения типа $Z^{\theta c}|^a Z^{\theta c}$ из [2], регулярное r_μ-пополнение типа Cut^θ, во-первых, не требует понятия cr-латгруппы (необходимо только понятие r-латгруппы), а во-вторых, доказательство единственности проводится чисто алгебраическим путём.

2.3.5. Функционально-факторные cr-латгруппы

Далее F является c-подлатгруппой c-латгруппы всех ограниченных $\mathbb{R}$-значных функций на множестве T с единичным элементом $\mathbf{1}$. Будем называть её *функциональной c-латгруппой на множестве T*.

Множество всех подмножеств множества T обозначим через $\mathcal{P}$. Идеал $\mathcal{I}$ в решётке $\mathcal{P}$ будем называть *идеалом на множестве T*.

Функции f и g из F называются *эквивалентными относительно идеала* $\mathcal{I}$ ($\equiv$ *$\mathcal{I}$-эквивалентными*), если $\{t \in T \mid |f(t) - g(t)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ для любого $\varepsilon > 0$. Будем обозначать через $f \sim g \bmod \mathcal{I}$. Множество классов эквивалентности $\bar{f} \equiv \bar{f} \bmod \mathcal{I}$ всех функций $f \in F$ обозначим через $F/\mathcal{I}$. Легко показать, что множество классов эквивалентности $F/\mathcal{I}$ можно также описать как фактор-латгруппу по идеалу $E \equiv \{f \in F \mid \forall n \in \mathbb{N}\ (\operatorname{coz}_n |f| \in \mathcal{I})\}$ в c-латгруппе F. В частности, для рассмотренных выше функций f и g функция $h \equiv f - g$ принадлежит идеалу E и справедливо равенство $f = g + h$.

Лемма 22. *Идеал E является замкнутым в c-латгруппе F.*

Доказательство. Пусть для некоторого элемента $f \in F$ и некоторой последовательности $(f_n \in E \mid n \in \mathbb{N})$ выполняется условие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для любого $N \geqslant n$ справедливо неравенство $|f - f_n| \leqslant \mathbf{1}/k$. Рассмотрим произвольное число $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим конуль-множество $\operatorname{coz}_m f \subset T$. Для этого числа зафиксируем чётное число $k = 2m \in \mathbb{N}$. По условию для него существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|f - f_n| \leqslant \mathbf{1}/k$. Зафиксируем подходящее число n. Тогда предыдущее неравенство означает, что выполняются неравенства $f \leqslant f_n + \mathbf{1}/k$ и $-f \leqslant -f_n + \mathbf{1}/k$, или, в другом виде, $f - \mathbf{1}/k \leqslant f_n$ и $-f - \mathbf{1}/k \leqslant -f_n$. Вычитая из правых и левых частей неравенств $1/k$, приходим к неравенствам

$$f - \mathbf{2}/k \leqslant f_n - \mathbf{1}/k, \quad -f - \mathbf{2}/k \leqslant -f_n - \mathbf{1}/k.$$

Эти неравенства означают, что справедливы включения

$$\operatorname{coz}_m f = \operatorname{coz}_{k/2} f \subset \operatorname{coz}_k f_n, \quad \operatorname{coz}_m(-f) = \operatorname{coz}_{k/2}(-f) \subset \operatorname{coz}_k(-f_n).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{coz}_m |f| = \operatorname{coz}_m(-f) \cup \operatorname{coz}_m f \subset \operatorname{coz}_k f_n \cup \operatorname{coz}_k(-f_n) = \operatorname{coz}_k |f_n| \in \mathcal{I}.$$

Следовательно, выполняется свойство $\operatorname{coz}_m |f| \in \mathcal{I}$. В силу произвольности числа $m \in \mathbb{N}$ функция f принадлежит идеалу E. ☐

Теперь из леммы 19 сразу следует, что фактор-пространство F/E является c-латгруппой, а в предыдущих обозначениях множество классов эквивалентности $F/\mathcal{I}$ является c-латгруппой. c-латгруппу $F/\mathcal{I}$ будем называть *функционально-факторной c-латгруппой на множестве T*.

Далее будем рассматривать фиксированное тихоновское ($\equiv$ вполне регулярное) топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$ с семейством $\mathcal{G}$ всех открытых множеств. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех замкнутых множеств пространства $(T, \mathcal{G})$. Коллекцию $\mathfrak{T} \equiv (T_\lambda \in \mathcal{F} \mid \lambda \in \Lambda)$ назовём *прикрытием пространства* $(T, \mathcal{G})$, если:

а) $T_\lambda = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$;
б) $\bigcup(T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ плотно в T;
в) $\lambda \leqslant \mu$ влечёт $T_\lambda \subset T_\mu$;
г) $\lambda = \operatorname{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $T_\lambda = \operatorname{cl} \bigcup(T_{\lambda_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

Пространство $(T, \mathcal{G})$ с прикрытием $\mathfrak{T}$ назовём *s-пространством* и обозначим через $(T, \mathcal{G}, \mathfrak{T})$.

Коллекцию $\mathfrak{T} \equiv (T_\lambda \in \mathcal{F} \mid \lambda \in \Lambda)$ назовём *насыщенной*, если для любого $T_\lambda \neq \varnothing$ и любого множества $G \in \mathcal{G}$, пересекающего T_λ, существует $T_\mu \neq \varnothing$, такое что $T_\mu \subset T_\lambda \cap G$ и $\mu \leqslant \lambda$.

Лемма 23. *Пусть коллекция* $\mathfrak{T} \equiv (T_\lambda \in \mathcal{F} \mid \lambda \in \Lambda)$ *обладает свойствами* а)—в) *из определения прикрытия и является насыщенной. Тогда коллекция* $\mathfrak{T}$ *является прикрытием.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \operatorname{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$. Тогда $\bigcup(T_{\lambda_\xi} \mid \xi \in \Xi) \subset T_\lambda$. Пусть $G \in \mathcal{G}$ и $G \cap T_\lambda \neq \varnothing$. По условию существует $\mu \leqslant \lambda$, такое что $T_\mu \subset G$. Поэтому существуют такие ξ и ν, что $0 < \nu \leqslant \mu$ и $\nu \leqslant \lambda_\xi$. Теперь из $\varnothing \neq T_\nu \subset G \cap T_{\lambda_\xi}$ следует, что $T_\lambda = \operatorname{cl} \bigcup(T_{\lambda_\xi} \mid \xi \in \Xi)$. □

s-пространство $(T, \mathcal{G}, \mathfrak{T})$ назовём *насыщенным*, если прикрытие $\mathfrak{T}$ является насыщенным.

Пусть $\mathcal{I}$ — некоторый идеал на множестве T. Тройку $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, F)$ назовём *согласованной*, если:

а) $T_\lambda \notin \mathcal{I}$ для любого $0 \neq \lambda \in \Lambda$;

б) для любых $n \in \mathbb{N}$ и $f \in F$, таких что $\operatorname{coz}_n f \notin \mathcal{I}$, существует $\lambda \in \Lambda$, для которого $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_{2n} f \notin \mathcal{I}$;

в) для любых $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda$, $f \in F$, таких что $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_n f \notin \mathcal{I}$, существует такое $\mu \in \Lambda$, что $0 < \mu \leqslant \lambda$ и $T_\mu \setminus \operatorname{coz}_{2n} f \in \mathcal{I}$.

Рассмотрим коллекцию $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(F/\mathcal{I}) \mid \lambda \in \Lambda)$, где

$$A_\lambda \equiv \{\bar{f} \in F/\mathcal{I} \mid f(t)\chi(T_\lambda)(t) \sim 0 \bmod \mathcal{I}\} = \{\bar{f} \in F/\mathcal{I} \mid \forall n \ (T_\lambda \cap \operatorname{coz}_n f \in \mathcal{I})\}.$$

Лемма 24. *Пусть* $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, F)$ — *согласованная тройка. Тогда коллекция* $\mathfrak{A} \equiv$ $\equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(F/\mathcal{I}) \mid \lambda \in \Lambda)$ *является насыщенным измельчением c-латгруппы* $F/\mathcal{I}$.

Доказательство. Проверим свойство а) из определения измельчения. Пусть $A_\lambda = F/\mathcal{I}$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда из $\bar{\mathbf{1}} \in A_\lambda$ следует $T_\lambda \in \mathcal{I}$. Следовательно, $\lambda = 0$.

Теперь проверим свойство б) из определения измельчения. Пусть $p \equiv \bar{f} \in$ $\in \bigcap A_\lambda$, и предположим, что выполняется неравенство $p \neq \bar{\mathbf{0}}$. Тогда существует такое n, что справедливо свойство $\operatorname{coz}_n f \notin \mathcal{I}$. Следовательно, по свойству б) прикрытия существует такое $\lambda \in \Lambda$, что выполняется свойство $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_{2n} f \notin \mathcal{I}$. Поэтому $p \notin A_\lambda$, что неверно. Значит, справедливо равенство $p = 0$.

Проверим свойство в) из определения измельчения. Пусть выполняется неравенство $\lambda \leqslant \mu$ и $p \in \mathfrak{A}_\mu$. Тогда по свойству в) прикрытия справедливо вложение $T_\lambda \subset T_\mu$, а следовательно, из вложения $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_n f \subset T_\mu \cap \operatorname{coz}_n f \in \mathcal{I}$ следует, что $p \in A_\lambda$. Поэтому справедливо вложение $\mathfrak{A}_\mu \subset A_\lambda$.

Покажем, что коллекция $\mathfrak{A}$ является насыщенной. Пусть идеал E в $F/\mathcal{I}$ — собственная полоса и $E^d \nsubseteq A_\lambda$. Тогда существует элемент $\bar{p} \in E^d \setminus A_\lambda$. Для него существует такое число l, что справедливо свойство $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_l p \notin \mathcal{I}$. По свойству в) согласованности тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, F)$ существует такое μ, что $0 < \mu \leqslant \lambda$ и выполняется свойство $T_\mu \setminus \operatorname{coz}_m p \in \mathcal{I}$, где $m = 2l$. По свойству в) прикрытия $\mathfrak{T}$ выполняется вложение $T_\mu \subset T_\lambda$, а следовательно, справедливо вложение $A_\lambda \subset A_\mu$. Остаётся показать, что имеет место вложение $E \subset A_\mu$.

Пусть $\bar{q} \in E$. Тогда равенство $\bar{p}\bar{q} = 0$ означает, что

$$I_n \equiv \{t \in T \mid |p(t)q(t)| > 1/n\} \in \mathcal{I}$$

для любого числа $n \in \mathbb{N}$. По определению идеала A_μ нам надо показать, что множество $T_\mu \cap \operatorname{coz}_n q$ принадлежит идеалу $\mathcal{I}$. Так как $T_\mu \setminus \operatorname{coz}_m p \in \mathcal{I}$, достаточно показать, что $T_\mu \cap \operatorname{coz}_n q \cap \operatorname{coz}_m p \in \mathcal{I}$. Если $t \in T_\mu \cap \operatorname{coz}_n q \cap \operatorname{coz}_m p$, то $|q(t)p(t)| > 1/nm$ означает, что $t \in I_{nm}$. Следовательно, справедливо свойство $T_\mu \cap \operatorname{coz}_n q \cap \operatorname{coz}_m p \subset I_{nm} \in \mathcal{I}$. Поэтому выполняется свойство $T_\mu \cap \operatorname{coz}_n q \in \mathcal{I}$, а это означает, что имеет место вложение $A_\lambda \cup E \subset A_\mu$. Поэтому коллекция $\mathfrak{A}$ является насыщенной.

По лемме 20 коллекция $\mathfrak{A}$, обладающая свойствами а)—в) из определения измельчения и являющаяся насыщенной, является измельчением.

Итак, коллекция $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(F/\mathcal{I}) \mid \lambda \in \Lambda)$ является насыщенным измельчением c-латгруппы $F/\mathcal{I}$. □

Далее будем рассматривать фиксированную c-латгруппу $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных ограниченных функций на пространстве $(T, \mathcal{G})$. c-латгруппу F назовём *широкой*, если $C \subset F$. Идеал $\mathcal{I}$ на T назовём *тощим*, если непустые открытые множества из T ему не принадлежат. Рассмотрим гомоморфизм $u\colon C \to F/\mathcal{I}$, такой что $uc = \bar{c}$. Если c-латгруппа F является широкой и идеал $\mathcal{I}$ является тощим, то гомоморфизм u является c-расширением c-латгруппы C. c-расширение, соответствующее широкой c-латгруппе F и тощему идеалу $\mathcal{I}$, будем называть *функционально-факторным c-расширением*. При $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ слово «факторный» будем опускать.

cr-латгруппу $(F/\mathcal{I}, \mathfrak{A})$, соответствующую согласованной тройке $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, F)$ будем называть *функционально-факторной cr-латгруппой на s-пространстве* T. При $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ слово «факторный» будем опускать.

Идеал $\mathcal{I}$ на s-пространстве T назовём *s-тощим*, если непустые открытые множества из любого подпространства T_λ не принадлежат идеалу $\mathcal{I}$.

Пусть $(C, \mathfrak{C})$ — cr-латгруппа s-пространства T, соответствующая согласованной тройке $(\mathfrak{T}, \mathcal{I} = \{\varnothing\}, F = C)$. Пусть $(F/\mathcal{I}, \mathfrak{A})$ — cr-латгруппа, соответствующая согласованной тройке $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, F)$ и F — широкая c-латгруппа. Рассмотрим гомоморфизм $u\colon C \to F/\mathcal{I}$, такой что $uc \equiv \bar{c}$.

Лемма 25. *Если идеал $\mathcal{I}$ s-тощий, то гомоморфизм $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (F/\mathcal{I}, \mathfrak{A})$ — cr-расширение.*

Доказательство. Ясно, что $uC_\lambda \subset A_\lambda$.

Пусть $uc \in A_\lambda$. Тогда из $G_n \equiv T_\lambda \cap \operatorname{coz}_n c \in \mathcal{I}$ следует, что $G_n = \varnothing$. Поэтому $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_n c = \varnothing$, т. е. $c \in C_\lambda$. □

cr-расширение $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (F/\mathcal{I},\mathfrak{A})$, соответствующее согласованной тройке $(\mathfrak{T},\mathcal{I},F)$, широкой c-латгруппе F и s-тощему идеалу $\mathcal{I}$, будем называть *функционально-факторным cr-расширением*. При $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ слово «факторный» будем опускать.

2.3.6. Функционально-факторные cr-расширения, порождаемые равномерными функциями

Опишем теперь новый способ построения cr-расширений с помощью равномерных функций малого колебания относительно решёток множеств.

Пусть $\mathcal{S}$ — произвольная подрешётка множеств в решётке $\mathcal{P}$. Напомним, что функция $f\colon T \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{S}$-измеримой*, если $f^{-1}[G] \in \mathcal{S}$ для любого открытого множества G из $\mathbb{R}$. Множество всех таких функций на T обозначим через $M(T,\mathcal{S})$. Множество $M(T,\mathcal{S})$ является линейным решёточным пространством, если $\mathcal{S}$ является σ-аддитивным мультипликативным ансамблем с краями $\varnothing$ и T. Это условие на $\mathcal{S}$ является очень стеснительным. Поэтому введём другое семейство функций на T.

Функцию $f\colon T \to \mathbb{R}$ назовём *$\mathcal{S}$-равномерной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\sigma \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T, что колебание

$$\omega(f,S_i) \equiv \sup(|f(s) - f(t)| \mid s,t \in S_i)$$

функции f на каждом множестве S_i меньше ε. Семейство всех $\mathcal{S}$-равномерных функций на T обозначим через $U(T,\mathcal{S})$. Оно является линейным решёточным пространством, если $\mathcal{S}$ — мультипликативный ансамбль с краями $\varnothing$ и T. Ясно, что $M_b(T,\mathcal{S}) \subset U(T,\mathcal{S})$.

Рассмотрим на пространстве $(T,\mathcal{G})$ основу $\mathcal{G}^0$ конуль-множеств $\operatorname{coz} c$ всех непрерывных функций $c \in C$. Решётку $\mathcal{S}$ на T назовём *широкой*, если $\mathcal{S}$ содержит основу $\mathcal{G}^0$. Если $\mathcal{S}$ — широкая решётка, то функциональная c-латгруппа $U(T,\mathcal{S})$ тоже является широкой, т. е. содержит c-латгруппу C.

Пусть T является s-пространством, $\mathcal{I}$ — идеал на T и $\mathcal{S}$ — решётка на T. Тройку $(\mathfrak{T},\mathcal{I},\mathcal{S})$ назовём *согласованной*, если:

а) $T_\lambda \notin \mathcal{I}$ для любого $0 \neq \lambda \in \Lambda$;

б) для любого $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{I}$ существует такое $\lambda \in \Lambda$, что $T_\lambda \cap S \notin \mathcal{I}$;

в) для любых $\lambda \in \Lambda$ и $S \in \mathcal{S}$, таких что $T_\lambda \cap S \notin \mathcal{I}$, существует такое $\mu \in \Lambda$, что $0 < \mu \leqslant \lambda$ и $T_\mu \setminus S \in \mathcal{I}$.

Лемма 26. *Если тройка $(\mathfrak{T},\mathcal{I},\mathcal{S})$ согласованная, то тройка $(\mathfrak{T},\mathcal{I},U(T,\mathcal{S}))$ тоже согласованная.*

Доказательство. Для функции $f \in U(T,\mathcal{S})$ существует последовательность конечных покрытий $\mathcal{S}_n \equiv (S_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I)$, таких что выполняется неравенство $\omega(f,S_{ni}) < 1/n$. Рассмотрим множества

$$S_n \equiv \bigcup\{S_{2ni} \in \mathcal{S} \mid S_{2ni} \cap \operatorname{coz}_n f \neq \varnothing\} \in \mathcal{S}.$$

Если $t \in S_n$, то $t \in S_{2ni}$ для некоторого i, такого что существует некоторая точка $s \in S_{2ni} \cap \operatorname{coz}_n f$. Если справедливо неравенство $f(s) > 1/n$, то выполняется неравенство $f(t) > 1/2n$. Если же имеет место неравенство $f(s) < -1/n$, то выполняется неравенство $f(t) < -1/2n$. Значит, справедливо неравенство $|f(t)| > 1/2n$. Следовательно, имеют место вложения $\operatorname{coz}_n f \subset S_n \subset \operatorname{coz}_{2n} f$.

Теперь проверим свойства согласованности для тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, U(T, \mathcal{S}))$. Свойство а) для неё выполняется, так как выполняется свойство а) согласованности тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, \mathcal{S})$.

Проверим свойство б) согласованности для тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, U(T, \mathcal{S}))$. Пусть выполняется свойство $\operatorname{coz}_n f \notin \mathcal{I}$. Так как справедливо вложение $\operatorname{coz}_n f \subset S_n$, то $S_n \notin \mathcal{I}$. Тогда из свойства б) согласованности тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, \mathcal{S})$ следует, что существует такое $\lambda \in \Lambda$, что имеет место свойство $T_\lambda \cap S_n \notin \mathcal{I}$. Из того, что выполняется вложение $S_n \subset \operatorname{coz}_{2n} f$, следует, что $\operatorname{coz}_{2n} f \notin \mathcal{I}$.

Проверим свойство в) согласованности для тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, U(T, \mathcal{S}))$. Пусть справедливо свойство $T_\lambda \cap \operatorname{coz}_n f \notin \mathcal{I}$. Так как имеет место вложение $\operatorname{coz}_n f \subset$ $\subset S_n$, выполняется свойство $T_\lambda \cap S_n \notin \mathcal{I}$. Тогда из свойства в) согласованности тройки $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, \mathcal{S})$ следует, что существует такое $\mu \in \Lambda$, что $0 < \mu \leqslant \lambda$ и $T_\mu \backslash S_n \in \mathcal{I}$. Из того, что имеет место вложение $S_n \subset \operatorname{coz}_{2n} f$, следует, что справедливо свойство $T_\mu \setminus \operatorname{coz}_{2n} f \in \mathcal{I}$.

Итак, тройка $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, U(T, \mathcal{S}))$ является согласованной. □

Если $\mathcal{S}$ — широкая решётка, $\mathcal{I}$ — s-тощий идеал и тройка $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, \mathcal{S})$ является согласованной, то по лемме 26 тройка $(\mathfrak{T}, \mathcal{I}, U(T, \mathcal{S}))$ является согласованной, поэтому по лемме 25 гомоморфизм $u\colon C \to U(T, \mathcal{S})/\mathcal{I}$, такой что $uc \equiv \bar{c}$, является функционально-факторным cr-расширением $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (U(T, \mathcal{S})/\mathcal{I}, \mathfrak{U})$.

3. cr_μ-латгруппы функций, интегрируемых по Риману

3.1. Функциональное описание расширения Римана

3.1.1. Основные понятия

В этом пункте кратко излагается функциональное описание семейства функций, интегрируемых по Риману, данное в [4].

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство и μ — положительная ограниченная радоновская мера на T, т. е. σ-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, a] \subset \mathbb{R}$, определённая на σ-алгебре $\mathcal{M}$, содержащей σ-алгебру $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств пространства T, и такая, что

$$\mu M = \sup\{\mu K \mid K \subset B \wedge K \text{ — компактное множество}\}$$

для любого $M \in \mathcal{M}$. Через $\mathcal{LN}_\mu$ обозначим σ-идеал всех μ-пренебрежимых множеств из T.

При определении интеграла Римана для топологического измеримого пространства $(T,\mathcal{G},\mu)$ естественным представляется подход через μ-жордановы множества. Множество P из T называется *μ-жордановым*, если $\mathrm{fr}_T(P)\in\mathcal{LN}_\mu$, где $\mathrm{fr}_T(P)\equiv\mathrm{cl}_T(P)\setminus\mathrm{int}_T P$ — топологическая граница множества P в пространстве $(T,\mathcal{G})$. Семейство всех μ-жордановых множеств из T обозначим через $\mathcal{J}(T,\mathcal{G},\mu)$. Оно является булевой алгеброй относительно теоретико-множественных операций. Покрытие $(X_\alpha\subset T\mid\alpha\in A)$ множества T называется *разбиением* T, если $X_\alpha\cap X_\beta=\varnothing$ для любых $\alpha\neq\beta$ из A. Рассмотрим множество $\Gamma\equiv\Gamma(T,\mathcal{G},\mu)$ всех конечных *μ-жордановых разбиений* $\pi\equiv(P_k\in\mathcal{J}(T,\mathcal{G},\mu)\mid k\in K)$ *множества* T, состоящих из μ-жордановых множеств.

Рассмотрим множество $\Delta\equiv\Delta(T,\mathcal{G},\mu)$ всех конечных разбиений $\varkappa\equiv(Q_k\in\mathcal{G}\cup\mathcal{LN}_\mu\mid k\in K)$ множества T, состоящих из открытых множеств и μ-пренебрежимых множеств. Разбиение $\varkappa$ является μ-жордановым. Действительно, рассмотрим множества $K'\equiv\{k\in K\mid Q_k\in\mathcal{G}\wedge Q_k\notin\mathcal{LN}_\mu\}$ и $K''\equiv\{k\in K\mid Q_k\in\mathcal{LN}_\mu\}$. Если $k\in K'$, то

$$\mathrm{fr}(Q_k)=\mathrm{cl}\,Q_k\setminus Q_k\subset T\setminus\bigcup(Q_k\in\mathcal{G}\mid k\in K')=\bigcup(Q_k\in\mathcal{LN}_\mu\mid k\in K'')\in\mathcal{LN}_\mu.$$

Если $k\in K''$, то

$$\mathrm{fr}(Q_k)=\mathrm{cl}\,Q_k\setminus\mathrm{int}\,Q_k\subset\mathrm{cl}\,Q_k\subset T\setminus\bigcup(Q_k\in\mathcal{G}\mid k\in K')\in\mathcal{LN}_\mu.$$

Назовём это μ-жорданово разбиение $\varkappa\in\Delta$ *простым*. Каждому μ-жорданову разбиению $\pi\in\Gamma$ ставится в соответствие простое μ-жорданово разбиение $\varkappa\equiv(G_k,N_k\mid k\in K)$, где $G_k\equiv\mathrm{int}\,P_k\in\mathcal{G}$ и $N_k\equiv P_k\setminus G_k\in\mathcal{LN}_\mu$.

Из всего сказанного выше следует, что для определения интеграла Римана для пространства $(T,\mathcal{G},\mu)$ нет необходимости использовать сложную булеву алгебру $\mathcal{J}(T,\mathcal{G},\mu)$ и множество Γ всех μ-жордановых разбиений π, а достаточно рассматривать только его подмножество Δ простых μ-жордановых разбиений $\varkappa$.

Скажем, что разбиение $\lambda\equiv(R_l\mid l\in L)\in\Delta$ является *более тонким*, чем разбиение $\varkappa\equiv(Q_k\mid k\in K)\in\Delta$ (обозначение $\lambda\geqslant\varkappa$), если для любого $k\in K$ существует $L'\subset L$, такое что $Q_k=\bigcup(R_l\mid l\in L')$.

Относительно этого порядка Δ является направленным вверх. Для каждого разбиения $\varkappa\in\Delta$ рассмотрим *нижнюю*

$$s(f,\varkappa)\equiv\sum\big(\inf(f(t)\mid t\in Q_k)\mu Q_k\;\big|\;k\in K\big)$$

и *верхнюю*

$$S(f,\varkappa)\equiv\sum\big(\sup(f(t)\mid t\in Q_k)\mu Q_k\;\big|\;k\in K\big)$$

суммы Дарбу ограниченной функции $f\colon T\to\mathbb{R}$. Ясно, что $(s(f,\varkappa)\mid\varkappa\in\Delta)$ возрастает, $(S(f,\varkappa)\mid\varkappa\in\Delta)$ убывает и $s(f,\varkappa)\leqslant S(f,\varkappa)$.

Ограниченная функция $f\colon T\to\mathbb{R}$ называется *μ-интегрируемой по Риману на топологическом измеримом пространстве* $(T,\mathcal{G},\mu)$, если

$$\sup(s(f,\varkappa)\mid\varkappa\in\Delta)=\inf(S(f,\varkappa)\mid\varkappa\in\Delta).$$

Если функция f является μ-интегрируемой по Риману на $(T, \mathcal{G}, \mu)$, то число

$$\sup(s(f,\varkappa) \mid \varkappa \in \Delta) = \inf(S(f,\varkappa) \mid \varkappa \in \Delta)$$

называется *μ-интегралом Римана от функции f по пространству* $(T, \mathcal{G}, \mu)$ и обозначается $i_\mu f$.

Покажем, что данное определение является обобщением классического определения интеграла Римана

$$I_T f \equiv \int\limits_T \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

для измеримого по Жордану подмножества T в $\mathbb{R}^n$ с мерой Жордана m (см. [6, § 12.6, 12.7]).

Пусть λ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, порождённая объёмом параллелепипедов

$$V(\Pi(|x_i, y_i| \mid i = 1, \ldots, n)) \equiv \Pi(y_i - x_i \mid i = 1, \ldots, n),$$

где $|x_i, y_i|$ — произвольный отрезок вида $[x_i, y_i]$, $]x_i, y_i[$, $[x_i, y_i[$ или $]x_i, y_i]$ для $x_i \leqslant y_i$ из $\mathbb{R}$. Пусть $\mu \equiv \lambda|T$ — мера Лебега на T.

Для определения μ-интеграла Римана $i_\mu f$ на топологическом измеримом пространстве $(T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)|T, \mu)$ используются простые μ-жордановы множества $Q \in \mathcal{G}(R^n)|T \cup \mathcal{LN}_\mu$ этого пространства. Для определения классического интеграла Римана $I_T f$ используются измеримые по Жордану множества J топологического измеримого пространства $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n), m)$ (см. [6, § 12.2]). Совершенно не очевидно, что простые μ-жордановы множества Q являются измеримыми по Жордану множествами в пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n), m)$. Поэтому для доказательства равносильности этих определений приходится проводить достаточно тонкое топологическое рассмотрение.

Семейство всех множеств, измеримых по Жордану на пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n), m)$, обозначим через $\mathcal{J}$.

Теорема 2. *Пусть T — измеримое по Жордану* (см. [6, § 12.5]) *подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой ограниченной функции $f\colon T \to \mathbb{R}$ следующие утверждения равносильны*:

1) *f является $\lambda|T$-интегрируемой по Риману* (*в смысле предыдущего определения*) *на топологическом измеримом пространстве $(T, \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)|T, \lambda|T)$*;
2) *f является интегрируемой по Риману* (*в классическом смысле, см.* [6, § 12.6]).

При выполнении одного из этих равносильных условий справедливо равенство интегралов

$$i_\mu f = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \equiv I_f.$$

Множество всех ограниченных функций, μ-интегрируемых по Риману на пространстве $(T, \mathcal{G}, \mu)$, обозначим $\mathrm{RI}(T, \mathcal{G}, \mu)$ или, короче, RI_μ. Это множество является линейным решёточным пространством. Рассмотрим его фактор-множество $R_\mu \equiv \mathrm{RI}_\mu / \mathcal{LN}_\mu$. Оно тоже является линейным решёточным пространством.

Класс эквивалентности функции $f \in \mathrm{RI}_\mu$ относительно идеала $\mathcal{LN}_\mu$ будем обозначать через $\bar{f} \bmod \mathcal{LN}_\mu$.

Множество всех непрерывных ограниченных функций на пространстве $(T, \mathcal{G})$ обозначим через C. Рассмотрим отображение $u\colon C \to R_\mu$, такое что $uc \equiv \bar{c} \bmod \mathcal{LN}_\mu$. Функционально-факторное расширение $u\colon C \rightarrowtail \mathrm{RI}_\mu/\mathcal{LN}_\mu$ называется *расширением Римана линейного решёточного пространства* C, а также *латгруппы* C.

3.1.2. Описание функций, μ-интегрируемых по Риману

Множество *конуль-множеств* $\operatorname{coz} f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ всех непрерывных функций f на $(T, \mathcal{G})$ обозначим через $\mathcal{G}^0$. Рассмотрим *единичную* функцию $\mathbf{1}\colon T \to \{1\}$. Тогда $x\mathbf{1}\colon T \to \{x\}$ — постоянная функция, принимающая значение $x \in \mathbb{R}$.

σ-идеал $\mathcal{LN}_\mu$ является слишком большим для семейства RI_μ. Поэтому введём более узкий идеал множеств, являющийся «родным» для функций, μ-интегрируемых по Риману.

μ-измеримое множество X будем называть *множеством полной меры*, если $T \setminus X \in \mathcal{LN}_\mu$.

Семейство $\{U \in \mathcal{G}^0 \mid T \setminus U \in \mathcal{LN}_\mu\}$ всех конуль-множеств полной меры обозначим через $\mathcal{U}^0_\mu$. Оно порождает идеал множеств

$$\mathcal{N}_\mu \equiv \{N \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}^0_\mu \ (N \subset T \setminus U)\}.$$

Этот идеал не является σ-идеалом. Ясно, что $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{LN}_\mu$.

Множество X из T назовём *S_μ-множеством*, если $X = G \cup N$ для некоторых множеств $G \in \mathcal{G}^0$ и $N \in \mathcal{N}_\mu$. Семейство всех S_μ-множеств из T обозначим $\mathcal{ZP}_\mu$. Оно является решёткой относительно объединений и пересечений, а также содержит края $\varnothing$ и T.

Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное семейство множеств на множестве T. Напомним, что функция $f\colon T \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{S}$-измеримой*, если $f^{-1}[G] \in \mathcal{S}$ для любого открытого множества G из $\mathbb{R}$. Множество всех таких функций на T обозначим через $M(T, \mathcal{S})$. Эти функции были введены Лебегом в начале XX века. Множество $M(T, \mathcal{S})$ является линейным решёточным пространством, если $\mathcal{S}$ — σ-аддитивный мультипликативный ансамбль с краями $\varnothing$ и T. Это условие на $\mathcal{S}$ является очень стеснительным. Поэтому в [11] В. К. Захаровым было введено другое семейство функций на T. Функцию $f\colon T \to \mathbb{R}$ назовём *$\mathcal{S}$-равномерной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T, такое что колебание

$$\omega(f, S_i) \equiv \sup\{|f(s) - f(t)| \mid s, t \in S_i\}$$

функции f на каждом множестве S_i меньше ε. Семейство всех $\mathcal{S}$-равномерных функций на T обозначим через $U(T, \mathcal{S})$. Оно является линейным решёточным пространством, если $\mathcal{S}$ — мультипликативный ансамбль с краями $\varnothing$ и T. Ясно, что $M_b(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S})$.

Имея решёточное семейство $\mathcal{ZP}_\mu$ всех S_μ-множеств на T, мы можем рассмотреть линейное решёточное пространство $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$ всех равномерных функций относительно этого семейства.

Лемма 27. *Пусть* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют конуль-множество полной меры* $U \in \mathcal{U}_\mu^0$ *и его конечное покрытие* $(G_k \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K)$, *такие что* $\omega(f, G_k) < \varepsilon$.

Поскольку идеал $\mathcal{N}_\mu$ не является σ-идеалом, нам потребуется несколько иное определение эквивалентности функций относительно этого идеала.

Функции f и g на T называются *эквивалентными относительно идеала* $\mathcal{N}_\mu$, если $\{t \in T \mid |f(t) - g(t)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{N}_\mu$ для любого $\varepsilon > 0$. Обозначим это отношение эквивалентности так: $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Следствие. *Пусть* $f, g \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $f \sim g \bmod \mathcal{LN}_\mu$;
2) $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Таким образом, $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)/LN_\mu = U(T, \mathcal{ZP}_\mu)/\mathcal{N}_\mu$.

Следствие. *Пусть* f *и* g *— ограниченные функции на* T *и* $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$. *Если* $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$, *то* $g \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Лемма 28. *Пусть* $f \in M(T, \mathcal{LM}_\mu)$ *— ограниченная функция, принимающая значения в отрезке* $[-z, z]$. *Тогда множество*

$$\mathcal{X} \equiv \{f^{-1}(y) \mid y \in [-z, z] \wedge f^{-1}(y) \notin \mathcal{LN}_\mu\}$$

счётное.

Следствие. *В условиях предыдущей леммы множество*

$$\mathcal{Y} \equiv \{y \in [-z, z] \mid f^{-1}(y) \notin \mathcal{LN}_\mu\}$$

счётное.

Теорема 3. $U(T, \mathcal{ZP}_\mu) \subset \mathrm{RI}_\mu$.

Лемма 29. *Пусть* $G \in \mathcal{G}^0$ *и* $f \in C(G)$. *Тогда* $f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big] \in \mathcal{G}^0$ *для любого отрезка* $]x, y[\, \subset \mathbb{R}$.

Предложение 2. *Пусть* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
2) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют конуль-множество* $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ *полной меры и функция* $f_n\colon T \to \mathbb{R}$, *такие что* $f_n|U_n \in C(U_n)$ *и* $|f(t) - f_n(t)| < 1/n$ *для любого* $t \in U_n$.

Установим теперь связь между пространствами C и $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$. Рассмотрим семейство S_l^o всех ограниченных функций $f\colon T \to \mathbb{R}$, таких что $f^{-1}\big[\,]x,\infty[\,\big] \in \mathcal{G}^0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Эти функции будем называть *$\mathcal{G}^0$-полунепрерывными снизу*. Аналогично определим семейство S_u^o всех ограниченных функций, *$\mathcal{G}^0$-полунепрерывных сверху*.

Предложение 3. *Пусть $f\colon T \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
2) *для f существуют функции $g \in S_l^o$ и $h \in S_u^o$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{N}_\mu$*;
3) *для f существуют функции $g \in S_l^o \cap U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$ и $h \in S_u^o \cap U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{N}_\mu$.*

Предложение 4. *Пусть $f\colon T \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
2) *для f существуют счётные коллекции $(g_i \in C \mid i \in I)$ и $(h_j \in C \mid j \in J)$, такие что $g_i \leqslant f \leqslant h_j$ для любых i и j и $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{N}_\mu$, где $g(t) \equiv \sup(g_i(t) \mid i \in I)$ и $h(t) \equiv \inf(h_j(t) \mid j \in J)$ для любого $t \in T$.*

Предложение 3 показывает «счётную» природу связи между пространством RI_μ и его подпространством C.

Теперь докажем аналог характеризации Лебега—Витали.

Теорема 4. *Пусть $f\colon T \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
2) *мера μ множества точек разрыва функции f равна нулю.*

Напомним, что функция $f\colon T \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу*, если $f^{-1}\big[\,]x,\infty[\,\big] \in \mathcal{G}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Семейство всех таких ограниченных функций обозначим через S_l. Аналогично определим семейство S_u всех *ограниченных полунепрерывных сверху функций*.

Определим для ограниченной функции $f\colon T \to \mathbb{R}$ её *нижнюю регуляризацию* $l(f)$ и *верхнюю регуляризацию* $u(f)$, полагая

$$l(f)(t) \equiv \sup(\inf(f(s) \mid s \in G) \mid G \in \mathcal{G}_t),$$
$$u(f)(t) \equiv \inf(\sup(f(s) \mid s \in G) \mid G \in \mathcal{G}_t),$$

где $\mathcal{G}_t$ — множество всех открытых окрестностей точки t. Ясно, что $l(f) \leqslant f \leqslant u(f)$. Согласно [1, гл. V, § 1] эти функции обладают следующими свойствами:

1) $l(f) \in S_l$ и $u(f) \in S_u$;
2) если $g \in S_l$ ($h \in S_u$) и $g \leqslant f$ ($f \leqslant h$), то $g \leqslant l(f)$ (соответственно $u(f) \leqslant h$).

Лемма 30. *Пусть даны ограниченная функция* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *и некоторое разбиение* $\varkappa \in \Delta$ *множества* T. *Тогда* $s(f,\varkappa) = s(l(f),\varkappa)$ *и* $S(f,\varkappa) = S(u(f),\varkappa)$.

Теорема 5. $\mathrm{RI}_\mu \subset U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

Следствие. $\mathrm{RI}_\mu = U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$.

Следствие. *Для ограниченной функции* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) $f \in \mathrm{RI}_\mu$;
2) $f \in U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$;
3) *мера* μ *множества точек разрыва функции* f *равна нулю*;
4) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют конуль-множество* $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ *полной меры и функция* $f_n\colon T \to \mathbb{R}$, *такие что* $f_n|U_n \in \mathcal{C}(U_n)$ *и* $|f(t) - f_n(t)| < 1/n$ *для любого* $t \in U_n$;
5) *существуют счётные коллекции* $(g_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ *и* $(h_j \in \mathcal{C} \mid j \in J)$ *и последовательность* $(U_n \in \mathcal{U}_\mu^0 \mid n \in \mathbb{N})$, *такие что* $g_i \leqslant f \leqslant h_j$ *для любых* i *и* j *и для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $t \in U_n$ *существуют такие* i *и* j, *что* $h_j(t) - g_i(t) < 1/n$.

Следствие. $\mathrm{RI}_\mu/\mathcal{LN}_\mu = \mathrm{RI}_\mu/\mathcal{N}_\mu$.

Далее под *расширением Римана* будем понимать расширение $C \rightarrowtail \mathrm{RI}_\mu/\mathcal{N}_\mu$.

3.2. cr_μ-расширение Римана

Далее продолжаем считать, что $(T, \mathcal{G})$ — фиксированное тихоновское топологическое пространство и C — c-латгруппа всех непрерывных ограниченных функций на T. Пусть μ — фиксированная положительная ограниченная радоновская мера на T, т. е. σ-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{B} \to [0,a] \subset \mathbb{R}$, определённая на σ-алгебре $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств пространства T и такая, что

$$\mu B = \sup\{\mu K \mid K \subset B \wedge K \text{ — компактное множество}\}$$

для любого множества $B \in \mathcal{B}$. Будем считать, что мера μ продолжается на σ-алгебру $\mathcal{LM}_\mu$ всех μ-измеримых множеств. Кроме того, будем считать, что носитель меры μ совпадает с T, т. е. $\operatorname{supp}\mu = T$.

Компактное множество E из T назовём *μ-компактным*, если $G \cap E \notin \mathcal{LN}_\mu$ для любого непустого открытого множества G, пересекающего множество E. Семейство всех μ-компактных подмножеств из T обозначим через Λ_μ. Наделим его порядком по вложению.

Лемма 31. *Пусть* K — *компактное множество и* $K \notin \mathcal{LN}_\mu$. *Тогда* $E \equiv K \setminus \bigcup\{G \in \mathcal{G} \mid G \cap K \in \mathcal{LN}_\mu\} \in \Lambda_\mu$ *и* $K \setminus E \in \mathcal{LN}_\mu$.

Доказательство. Рассмотрим радоновскую меру $\nu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, такую что $\nu B \equiv \mu(B \cap K)$. Из равенства $T \setminus E = \bigcup\{G \in \mathcal{G} \mid G \cap K \in \mathcal{LN}_\mu\}$ следует, что $\nu(T \setminus E) = 0$. □

Следствие. *Объединение* $\bigcup\{E \mid E \in \Lambda_\mu)$ *плотно в* T.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое множество $G \in \mathcal{G}$. Так как носитель меры μ совпадает с T, то $\mu G > 0$. Следовательно, существует компактное множество $K \subset G$, такое что $\mu K > 0$. По лемме 31 существует μ-компактное множество $E \in \Lambda_\mu$, такое что справедливо вложение $E \subset K$. Значит, выполняется вложение $E \subset G$. □

Рассмотрим коллекцию множеств $\mathfrak{T}_\mu \equiv (T_E \equiv E \mid E \in \Lambda_\mu)$.

Лемма 32. *Коллекция $\mathfrak{T}_\mu$ является насыщенным прикрытием на множестве T.*

Доказательство. Проверим, что коллекция $\mathfrak{T}_\mu$ является насыщенной. Пусть $G \in \mathcal{F}$ и для множества $\varnothing \neq T_E \in \mathfrak{T}_\mu$ выполняется свойство $T_E \cap G \neq \varnothing$. Так как мера радоновская, то существует компактное множество $K \subset G \cap T_E$, такое что $K \notin \mathcal{LN}_\mu$. По предыдущей лемме существует μ-компактное множество $T_L \equiv L \subset K$. Для него выполняются вложение $L \subset E \cap G$ и неравенство $L \leqslant E$. Это означает, что коллекция $\mathfrak{T}_\mu$ является насыщенной.

Выполнение свойств прикрытия а)—в) очевидно. Следовательно, по лемме 23 коллекция $\mathfrak{T}_\mu$ является прикрытием. □

Прикрытие $\mathfrak{T}_\mu$ назовём *μ-компактным прикрытием пространства* $(T, \mathcal{G})$.

Лемма 33. *Тройка $(\mathfrak{T}_\mu, \{\varnothing\}, C)$ является согласованной.*

Доказательство. Ясно, что $C = U(T, \mathcal{G}^0)$. Следовательно, нам достаточно показать согласованность тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \{\varnothing\}, \mathcal{G}^0)$. Выполнение свойства а) из определения согласованности для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \{\varnothing\}, \mathcal{G}^0)$ очевидно.

Проверим выполнение свойства б) из определения согласованности для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \{\varnothing\}, \mathcal{G}^0)$. Пусть $G \in \mathcal{G}^0$ — произвольное непустое конуль-множество. Так как $\operatorname{supp} \mu = T$, то $\mu G > 0$. Следовательно, существует компактное множество $\varnothing \neq K \subset G$, а по лемме 31 существует μ-компактное множество $\varnothing \neq E \subset$ $\subset K \subset G$. Следовательно, выполняется свойство $T_E \cap G \notin \{\varnothing\}$.

Теперь проверим выполнение свойства в) из определения согласованности для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \{\varnothing\}, \mathcal{G}^0)$. Пусть $E \in \Lambda_\mu$, $G \in \mathcal{G}^0$ и выполняется свойство $T_E \cap G \neq \varnothing$. Так как множество E является μ-компактным, то $\mu(E \cap G) > 0$. Следовательно, существует компактное множество $\varnothing \neq L \subset (E \cap G)$. По лемме 31 существует μ-компактное множество $\varnothing \neq D \subset L \subset (E \cap G)$. Для этого множества выполняются неравенство $T_D \leqslant T_E$ и свойство $T_D \setminus G \in \{\varnothing\}$. Значит, тройка $(\mathfrak{T}_\mu, \{\varnothing\}, \mathcal{G}^0)$ является согласованной. Утверждение леммы теперь напрямую следует из леммы 26. □

Теперь согласно лемме 24 можно рассматривать на c-латгруппе C насыщенное измельчение $\mathfrak{C}_\mu \equiv (C_E \mid E \in \Lambda_\mu)$, соответствующее прикрытию $\mathfrak{T}_\mu$, такое что $C_E \equiv \{c \in C \mid T_E \cap \operatorname{coz} c = \varnothing\}$. Тогда cr-латгруппа $(C, \mathfrak{C}_\mu)$ является cr-латгруппой s-пространства $(T, \mathcal{G}, \mathfrak{T}_\mu)$. Измельчение $\mathfrak{C}_\mu$ назовём *μ-компактным измельчением c-латгруппы C.*

r-расширения $u\colon (C,\mathfrak{C}_\mu) \to (A,\mathfrak{A})$ будем называть *r_μ-расширениями r-латгруппы C*. В случае, если латгруппа A является c-латгруппой, cr-расширения $u\colon (C,\mathfrak{C}_\mu) \to (A,\mathfrak{A})$ будем называть *cr_μ-расширениями cr-латгруппы C*.

Рассмотрим на множестве T решётку $\mathcal{ZP}_\mu$ и идеал $\mathcal{N}_\mu$. По определению семейства μ-компактных множеств Λ_μ для любого множества $E \in \Lambda_\mu$ и любого открытого множества $G \in \mathcal{G}$, такого что $T_E \cap G \neq \varnothing$, выполняется свойство $T_E \cap G \notin \mathcal{LN}_\mu$. Значит, выполняется свойство $T_E \cap G \notin \mathcal{N}_\mu$. Следовательно, идеал $\mathcal{N}_\mu$ является s-тощим идеалом.

Лемма 34. *Тройка $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, \mathcal{ZP}_\mu)$ является согласованной.*

Доказательство. Выполнение свойства а) из определения согласованности для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, \mathcal{ZP}_\mu)$ очевидно.

Проверим свойство б) из определения согласованности для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, \mathcal{ZP}_\mu)$. Рассмотрим множество $Z \in \mathcal{ZP}_\mu \setminus \mathcal{N}_\mu$. По определению решётки $\mathcal{ZP}_\mu$ справедливо равенство $Z = G \cup N$ для некоторых $G \in \mathcal{G}^0$ и $N \in \mathcal{N}_\mu$. Так как $Z = G \cup N \notin \mathcal{N}_\mu$, то $G \neq \varnothing$. Так как мера μ радоновская, то для множества G существует компактное множество K, такое что имеет место вложение $K \subset G$ и $K \notin \mathcal{LN}_\mu$. По лемме 31 существует μ-компактное множество E, такое что справедливо вложение $E \subset K$. Для этого множества справедливо равенство $T_E \cap Z = E \notin \mathcal{LN}_\mu$, а следовательно, $T_E \cap Z \notin \mathcal{N}_\mu$.

Теперь проверим свойство в) из определения согласованности для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, \mathcal{ZP}_\mu)$. Пусть для некоторых множеств $E \in \Lambda_\mu$ и $Z \equiv G \cup N \in \mathcal{ZP}_\mu$ выполняется свойство $E \cap Z \notin \mathcal{N}_\mu$. Тогда справедливо свойство $E \cap G \neq \varnothing$, и по определению μ-компактных множеств выполняется свойство $E \cap G \notin \mathcal{LN}_\mu$. Так как мера μ радоновская, то существует компактное множество $K \subset E \cap G$, такое что справедливо свойство $K \neq \mathcal{LN}_\mu$. По лемме 31 существует μ-компактное множество L, такое что имеют место вложение $L \subset K \subset E \cap G$ и свойство $L \notin \mathcal{LN}_\mu$. Для μ-компактного множества $L \in \Lambda_\mu$ выполняется равенство $T_L \setminus Z = \varnothing \in \mathcal{N}_\mu$ и неравенство $L \leqslant E$.

Итак, для тройки $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, \mathcal{ZP}_\mu)$ выполняются все три свойства согласованности. □

Так как тройка $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, \mathcal{ZP}_\mu)$ согласованная, то из леммы 26 следует, что тройка $(\mathfrak{T}_\mu, \mathcal{N}_\mu, U(T, \mathcal{ZP}_\mu))$ тоже согласованная. Тогда по лемме 24 можно рассматривать на c-латгруппе $A \equiv U(T, \mathcal{ZP}_\mu)/\mathcal{N}_\mu$ насыщенное измельчение

$$\mathfrak{A}_\mu \equiv (A_E \in \mathcal{C}(U(T, \mathcal{ZP}_\mu)/\mathcal{N}_\mu) \mid E \in \Lambda_\mu),$$

соответствующее прикрытию $\mathfrak{A}_\mu$, такое что $A_E \equiv \{\bar{a} \in A \mid \forall n\ (T_E \cap \operatorname{coz} a \in \mathcal{N}_\mu)\}$. Тогда пара $(A, \mathfrak{A}_\mu) \equiv (U(T, \mathcal{ZP}_\mu)/\mathcal{N}_\mu, \mathfrak{A}_\mu)$ является cr-латгруппой.

Так как c-латгруппа $U(T, \mathcal{ZP}_\mu)$ является широкой, то по лемме 25 гомоморфизм $u\colon C \to A$, такой что $uc \equiv \bar{c}$, является функционально-факторным cr_μ-расширением $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A}_\mu)$. Напомним, что по первому следствию теоремы 5 выполняется равенство $U(T, \mathcal{ZP}_\mu) = \mathrm{RI}_\mu$, поэтому рассмотренное расширение $u\colon C \to A$ является расширением Римана.

3.3. Характеризация расширения Римана как некоторого регулярного пополнения латгруппы непрерывных функций

3.3.1. Теоремы граничности и полноты для расширения Римана

Далее будем отождествлять C и $\bar{C} \equiv C/\mathcal{N}_\mu$, поэтому вместо обозначения $\bar{g}$ для класса эквивалентности функции $g \in C$ будем использовать более простое обозначение g, подразумевая отождествление там, где это необходимо.

Следующие две теоремы были анонсированы в [5].

Теорема 6. *Пусть $\bar{f} \in A$. Тогда существуют такие счётные коллекции*

$$P \equiv (g_i \in C \mid i \in I), \quad Q \equiv (h_j \in C \mid j \in J),$$

что

$$\bar{f} = r\text{-}\sup(g_i \in C \mid i \in I) = r\text{-}\inf(h_j \in C \mid j \in J).$$

Мы показали, что пара (P, Q) является r-сечением. Следовательно, элемент $\bar{f} \in A$ является r-границей этого r-сечения. В силу произвольности элемента $\bar{f} \in A$ мы имеем, что любой элемент латгруппы A является границей некоторого сечения в C. Это означает, что функционально-факторное cr_μ-расширение Римана $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A}_\mu)$ является граничным cr_μ-расширением типа Cut^c.

Теорема 7. *Для любого r-сечения (P, Q) в A, где $P \equiv (\bar{g}_i \in A \mid i \in I)$ и $Q \equiv (\bar{h}_j \in A \mid j \in J)$, существует элемент $\bar{f} \in A$, такой что*

$$\bar{f} = r\text{-}\sup(\bar{g}_i \in A \mid i \in I) = r\text{-}\inf(\bar{h}_j \mid j \in J).$$

В этой теореме мы показали, что любое r-сечение (P, Q) из cr-латгруппы A имеет r-границу в cr-латгруппе A. Это означает, что функционально-факторное cr_μ-расширение Римана $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A}_\mu)$ является полным по типу Cut.

3.3.2. Теорема регулярности для расширения Римана

Пусть отображение $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A}_\mu)$ является r-расширением r-латгруппы C. Будем обозначать фактор-отображение из C на C/C_E через φ_E.

Теорема 8. *Пусть даны коллекция $(c_i \in C \mid i \in I)$ и элемент $c \in C$. Тогда равенства $\bar{c} = r\text{-}\sup(\bar{c}_i \in A \mid i \in I)$ в A и $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$ в C эквивалентны.*

Доказательство. Сначала покажем, что равенство $\bar{c} = r\text{-}\sup(\bar{c}_i \in A \mid i \in I)$ влечёт равенство $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$. Пусть выполняется равенство $\bar{c} = r\text{-}\sup(\bar{c}_i \in A \mid i \in I)$. Тогда по лемме 21 получаем, что $\bar{c} = \sup(\bar{c}_i \in A \mid i \in I)$ и, в частности, справедливо неравенство $\bar{c} \geqslant \bar{c}_i$. Значит, выполняется равенство $u((c - c_i) \wedge 0) = \bar{0}$. Так как вложение u инъективно, то справедливо равенство $(c - c_i) \wedge 0 = 0$, т. е. выполняется неравенство $c \geqslant c_i$. Поэтому $\varphi_E c \geqslant \varphi_E c_i$ для любых $i \in I$ и $A_E \in \mathfrak{A}_\mu$.

Пусть $d \in C$ и справедливо неравенство $\varphi_E d \geqslant \varphi_E c_i$. Тогда имеет место равенство $\varphi_E((d-c_i)\wedge 0) = 0$, т. е. $(d-c_i)\wedge 0 \in C_E$. Следовательно, по определению r-расширения справедливо свойство $(\bar{d}-\bar{c}_i)\wedge\bar{0} \in A_E$. Отсюда выводим равенство $u_E((\bar{d}-\bar{c}_i)\wedge\bar{0}) = 0$ в A/A_E. Следовательно, выполняется неравенство $u_E\bar{d} \geqslant u_E\bar{c}_i$ для любого $i \in I$. Так как имеет место равенство $u_E\bar{c} = \sup(u_E\bar{c}_i \mid i \in I)$, то выполняется неравенство $u_E\bar{d} \geqslant u_E\bar{c}$. Поэтому справедливо равенство $u_E((\bar{d}-\bar{c})\wedge\bar{0}) = \bar{0}$, т. е. $u((d-c)\wedge 0) \in A_E$. Так как по определению r-расширения $u^{-1}[A_E] = C_E$, то $(d-c)\wedge 0 \in C_E$, т. е. $\varphi_E((d-c)\wedge 0) = 0$. Значит, $\varphi_E d \geqslant \varphi_E c$.

Из двух доказанных свойств следует, что для любого идеала $C_E \in \mathfrak{C}$ справедливо равенство $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$.

Теперь покажем, что равенство $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$ влечёт равенство $\bar{c} = r\text{-}\sup(\bar{c}_i \in A \mid i \in I)$. Пусть выполняется равенство $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$. Надо показать, что $u_E\bar{c} = \sup(u_E\bar{c}_i \in A/A_E \mid i \in I)$ в A/A_E для любого мерокомпактного множества $E \in \Lambda_\mu$.

Пусть $a \in A$ и выполняется неравенство $u_E\bar{a} \geqslant u_E\bar{c}_i$ для любого $i \in I$. По теореме граничности $\bar{a} = r\text{-}\inf(\bar{d}_j \in A \mid j \in J)$ для некоторой коллекции непрерывных функций $(d_j \in C \mid j \in J)$. Значит, выполняется равенство $u_E\bar{a} = \inf(u_E\bar{d}_j \mid j \in J)$. Поэтому справедливы неравенства $u_E\bar{d}_j \geqslant u_E\bar{c}_i$ и $u_E(\bar{d}_j - \bar{c}_i) \geqslant 0$ в A/A_E для любых индексов $i \in I$ и $j \in J$. Следовательно, выполняется равенство $u_E((\bar{d}_j - \bar{c}_i)\wedge 0) = 0$, которое влечёт $(\bar{d}_j - \bar{c}_i)\wedge 0 \in A_E$, т. е. $u((d_j - c_i)\wedge 0) \in A_E$. Так как $u^{-1}[A_E] = C_E$, то $(d_j - c_i)\wedge 0 \in C_E$, т. е. справедливо равенство $\varphi_E((d_j - c_i)\wedge 0) = 0$. Значит, выполняется неравенство $\varphi_E d_j \geqslant \varphi_E c_i$ для любых $i \in I$ и $j \in J$.

Так как справедливо равенство $\varphi_E c = \sup(\varphi_E c_i \in C/E \mid i \in I)$, то имеет место неравенство $\varphi_E d_j \geqslant \varphi_E c$ для любого $j \in J$. Поэтому выполняется равенство $\varphi_E((d_j - c)\wedge 0) = 0$. Это означает, что $(d_j - c)\wedge 0 \in C_E$. Из вложения $u[C_E] \subset A_E$ следует, что $(\bar{d}_j - \bar{c})\wedge 0 \in A_E$, т. е. справедливо равенство $u_E((\bar{d}_j - \bar{c})\wedge 0) = 0$. Отсюда получаем неравенство $u_E\bar{d}_j \geqslant u_E\bar{c}$ для любого $j \in J$. В результате получаем неравенство $u_E\bar{a} \geqslant u_E\bar{c}$.

Из равенства $c = r\text{-}\sup(c_i \in C \mid i \in I)$ по лемме 21 следует, что $c = \sup(c_i \in C \mid i \in I)$ и, в частности, $c \geqslant c_i$ для любого индекса $i \in I$. Значит, выполняется неравенство $\bar{c} \geqslant \bar{c}_i$ для любого индекса $i \in I$. Поэтому $u_E\bar{c} \geqslant u_E\bar{c}_i$ для любого индекса $i \in I$.

Из двух доказанных свойств следует, что $u_E\bar{c} = \sup(u_E\bar{c}_i \mid i \in I)$ для любого мерокомпактного множества $E \in \Lambda_\mu$. □

Следствие. *Пусть даны коллекция $(c_i \in C \mid i \in I)$ и элемент $c \in C$. Тогда равенства $\bar{c} = r\text{-}\inf(\bar{c}_i \in A \mid i \in I)$ в A и $c = r\text{-}\inf(c_i \in C \mid i \in I)$ в C эквивалентны.*

Из теоремы регулярности следует, что cr_μ-расширение Римана

$$u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A \equiv \mathrm{RI}_\mu/\mathcal{N}_\mu, \mathfrak{A}_\mu)$$

является регулярным.

3.3.3. Расширение Римана как регулярное пополнение. Теорема единственности

Из теорем граничности и полноты следует, что регулярное cr_μ-расширение Римана $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A \equiv \mathrm{RI}_\mu/\mathcal{N}_\mu, \mathfrak{A}_\mu)$ является регулярным r-пополнением типа Cut^c r-латгруппы C.

Оказывается, что для такого пополнения справедлива *теорема единственности*.

Теорема 9. *Регулярное r-пополнение типа Cut^θ r-латгруппы $(C,\mathfrak{C})$ является единственным с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $v\colon (C,\mathfrak{C}) \to (B,\mathfrak{B})$ — некоторое другое регулярное пополнение типа Cut^θ и $v_E\colon B \to B/B_E$ обозначает фактор-отображение из B в B/B_E.

Пусть $a \in A$. Так как расширение $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A,\mathfrak{A}_\mu)$ является граничным по типу Cut^θ, то выполняется равенство

$$a = r\text{-}\sup(uc_i \mid i \in I) = r\text{-}\inf(ud_j \mid j \in J)$$

для некоторых коллекций $(c_i \in C \mid i \in I)$ и $(d_j \in C \mid j \in J)$. Значит, получаем равенство

$$\inf(u_E ud_j - u_E uc_i \mid (i,j) \in I \times J) = 0$$

в A/A_E для любого мерокомпактного множества $E \in \Lambda_\mu$. Отсюда по регулярности расширения Римана выводим, что выполняется равенство

$$\inf(\varphi_E d_j - \varphi_E c_i \mid (i,j) \in I \times J) = 0$$

в C/C_E для любого мерокомпактного множества $E \in \Lambda_\mu$. Так как расширение $v\colon (C,\mathfrak{C}) \to (B,\mathfrak{B})$ также является регулярным, то имеет место равенство

$$\inf(v_E vd_j - v_E vc_i \mid (i,j) \in I \times J) = 0$$

в B/B_E для любого мерокомпактного множества $E \in \Lambda_\mu$. В силу полноты латгруппы B по типу Cut^θ существует элемент $b \in B$, такой что

$$b = r\text{-}\sup(vc_i \mid i \in I) = r\text{-}\inf(vd_j \mid j \in J).$$

Проверим, что элемент b не зависит от выбора коллекций $(c_i \in C \mid i \in I)$ и $(d_j \in C \mid j \in J)$. Пусть

$$a = r\text{-}\sup(uc'_k \mid k \in k) = r\text{-}\inf(ud'_l \mid l \in L)$$

для некоторых коллекций $(c'_k \in C \mid k \in K)$ и $(d'_l \in C \mid l \in L)$. Согласно предыдущему абзацу существует элемент $b' \in B$, такой что

$$b' = r\text{-}\sup(vc'_k \mid k \in K) = r\text{-}\inf(vd'_l \mid l \in L).$$

Из того, что

$$\inf(u_E ud'_l - u_E uc_i \mid (i,l) \in I \times L) = 0$$

в A/A_E для любого множества $E \in \Lambda_\mu$, аналогично тому, как это сделано выше, выводится, что имеет место равенство

$$\inf(v_E v d'_l - v_E v c_i \mid (i,j) \in I \times L) = 0$$

в B/B_E для любого мерокомпактного множества $E \in \Lambda_\mu$. Следовательно, выполняется равенство

$$\inf(\inf(v_E v d'_l - v_E v c_i \mid i \in I) \mid l \in L) = 0.$$

Отсюда выводим равенство $\inf(v_E v d'_l - b \mid l \in L) = 0$. Это означает, что $b' - b = 0$, т. е. $b' = b$.

Отсюда следует, что мы можем определить отображение $w\colon A \to B$, полагая $wa = b$.

Проверим, что отображение w является инъективным. Пусть $a' \in A$ и справедливы равенства $wa = wa' = b$. Согласно предыдущему построению

$$a' = r\text{-}\sup(uc'_k \mid k \in K) = r\text{-}\inf(ud'_l \mid l \in L),$$
$$b' = r\text{-}\sup(vc'_k \mid k \in k) = r\text{-}\inf(vd'_l \mid l \in L)$$

для некоторых коллекций $(c'_k \in C \mid k \in K)$ и $(d'_l \in C \mid l \in L)$. Так как имеет место равенство $b = b'$, то выполняется равенство

$$\sup(v_E v c_i - v_E v d'_l \mid (i,l) \in I \times L) = 0 = v0$$

в B. Значит,

$$r\text{-}\sup(vc_i - vd'_l \mid (i,l) \in I \times L) = 0 = v0$$

в B. Из регулярности r-расширения $v\colon (C,\mathfrak{C}) \to (B,\mathfrak{B})$ следует равенство

$$r\text{-}\sup(c_i - d'_l \mid (i,l) \in I \times L) = 0$$

в C. Отсюда по регулярности r-расширения $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A,\mathfrak{A})$ получаем равенство

$$r\text{-}\sup(uc_i - ud'_l \mid (i,l) \in I \times L) = 0$$

в A. Это значит, что

$$\sup(u_E u c_i - u_E u d'_l \mid (i,l) \in I \times L) = 0$$

в A/A_E для любого $E \in \Lambda_\mu$. Так как по условию

$$u_E a = \sup(u_E u c_i \mid i \in I), \quad u_E a' = \inf(u_E u d'_l \mid l \in L)$$

в A/A_E, то, применяя правило ассоциативности, получаем последовательно равенства

$$\sup(u_E u c_i - \inf(u_E u d'_l \mid l \in L) \mid i \in I) = 0,$$
$$\sup(u_E u c_i - u_E a' \mid i \in I) = 0,$$
$$u_E a - u_E a' = 0.$$

Значит, $a - a' \in \bigcap(A_E \mid E \in \Lambda_\mu) = \{0\}$, т. е. $a = a'$.

Проверим теперь, что отображение $w\colon A \to B$ является сюръективным. Пусть $b \in B$. Так как r-расширение $v\colon (C,\mathfrak{C}) \to (B,\mathfrak{B})$ является граничным, то

$$b = r\text{-}\sup(vc_i \mid i \in I) = r\text{-}\inf(vd_j \mid j \in J)$$

для некоторых коллекций $(c_i \in C \mid i \in I)$ и $(d_j \in C \mid j \in J)$. Поэтому имеет место равенство

$$r\text{-}\sup(vc_i - vd_j \mid (i,j) \in I \times J) = 0 = v0$$

в B. Из регулярности r-расширения $v\colon (C,\mathfrak{C}) \to (B,\mathfrak{B})$ следует равенство

$$r\text{-}\sup(c_i - d_j \mid (i,j) \in I \times J) = 0$$

в C. Отсюда по регулярности r-расширения $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A,\mathfrak{A})$ получаем равенство

$$r\text{-}\sup(uc_i - ud_j \mid (i,j) \in I \times J) = 0$$

в A. Так как r-расширение $u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A,\mathfrak{A})$ является полным по типу Cut^θ, то существует элемент $a \in A$, такой что

$$a = r\text{-}\sup(uc_i \mid i \in I) = r\text{-}\inf(ud_j \mid j \in J).$$

Из приведённого выше построения отображения w следует, что $b = wa$.

Таким образом, отображение $w\colon A \to B$ является биективным. Проверим, что отображение w сохраняет все структуры. Пусть $a, a' \in A$. Тогда

$$a = r\text{-}\sup(uc_i \mid i \in I) = r\text{-}\inf(ud_j \mid j \in J),$$
$$a' = r\text{-}\sup(uc'_k \mid k \in K) = r\text{-}\inf(ud'_l \mid l \in L)$$

для некоторых коллекций $(c_i \in C \mid i \in I)$, $(d_j \in C \mid j \in J)$, $(c'_k \in C \mid k \in K)$ и $(d'_l \in C \mid l \in L)$. По определению отображения w для элементов $b \equiv wa$ и $b' \equiv wa'$ справедливы равенства

$$b = r\text{-}\sup(vc_i \mid i \in I) = r\text{-}\inf(vd_j \mid j \in J),$$
$$b' = r\text{-}\sup(vc'_k \mid k \in K) = r\text{-}\inf(vd'_l \mid l \in L).$$

Из равенств

$$u_E a = \sup(u_E uc_i \mid i \in I) = \inf(u_E ud_j \mid j \in J)$$

и

$$u_E a' = \sup(u_E uc'_k \mid k \in K) = \inf(u_E ud'_l \mid l \in L)$$

следует равенство

$$u_E(a + a') = \sup(u_E u(c_i + c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = \inf(u_E u(d_j + d'_l) \mid (j,l) \in J \times L)$$

для любого $E \in \Lambda_\mu$, т. е.

$$a + a' = r\text{-}\sup(u(c_i + c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = r\text{-}\inf(u(d_j + d'_l) \mid (j,l) \in J \times L).$$

По определению отображения $w\colon A \to B$ получаем равенства

$$w(a + a') = r\text{-}\sup(v(c_i + c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = r\text{-}\inf(v(d_j + d'_l) \mid (j,l) \in J \times L).$$

Из приведённых выше равенств для b и b' следуют равенства

$$\begin{aligned} v_E w(a+a') &= \sup(v_E v(c_i + c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = \\ &= \sup(v_E v c_i + \sup(v_E v c'_k \mid k \in K) \mid i \in I) = \\ &= \sup(v_E v c_i + v_E b' \mid i \in I) = v_E b + v_E b' = v_E(wa + wa'). \end{aligned}$$

Значит,

$$w(a+a') - (wa + wa') \in \bigcap(B_E \mid E \in \Lambda_\mu) = \{0\}.$$

Поэтому $w(a+a') = wa + wa'$.

Напомним, что в латгруппе A справедливы следующие свойства обобщённой дистрибутивности для элементов $a, b \in A$ и коллекций $(a_i \in A \mid i \in I)$ и $(b_j \in A \mid j \in J)$:

1) если $a = \sup(a_i \in A \mid i \in I)$ и $b = \sup(b_j \in A \mid j \in J)$, то существует такой элемент $c \in A$, что $c = \sup(a_i \wedge b_j \in A \mid (i,j) \in I \times J)$ и $a \wedge b = c$;
2) если $a = \inf(a_i \in A \mid i \in I)$ и $b = \inf(b_j \in A \mid j \in J)$, то существует такой элемент $c \in A$, что $c = \inf(a_i \vee b_j \in A \mid (i,j) \in I \times J)$ и $a \vee b = c$.

Кроме того, справедливы аналогичные свойства обобщённой ассоциативности.

Применяя эти свойства ассоциативности и дистрибутивности, получаем равенства

$$\begin{aligned} u_E a \vee u_E a' = \sup(u_E u c_i \vee u_E u c'_k \mid (i,k) \in I \times K) = \\ = \inf(u_E u d_j \vee u_E u d'_l \mid (j,l) \in J \times L) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_E a \wedge u_E a' = \sup(u_E u c_i \wedge u_E u c'_k \mid (i,k) \in I \times K) = \\ = \inf(u_E u d_j \wedge u_E u d'_l \mid (j,l) \in J \times L) \end{aligned}$$

для любого $E \in \Lambda_\mu$. Отсюда следует, что

$$a \vee a' = r\text{-}\sup(u(c_i \vee c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = r\text{-}\inf(u(d_j \vee d'_l) \mid (j,l) \in J \times L)$$

и

$$a \wedge a' = r\text{-}\sup(u(c_i \wedge c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = r\text{-}\inf(u(d_j \wedge d'_l) \mid (j,l) \in J \times L).$$

По определению отображения $w\colon A \to B$ получаем

$$v(a \vee a') = r\text{-}\sup(v(c_i \vee c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = r\text{-}\inf(v(d_j \vee d'_l) \mid (j,l) \in J \times L)$$

и

$$w(a \wedge a') = r\text{-}\sup(v(c_i \wedge c'_k) \mid (i,k) \in I \times K) = r\text{-}\inf(v(d_j \wedge d'_l) \mid (j,l) \in J \times L).$$

Из приведённых выше равенств для b и b' и указанных свойств дистрибутивности и ассоциативности следуют равенства

$$v_E w(a \wedge a') = \sup(v_E v c_i \vee v_E v c'_k \mid (i,k) \in I \times K) = v_E b \vee v_E b' = v_E(wa \vee wa')$$

и

$$v_E w(a \wedge a') = \inf(v_E vc_i \wedge v_E vc'_k \mid (i,k) \in I \times K) = v_E b \wedge v_E b' = v_E(wa \wedge wa')$$

для любого $E \in \Lambda_\mu$. Значит,

$$w(a \wedge a') - wa \wedge wa' \in \bigcap(B_E \mid E \in \Lambda_\mu) = \{0\}.$$

Поэтому $w(a \wedge a') = wa \wedge wa'$.

Покажем, что $w[A_E] = B_E$. Пусть $a \in A_E$. Тогда $a_+ \equiv a \vee 0$ и $a_- \equiv a \wedge 0$ содержатся в идеале A_E. Из того, что r-расширение $u\colon (C, \mathfrak{C}) \to (A, \mathfrak{A})$ является граничным по типу Cut^θ, и из леммы 21 следует, что имеют место равенства

$$a = \sup(uc_i \in A \mid i \in I) = \inf(ud_j \in A \mid j \in J)$$

для некоторых коллекций $(c_i \in C \mid i \in I)$ и $(d_j \in C \mid j \in J)$. Отсюда легко выводится, что $a_+ = \sup(uc_{i+} \in A \mid i \in I)$ и $a_- = \inf(ud_{j\_} \in A \mid j \in J)$. Так как выполняются неравенства $0 \leqslant uc_{i+} \leqslant a_+$ и $a_- \leqslant ud_{j\_} \leqslant 0$, то $uc_{i+} \in A_E$ и $ud_{j\_} \in A_E$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. Поэтому $c_{i+} \in C_E$ и $d_{j\_} \in C_E$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. Это соответственно влечёт $vc_{i+} \in B_E$ и $vd_{j\_} \in B_E$ для всех $i \in I$ и $j \in J$, т. е. $v_E vc_{i+} = 0$ и $v_E vd_{j\_} = 0$ в B/B_E. Из равенств

$$b_+ = \sup(vc_{i+} \in B \mid i \in I), \quad b_- = \inf(vd_{j\_} \in B \mid j \in J)$$

следует, что выполняются равенства

$$v_E b_+ = \sup(v_E vc_{i+} \in B/B_E \mid i \in I) = 0,$$
$$v_E b_- = \inf(v_E vd_{j\_} \in B/B_E \mid j \in J) = 0,$$

т. е. $b_+ \in B_E$ и $b_- \in B_E$. Поэтому $b = b_+ + b_- \in B_E$ (см. [7, V, п. 5]).

Обратно, пусть $b \in B_E$. В силу сюръективности отображения $w\colon A \to B$ выполняется равенство $b = wa$ для некоторого элемента $a \in A$. Так как отображение $w\colon A \to B$ сохраняет операции, то $w(a_+) = b_+$ и $w(a_-) = b_-$. Из равенств

$$a = \sup(uc_i \in A \mid i \in I) = \inf(ud_j \in A \mid j \in J),$$
$$b = \sup(vc_i \in B \mid i \in I) = \inf(vd_j \in B \mid j \in J)$$

следует, как и ранее, что

$$u_E a_+ = \sup(u_E uc_{i+} \in A/A_E \mid i \in I),$$
$$u_E a_- = \inf(u_E ud_{j\_} \in A/A_E \mid j \in J),$$

$0 \leqslant v(c_{i+}) \leqslant b_+$ и $b_- \leqslant v(d_{j\_}) \leqslant 0$. Следовательно, $v(c_{i+}) \in B_E$ и $v(d_{j\_}) \in B_E$. Поэтому $c_{i+} \in C_E$ и $d_{j\_} \in C_E$, откуда следует, что $u_E uc_{i+} = 0$ и $u_E ud_{j+} = 0$ в A/A_E. В результате получаем равенства $u_E a_+ = 0$ и $u_E a_- = 0$, откуда следует равенство $a = a_+ + a_- \in A_E$.

Покажем, что справедливо равенство $w(-a) = -w(a)$. Рассмотрим цепочку равенств $0 = w(0) = w(a + (-a)) = w(a) + w(-a)$. Следовательно, выполняется равенство $w(-a) = -w(a)$.

Тем самым мы доказали, что произвольное регулярное r-пополнение типа $\mathrm{Cut}^\theta\ v\colon (C,\mathfrak{C}) \to (B,\mathfrak{B})$ r-латгруппы $(C,\mathfrak{C})$ изоморфно регулярному r-пополнению типа $\mathrm{Cut}^\theta\ u\colon (C,\mathfrak{C}) \to (A,\mathfrak{A}_\mu)$ r-латгруппы $(C,\mathfrak{C})$. □

Следствие. *Регулярное cr_μ-пополнение типа Cut^θ cr_μ-латгруппы $(C,\mathfrak{C})$ является единственным с точностью до изоморфизма в классе всех регулярных cr_μ-пополнений cr_μ-латгруппы $(C,\mathfrak{C})$.*

Литература

[1] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961.

[2] Захаров В. К. Описание некоторых расширений семейства непрерывных функций посредством порядковых границ // ДАН. — 2005. — Т. 400, № 4. — С. 444—448.

[3] Захаров В. К., Михалёв А. В., Серединский А. А. Алгебраическое описание решёточных групп непрерывных ограниченных функций // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета. Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2004. — С. 54.

[4] Захаров В. К., Серединский А. А. Новая характеризация функций, интегрируемых по Риману // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 3. — С. 73—83.

[5] Захаров В. К., Серединский А. А. Description of Riemann itegrable functions by means of cuts of the space of continuous functions // Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвящённая столетию академика С. М. Никольского (Москва, 23—29 мая 2005 г.). Тезисы докладов. — М: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2005. — С. 370.

[6] Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1991.

[7] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М: Мир, 1965.

[8] Lebesgue H. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. — Paris: Gauthier-Villars, 1904.

[9] Semadeni Z. Banach Spaces of Continuous Functiouns. — Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1971.

[10] Vitali G. Sulla integrabilità delle funzioni // Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. (2). — 1904. — Vol. 37. — P. 69—73.

[11] Zaharov V. K. Alexandrovian cover and Sierpin'skian extension // Studia Sci. Math. Hung. — 1989. — Vol. 24. — P. 93—117.