Дистрибутивные расширения модулей

А. А. ТУГАНБАЕВ
Московский энергетический институт
(технический университет)
e-mail: askar@diar.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: дистрибутивное расширение, дистрибутивный модуль.

Аннотация

Пусть X — подмодуль модуля M. Расширение $X \subseteq M$ называется *дистрибутивным*, если $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для любых подмодулей Y и Z модуля M. Мы изучаем дистрибутивные расширения модулей над не обязательно коммутативными кольцами. В частности, доказано, что следующие три условия равносильны: 1) $X_A \subseteq M_A$ — дистрибутивное расширение; 2) для любого подмодуля Y модуля M никакой простой подфактор модуля $X/(X \cap Y)$ не изоморфен никакому простому подфактору модуля $Y/(X \cap Y)$; 3) для любых элементов $x \in X$ и $m \in M$ не существует простого фактор-модуля циклического модуля $xA/(X \cap mA)$, изоморфного простому фактор-модулю циклического модуля $mA/(X \cap mA)$.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Distributive extensions of modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 141—150.

Let X be a submodule of a module M. The extension $X \subseteq M$ is said to be *distributive* if $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ for any two submodules Y and Z of M. We study distributive extensions of modules over not necessarily commutative rings. In particular, it is proved that the following three conditions are equivalent: (1) $X_A \subseteq M_A$ is a distributive extension; (2) for any submodule Y of the module M, no simple subfactor of the module $X/(X \cap Y)$ is isomorphic to any simple subfactor of $Y/(X \cap Y)$ (3) for any two elements $x \in X$ and $m \in M$, there does not exist a simple factor module of the cyclic module $xA/(X \cap mA)$ that is isomorphic to a simple factor module of the cyclic module $mA/(X \cap mA)$.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули и подкольца — унитарными. Пусть X — подмодуль модуля M. Расширение $X \subseteq M$ называется *дистрибутивным*, если $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для любых подмодулей Y и Z модуля M. Ясно, что если M — *дистрибутивный* модуль (т. е. решётка всех подмодулей модуля M дистрибутивна), то для любого подмодуля X модуля M расширение $X \subseteq M$ дистрибутивно. Кроме того, если модуль X сравним по включению с любым подмодулем модуля M, то расширение $X \subseteq M$ дистрибутивно. В частности, при $X = M$ или $X = 0$ расширение $X \subseteq M$ дистрибутивно. В случае коммутативных колец дистрибутивные расширения изучались в работах [6; 2; 1; 5; 3; 4; 7, § II.5].

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 141—150.
© 2006 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

В данной работе мы изучаем дистрибутивные расширения модулей над не обязательно коммутативными кольцами. Любой фактор-модуль произвольного подмодуля модуля M называется *подфактором* модуля M. Основными результатами являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть M — правый модуль над кольцом A и X — подмодуль модуля M. Тогда равносильны следующие условия*:

1) $X \subseteq M$ — *дистрибутивное расширение*;
2) *для любого подмодуля Y модуля M никакой простой подфактор модуля $X/(X \cap Y)$ не изоморфен никакому простому подфактору модуля $Y/(X \cap Y)$*;
3) *для любых элементов $x \in X$ и $m \in M$ не существует простого фактор-модуля циклического модуля $xA/(X \cap mA)$, изоморфного простому фактор-модулю циклического модуля $mA/(X \cap mA)$.*

Дистрибутивное расширение $X \subseteq M$ называется *максимальным дистрибутивным расширением* модуля X, если $f(M) = Y$ для любого такого дистрибутивного расширения $X \subseteq Y$, что существует мономорфизм $f\colon M \to Y$, действующий тождественно на модуле X. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если $N \cap X \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля X модуля M. В этом случае M называется *существенным расширением* модуля N.

Теорема 2. *Пусть X — правый модуль над кольцом A и E — инъективная оболочка модуля X. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *каждое дистрибутивное расширение $X \subseteq M_A$ является существенным расширением*;
2) *для каждого дистрибутивного расширения $X \subseteq M_A$ модуль M изоморфен подмодулю модуля E*;
3) *существует такая мощность $\aleph$, что $\mathrm{card}(M) \leqslant \aleph$ для каждого дистрибутивного расширения $X \subseteq M_A$*;
4) *модуль X обладает максимальным дистрибутивным расширением*;
5) *каждый простой правый A-модуль изоморфен подфактору модуля X.*

1. Доказательство теоремы 1

Лемма 1.1. *Пусть M — правый модуль над кольцом A и X — подмодуль модуля M. Тогда равносильны следующие условия*:

1) $X \subseteq M$ — *дистрибутивное расширение*;
2) *для любого такого подмодуля M' модуля M, что $X \subseteq M'$, расширение $X \subseteq M'$ дистрибутивно*;
3) $(X + Y) \cap (X + Z) = X + Y \cap Z$ *для любых подмодулей Y и Z модуля M*;
4) $X \cap (yA + zA) = X \cap yA + X \cap zA$ *для любых элементов y и z модуля M.*

Доказательство. Импликация $1 \implies 4$ и эквивалентность условий 1 и 2 проверяются непосредственно.

Докажем импликацию $1 \implies 3$. По модулярному закону

$$(X+Y)\cap(X+Z) = X + Y\cap(X+Z).$$

Пусть $y = x + z \in Y\cap(X+Z)$, где $x \in X$ и $z \in Z$. Тогда

$$x = y - z \in X\cap(Y+Z) = X\cap Y + X\cap Z.$$

Поэтому $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X\cap Y$ и $x_2 \in X\cap Z$. Тогда

$$y - x_1 = x_2 + z \in Y\cap Z, \quad y = x_1 + (y - x_1) \in X + Y\cap Z,$$

откуда

$$X + Y\cap(X+Z) \subseteq X + Y\cap Z \subseteq X + Y\cap(X+Z).$$

Докажем импликацию $3 \implies 1$. Пусть Y и Z — подмодули модуля M и $x = y + z \in X\cap(Y+Z)$, где $y \in Y$ и $z \in Z$. Тогда

$$y = x - z \in Y\cap(X+Z) \subseteq (X+Y)\cap(X+Z) = X + Y\cap Z,$$
$$z = x - y \in (X+Y)\cap Z \subseteq (X+Y)\cap(X+Z) = X + Y\cap Z.$$

Поэтому $y = x_1 + y_1$ и $z = x_2 + z_1$, где $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, z_1 \in Y\cap Z$. Тогда

$$x_1 = y - y_1 \in X\cap Y, \quad x_2 = z - z_1 \in X\cap Z,$$
$$x = y + z = x_1 + y_1 + x_2 + z_1 = x_1 + x_2 + y_1 + z_1 \in X\cap Y + X\cap Z + Y\cap Z.$$

Поэтому

$$X\cap(Y+Z) \subseteq X\cap Y + X\cap Z + Y\cap Z.$$

Используя модулярный закон, получаем

$$X\cap(Y+Z) = (X\cap(Y+Z))\cap(X\cap Y + X\cap Z + Y\cap Z) =$$
$$= X\cap Y + X\cap Z + X\cap(Y+Z)\cap Y\cap Z = X\cap Y + X\cap Z.$$

Докажем импликацию $4 \implies 1$. Пусть Y и Z — подмодули модуля M и $x = y + z \in X\cap(Y+Z)$, где $y \in Y$ и $z \in Z$. Тогда

$$x \in X\cap(yA + zA) = X\cap yA + X\cap zA \subseteq X\cap Y + X\cap Z,$$
$$X\cap(Y+Z) \subseteq X\cap Y + X\cap Z \subseteq X\cap(Y+Z). \qquad \square$$

Для подмножеств X и Y правого модуля M над кольцом A подмножество $\{a \in A \mid Xa \subseteq Y\}$ кольца A обозначается через $(Y : X)$.

Лемма 1.2. *Пусть M — правый модуль над кольцом A и X — подмодуль модуля M. Тогда равносильны следующие условия*:

1) $X \subseteq M$ — *дистрибутивное расширение*;
2) $x \in X\cap(x-m)A + X\cap mA$ *для любых элементов* $x \in X$ *и* $m \in M$;

3) *для любых элементов* $x \in X$ *и* $m \in M$ *существуют такие элементы* a *и* b *кольца* A, *что* $1 = a + b$ *и* $xa, mb \in X \cap mA$;
4) $(mA : x) + (X : m) = A$ *для любых элементов* $x \in X$ *и* $m \in M$.

Доказательство. Эквивалентность условий 3 и 4 проверяется непосредственно.

Проверим импликацию $1 \implies 2$. Так как $x = (x - m) + m$, то

$$xA \subseteq X \cap ((x - m)A + mA) = X \cap (x - m)A + X \cap mA.$$

Докажем импликацию $2 \implies 3$. Пусть $x \in X$ и $m \in M$. Тогда

$$x = (x - m) + m \in X \cap ((x - m)A + mA) = X \cap (x - m)A + X \cap mA.$$

Поэтому существуют такие элементы b и c кольца A, что $x = (x - m)b + mc$, где $(x - m)b, mc \in X$. Обозначим через a элемент $1 - b$ кольца A. Тогда $1 = a + b$, $xa = x(1 - b) = m(c - b) \in X \cap mA$ и $mb = xb - (x - m)b \in X \cap mA$.

Проверим, что справедлива импликация $3 \implies 2$. Пусть $x \in X$ и $m \in M$. По условию 4 существуют такие элементы a и b кольца A, что $1 = a + b$ и $xa, mb \in X \cap mA$. Тогда $(x - m)b = xb - mb \in X \cap (x - m)A$ и

$$x = xa + xb = (x - m)b + (xa + mb) \in X \cap (x - m)A + X \cap mA.$$

Докажем импликацию $2 \implies 1$. Пусть Y и Z — подмодули модуля M и $x = y + m \in X \cap (Y + Z)$, где $y \in Y$ и $m \in Z$. Так как $x = (x - m) + m$, то

$$\begin{aligned} x \in xA \cap ((x - m)A + mA) \subseteq X \cap ((x - m)A + mA) = \\ = X \cap (x - m)A + X \cap mA \subseteq X \cap Y + X \cap Z. \end{aligned}$$

Поэтому

$$X \cap (Y + Z) \subseteq X \cap Y + X \cap Z \subseteq X \cap (Y + Z). \qquad \square$$

Предложение 1.3. *Пусть* M — *правый модуль над кольцом* A *и* $\mathcal{F}(M)$ — *множество всех таких подмодулей* X *модуля* M, *что расширение* $X \subseteq M$ *дистрибутивно.*

1. *Если* $X \in \mathcal{F}(M)$, *то для каждого модульного эпиморфизма* $h\colon M \to h(M)$ *расширение* $h(X) \subseteq h(M)$ *дистрибутивно.*
2. $X \cap X', X + X' \in \mathcal{F}(M)$ *для всех* $X, X' \in \mathcal{F}(M)$.

   Следовательно, $\mathcal{F}(M)$ — *подрешётка решётки всех подмодулей модуля* M.
3. *Пусть* X — *такой подмодуль модуля* M, *что для любого элемента* $x \in X$ *существует такой подмодуль* Y_x *модуля* X, *что* $x \in Y_x \in \mathcal{F}(M)$. *Тогда* $X \in \mathcal{F}(M)$.
4. $\sum\limits_{i \in I} X_i \in \mathcal{F}(M)$ *для любого подмножества* $\{X_i\}_{i \in I}$ *множества* $\mathcal{F}(M)$.
5. $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \in \mathcal{F}(M)$ *для любого линейно упорядоченного по включению подмножества* $\{X_i\}_{i \in I}$ *множества* $\mathcal{F}(M)$.

6. *Пусть X — подмодуль модуля M и $\mathcal{G}(X, M)$ — множество всех таких подмодулей M' модуля M, что расширение $X \subseteq M'$ дистрибутивно. Тогда множество $\mathcal{G}(X, M)$ не пусто и для любого линейно упорядоченного по включению подмножества $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{G}(X, M)$ расширение $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} M_i$ дистрибутивно. Следовательно, непустое множество $\mathcal{G}(X, M)$ содержит хотя бы один максимальный элемент.*

Доказательство. 1. Пусть $h(x) \in h(X)$ и $h(m) \in h(M)$, где $x \in X$ и $m \in M$. По лемме 1.2 существуют такие элементы a и b кольца A, что $1 = a + b$ и $xa, mb \in X \cap mA$. Тогда

$$h(x)a,\ h(m)b \in h(X) \cap h(m)A.$$

По лемме 1.2 расширение $h(X) \subseteq h(M)$ дистрибутивно.

2. Пусть Y и Z — подмодули модуля M. Тогда

$$X \cap X' \cap (Y + Z) = X \cap (X' \cap Y + X' \cap Z) = X \cap X' \cap Y + X \cap X' \cap Z).$$

Поэтому расширение $X \cap X' \subseteq M$ дистрибутивно. Кроме того, по лемме 1.1

$$(X + X' + Y) \cap (X + X' + Z) = X + (X' + Y) \cap (X' + Z) = X + X' + Y \cap Z.$$

Поэтому расширение $X + X' \subseteq M$ дистрибутивно.

3. Пусть $x \in X$ и $m \in M$. По условию существует такой подмодуль Y_x модуля X, что $x \in Y_x \in \mathcal{F}(M)$. Так как $x \in Y_x \subseteq X$, то по лемме 1.2 существуют такие элементы a и b кольца A, что $1 = a + b$ и $xa, mb \in Y_x \cap mA \subseteq X \cap mA$. По лемме 1.2 $X \in \mathcal{F}(M)$.

4. Обозначим через X подмодуль $\sum\limits_{i\in I} X_i$ модуля M. Пусть $x \in X$. Существует такое конечное подмножество J множества I, что $x \in \sum\limits_{j\in J} X_j = Y_x \subseteq X$. Из утверждения 2 следует, что $Y_x \in \mathcal{F}(M)$. Из утверждения 3 следует, что $X \in \mathcal{F}(M)$.

5. Так как множество $\{X_i\}_{i\in I}$ является линейно упорядоченным по включению, то $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \sum\limits_{i\in I} X_i$. Из утверждения 4 следует, что $\bigcup\limits_{i\in I} X_i \in \mathcal{F}(M)$.

6. Так как $X \in \mathcal{G}(X, M)$, то множество $\mathcal{G}(X, M)$ не пусто. Пусть $x \in X$, $M' = \bigcup\limits_{i\in I} M_i$ и $m \in M'$. Тогда $m \in M_i$ для некоторого $i \in I$. По лемме 1.2 существуют такие элементы a и b кольца A, что $1 = a + b$ и $xa, mb \in X \cap mA$. По лемме 1.2 расширение $X \subseteq M'$ дистрибутивно. □

Лемма 1.4. *Пусть M — правый модуль над кольцом A и X — такой подмодуль модуля M, что расширение $X \subseteq M$ дистрибутивно.*

1. $\mathrm{Hom}_A(X, Y) = \mathrm{Hom}_A(Y, X) = 0$ *для любого такого подмодуля Y модуля M, что $X \cap Y = 0$.*
2. *Если $h\colon M \to \overline{M}$ — эпиморфизм и $\bar{Y}$ — такой подмодуль модуля $\bar{M}$, что $h(X) \cap \bar{Y} = 0$, то $\mathrm{Hom}_A(h(X), \bar{Y}) = \mathrm{Hom}_A(\bar{Y}, h(X)) = 0$.*

3. $\mathrm{Hom}_A(X/(X\cap Y), Y/(X\cap Y)) = \mathrm{Hom}_A(Y/(X\cap Y), X/(X\cap Y)) = 0$ *для любого подмодуля* Y *модуля* M.
4. $\mathrm{Hom}_A(M/X, M/Y) = \mathrm{Hom}_A(M/Y, M/X) = 0$ *для любого такого подмодуля* Y *модуля* M, *что* $X+Y=M$.
5. $\mathrm{Hom}_A(h(X), h(Y)) = \mathrm{Hom}_A(h(Y), h(X)) = 0$ *для любого эпиморфизма* $h\colon M\to h(M)$ *и каждого такого подмодуля* Y *модуля* M, *что* $h(M) = h(X)\oplus h(Y)$.

Доказательство. 1. Пусть $f\in \mathrm{Hom}_A(Y,X)$, $m\in Y$ и $x=f(m)\in X$. По лемме 1.1 существуют такие элементы a и b кольца A, что $1=a+b$ и $xa, mb\in X\cap mA\subseteq X\cap Y=0$. Тогда

$$x = xa+xb = 0+f(m)b = f(mb) = f(0) = 0, \quad f\equiv 0, \quad \mathrm{Hom}_A(Y,X)=0.$$

Теперь пусть $g\in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ и $h\colon M\to M/\mathrm{Ker}(g)$ — естественный эпиморфизм. Тогда $h(X)\cap h(g(X))=0$ и существует изоморфизм $\bar f\colon h(g(X))\to h(X)$. Так как по утверждению 1 леммы 1.2 расширение $h(X)\subseteq h(M)$ дистрибутивно, то по доказанному выше $\mathrm{Hom}_A(h(g(X)), h(X)) = 0$. Поэтому $h(X) = \bar f(h(g(X))) = 0$. Тогда $X=\mathrm{Ker}(g)$, $g=0$ и $\mathrm{Hom}_A(X,Y)=0$.

2. По утверждению 1 леммы 1.2 расширение $h(X)\subseteq \bar M$ дистрибутивно. Поэтому утверждение 2 следует из утверждения 1.

3. Утверждение следует из утверждения 2, применённого к естественному эпиморфизму $h\colon M\to M/(X\cap Y)$.

4. Так как $X+Y=M$, то

$$M/X = (X+Y)/X \cong Y/(X\cap Y), \quad M/Y = (X+Y)/Y\cong X/(X\cap Y).$$

Теперь применяем утверждение 3. □

Окончание доказательства теоремы 1. Докажем импликацию $1 \implies 2$. Допустим, что условие 2 не выполнено. Тогда существуют такие подмодули X_1, X_2, Y_1, Y_2 модуля M, что

$$X\cap Y\subseteq X_2\subsetneq X_1\subseteq X, \quad X\cap Y\subseteq Y_2\subsetneq Y_1\subseteq Y,$$

X_1/X_2 и Y_1/Y_2 — простые модули, $X_1/X_2\cong Y_1/Y_2$. Пусть $h\colon M\to M/(X_2+Y_2)$ — естественный эпиморфизм. Так как

$$X_1\cap(X_2+Y_2) = X_2+X_1\cap Y_2\subseteq X_2+X\cap Y = X_2,$$
$$Y_1\cap(X_2+Y_2) = Y_2+Y_1\cap X_2\subseteq Y_2+X\cap Y = Y_2,$$

то $h(X_1)$ и $h(Y_1)$ — изоморфные простые модули и $h(X_1)\cap h(Y_1)=0$. Это противоречит утверждению 2 леммы 1.4.

Для доказательства импликации $2\implies 3$ заметим, что утверждение 3 следует из 2 при $Y=mA$.

Докажем импликацию $3\implies 1$. Допустим, что расширение $X\subseteq M$ не дистрибутивно. По лемме 1.2 существуют такие элементы $x\in X$ и $m\in M$, что $(mA:x)+(X:m)\neq A$. Пусть $h\colon M\to M/(X\cap mA)$ — естественный эпиморфизм. Собственный правый идеал $(mA:x)+(X:m)$ содержится в некотором

максимальном правом идеале P кольца A. Так как $x(1-p) \notin X \cap mA$ для всех $p \in P$, то $h(x)P \neq h(x)A$. Поэтому циклический модуль $h(xA)$ имеет простой фактор-модуль, изоморфный модулю $(A/P)_A$. Кроме того, $r(m) \subseteq (X : m) \subseteq P$ и $X \cap mA = m(X : m) \subseteq mP \neq mA$. Поэтому циклические модули $h(xA)$ и $h(mA)$ имеют простые фактор-модули, изоморфные модулю $(A/P)_A$. Получено противоречие. □

Следствие 1.5. *Пусть M — правый модуль над кольцом A и X — подмодуль модуля M.*

1. *Если все простые подфакторы модуля M изоморфны, то дистрибутивность расширения $X \subseteq M$ равносильна тому, что модуль X сравним по включению с любым подмодулем модуля M.*
2. *Если $A/J(A)$ — простое артиново кольцо, то дистрибутивность расширения $X \subseteq M$ равносильна тому, что модуль X сравним по включению с любым подмодулем модуля M.*

Доказательство. 1. Если модуль X сравним по включению с любым подмодулем модуля M, то расширение $X \subseteq M$ дистрибутивно. Поэтому утверждение 1 вытекает из теоремы 1.

2. Утверждение вытекает из утверждения 1 и того, что в данном случае все простые A-модули изоморфны друг другу. □

2. Доказательство теоремы 2

Лемма 2.1. *Пусть M — модуль и X — такой подмодуль модуля M, что $X \subseteq M$ — дистрибутивное расширение. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *X — существенный подмодуль модуля M*;
2) *не существует такого ненулевого подмодуля Y модуля M, что $X \cap Y = 0$ и никакой простой подфактор модуля X не изоморфен никакому простому подфактору модуля Y.*

Доказательство. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ следует из того, что $X \cap Y \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Y модуля M.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 1$. Допустим, что существует такой ненулевой подмодуль Y модуля M, что $X \cap Y = 0$. По теореме 1 никакой простой подфактор модуля X не изоморфен никакому простому подфактору модуля Y. Это противоречит условию 2. □

Лемма 2.2. *Пусть M — модуль и X — такой подмодуль модуля M, что расширение $X \subseteq M$ дистрибутивно и множество всех простых подфакторов модуля X содержит изоморфные копии всех простых подфакторов модуля M. Тогда X — существенный подмодуль модуля M.*

Лемма 2.2 вытекает из леммы 2.1.

Лемма 2.3. *Пусть X и Y — такие модули, что никакой простой подфактор модуля X не изоморфен никакому простому подфактору модуля Y. Тогда $Z = X \cap Z \oplus Y \cap Z$ для любого подмодуля Z модуля M.*

Доказательство. Пусть $M = X \oplus Y$ и $h\colon M \to M/(X \cap Z \oplus Y \cap Z)$ — естественный эпиморфизм. Тогда $h(M) = h(X) \oplus h(Y)$ и существуют естественные проекции $\pi_x\colon h(M) \to h(X)$ и $\pi_y\colon h(M) \to h(Y)$. Так как $h(Z) \cap h(X) = 0$ и $h(Z) \cap h(Y) = 0$, то $\pi_x(h(Z)) \cong h(Z) \cong \pi_y(h(Z))$. Поскольку никакой простой подфактор модуля X не изоморфен никакому простому подфактору модуля Y, то никакой простой подфактор модуля $\pi_x(h(Z))$ не изоморфен никакому простому подфактору модуля $\pi_y(h(Z))$. Кроме того, $\pi_x(h(Z)) \cong \pi_x(h(Z))$. Поэтому $\pi_x(h(Z)) = 0$ и $\pi_y(h(Z)) = 0$. Следовательно, $h(Z) = 0$ и $Z = X \cap Z \oplus Y \cap Z$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть M — модуль и $M = X \oplus Y$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) $X \subseteq M$ — *дистрибутивное расширение*;
2) *никакой простой подфактор модуля X не изоморфен никакому простому подфактору модуля Y.*

Доказательство. Импликация $1 \implies 2$ следует из теоремы 1.

Докажем импликацию $2 \implies 1$. Пусть Z_1 и Z_2 — подмодули модуля M. По лемме 2.3

$$Z_1 = X \cap Z_1 \oplus Y \cap Z_1, \quad Z_2 = X \cap Z_2 \oplus Y \cap Z_2.$$

Используя модулярный закон, получаем, что

$$\begin{aligned} X \cap (Z_1 + Z_2) &= X \cap [(X \cap Z_1 + X \cap Z_2) \oplus (Y \cap Z_1 + Y \cap Z_2)] = \\ &= X \cap Z_1 + X \cap Z_2 + X \cap (Y \cap Z_1 + Y \cap Z_2) = X \cap Z_1 + X \cap Z_2. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2.5. *Пусть X — такой правый модуль над кольцом A, что существует хотя бы один простой правый A-модуль, не изоморфный подфактору модуля X. Обозначим через $\{S_i\}_{i \in I}$ какое-нибудь непустое множество представителей классов всех простых правых A-модулей, которые не изоморфны подфактору модуля X. Тогда для любого кардинального числа $\aleph$ расширение $X \subseteq X \oplus \Big(\bigoplus\limits_{i \in I} S_i\Big)^{(\aleph)}$ дистрибутивно.*

Доказательство. Обозначим через Y полупростой модуль $\Big(\bigoplus\limits_{i \in I} S_i\Big)^{(\aleph)}$. Произвольный простой подфактор полупростого модуля Y изоморфен одному из простых модулей S_i. По лемме 2.4 $X \subseteq X \oplus Y$ — дистрибутивное расширение. $\square$

Окончание доказательства теоремы 2. Импликация $1 \implies 2$ следует из того, что для каждого существенного расширения $X \subseteq M_A$ модуль M изоморфен подмодулю модуля E.

Импликация $2 \implies 3$ следует из того, что можно положить $\aleph = \mathrm{card}(E)$.

Докажем импликации $3 \implies 1$ и $4 \implies 1$. Допустим, что существует дистрибутивное расширение $X \subseteq M$, не являющееся существенным расширением. Тогда $X \cap Y = 0$ для некоторого ненулевого циклического подмодуля Y модуля M. Модуль Y обладает простым фактор-модулем S. Из утверждения 1 предложения 1.3 следует, что расширение $X \subseteq X \oplus S$ дистрибутивно. По лемме 2.5 для любого кардинального числа $\aleph$ расширение $X \subseteq X \oplus S^{(\aleph)}$ дистрибутивно. Это противоречит условию 3 и условию 4.

Убедимся в справедливости импликации $1 \implies 4$. Пусть $\mathcal{G}(X, E)$ — множество всех таких подмодулей E' модуля E, что расширение $X \subseteq E'$ дистрибутивно. По утверждению 6 предложения 1.3 множество $\mathcal{G}(X, E)$ не пусто и содержит хотя бы один максимальный элемент M. Пусть $X \subseteq Y$ — дистрибутивное расширение и существует мономорфизм $f\colon M \to Y$, действующий тождественно на модуле X. Изоморфизм $f^{-1}\colon f(M) \to M \subseteq E$ действует тождественно на модуле X и продолжается до гомоморфизма $g\colon Y \to E$, поскольку модуль E инъективен. По условию 2 X — существенный подмодуль в Y. Так как $X \cap \mathrm{Ker}(g) = 0$, то g — мономорфизм. Кроме того, $X \subseteq g(Y)$ — дистрибутивное расширение и $M = gf(M)) \subseteq g(Y)$. Так как M — максимальный элемент множества $\mathcal{G}(X, E)$, то $g(Y) = M$. Поэтому $f(M) = Y$ и $X \subseteq M$ — максимальное дистрибутивное расширение.

Импликация $5 \implies 1$ следует из леммы 2.2.

Докажем импликацию $1 \implies 5$. Допустим, что существует простой правый A-модуль S, который не изоморфен подфактору модуля X. По лемме 2.5 расширение $X \subseteq X \oplus S$ дистрибутивно. Это дистрибутивное расширение не является существенным расширением. Это противоречит условию 1. □

Следствие 2.6. *Пусть X — правый модуль над кольцом A, содержащий изоморфную копию модуля A_A. Тогда каждое дистрибутивное расширение $X \subseteq M_A$ является существенным расширением.*

Доказательство. Так как любой простой правый A-модуль является гомоморфным образом модуля A_A, то утверждение следует из теоремы 2. □

Литература

[1] Barnard A. Distributive extensions of modules // J. Algebra. — 1981. — Vol. 70, no. 2. — P. 303—315.

[2] Davison T. M. K. Distributive homomorphisms of rings and modules // J. Reine Angew. Math. — 1974. — Vol. 271. — P. 28—34.

[3] Erdogdu V. Modules with locally linearly ordered distributive hulls // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 47, no. 2. — P. 119—130.

[4] Erdogdu V. The distributive hull of a ring // J. Algebra. — 1990. — Vol. 132, no. 2. — P. 263—269.

[5] Gräter J. Über die Distributivität des Idealverbandes eines kommutativen Ringes // Monatsh. Math. — 1985. — Vol. 99, no. 4. — P. 267—278.

[6] Jensen C. U. A remark on the distributive law for an ideal in a commutative ring // Proc. Glasgow Math. Assoc. — 1966. — Vol. 7. — P. 193—198.

[7] Knebusch M., Zhang D. Manis Valuations and Prüfer Extensions. I. — Berlin: Springer, 2002. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1791).