Лорановские кольца

Д. А. ТУГАНБАЕВ
ОАО «Аби Софтвер Хаус»

УДК 512.5

Ключевые слова: кольцо косых рядов Лорана, кольцо формальных псевдодифференциальных операторов, лорановское кольцо.

Аннотация

Изучаются теоретико-кольцевые свойства лорановского кольца над кольцом A, определяемого как любое кольцо, образованное на аддитивной группе лорановских рядов от переменной x с коэффициентами из A, причём левое умножение на элементы из A и правое умножение на степени x удовлетворяют обычным условиям и младшая степень произведения двух ненулевых рядов не меньше суммы младших степеней сомножителей. Основными примерами лорановских колец являются кольца косых лорановских рядов $A((x;\varphi))$ и кольца формальных псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1};\delta))$, в которых умножение подкручивается либо автоморфизмом φ, либо дифференцированием δ кольца коэффициентов A (в последнем случае полагаем $x=t^{-1}$). Изучаются также обобщённые лорановские кольца, примерами которых являются кольца дробных n-адических чисел (локализации кольца n-адических целых чисел по порождённому числом n мультипликативному множеству). Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы лорановское кольцо удовлетворяло различным стандартным кольцевым свойствам. Работа также содержит некоторые результаты о кольцах лорановских рядов от нескольких переменных.

Abstract

D. A. Tuganbaev, Laurent rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 3, pp. 151—224.

This is a study of ring-theoretic properties of a Laurent ring over a ring A, which is defined to be any ring formed from the additive group of Laurent series in a variable x over A, such that left multiplication by elements of A and right multiplication by powers of x obey the usual rules, and such that the lowest degree of the product of two nonzero series is not less than the sum of the lowest degrees of the factors. The main examples are skew-Laurent series rings $A((x;\varphi))$ and formal pseudo-differential operator rings $A((t^{-1};\delta))$, with multiplication twisted by either an automorphism φ or a derivation δ of the coefficient ring A (in the latter case, take $x=t^{-1}$). Generalized Laurent rings are also studied. The ring of fractional n-adic numbers (the localization of the ring of n-adic integers with respect to the multiplicative set generated by n) is an example of a generalized Laurent ring. Necessary and/or sufficient conditions are derived for Laurent rings to be rings of various standard types. The paper also includes some results on Laurent series rings in several variables.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 3, с. 151—224.

Введение

В данной работе рассматриваются теоретико-кольцевые свойства лорановских колец, которые обобщают кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов. Строятся и другие примеры лорановских колец.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, но не обязательно коммутативными. В работе используются базовые сведения из теории колец, которые можно найти, например, в [1, 12].

Определение. Если φ — автоморфизм кольца A, то через $A((x,\varphi))$ обозначается *кольцо косых рядов Лорана* над кольцом коэффициентов A, образованное рядами

$$f = \sum_{i=k}^{+\infty} f_i x^i,$$

где x — переменная, k — целое (возможно, отрицательное) число, а все коэффициенты f_i лежат в кольце A. В кольце $A((x,\varphi))$ сложение задаётся естественным образом, а умножение задаётся с учётом правила $xa = \varphi(a)x$ (для всех элементов $a \in A$). При $\varphi = 1_A$ получаем обычное (не косое) *кольцо рядов Лорана* $A((x))$.

Определение. Пусть A — (необязательно коммутативное) кольцо и δ — его *дифференцирование* (т. е. эндоморфизм A как абелевой группы по сложению, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$). Тогда через $A((t^{-1},\delta))$ обозначается *кольцо псевдодифференциальных операторов* над кольцом коэффициентов A, образованное формальными рядами

$$f = \sum_{i=-\infty}^{m} f_i t^i,$$

где t — переменная, m — целое (возможно, отрицательное) число, а коэффициенты f_i ряда f — элементы кольца A. В кольце $A((t^{-1},\delta))$ сложение определяется обычным образом, а умножение задаётся с учётом правил

$$ta = at + \delta(a), \quad t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1}.$$

Проверка того, что множество $A((t^{-1},\delta))$ удовлетворяет всем аксиомам кольца, будет дана ниже в следствии 4.2. В случае, когда δ — нулевое дифференцирование, существует изоморфизм кольца $A((t^{-1},\delta))$ на кольцо обычных рядов Лорана $A((x))$ (этот изоморфизм переводит t^{-1} в x).

Таким образом, и конструкция кольца косых рядов Лорана, и конструкция кольца псевдодифференциальных операторов являются различными обобщениями конструкции кольца обычных рядов Лорана (кроме того, кольцо косых рядов Лорана с кольцом коэффициентов A и кольцо псевдодифференциальных операторов с кольцом коэффициентов A имеют одну и ту же аддитивную группу). Обычное соотношение $xa = ax$, где x — переменная, а a — элемент кольца коэффициентов, заменяется в кольце косых рядов Лорана на соотношение $xa = \varphi(a)x$ (эквивалентно, $x^{-1}a = \varphi^{-1}(a)x^{-1}$). В кольце псевдодифференциальных операторов соотношение $xa = ax$ заменяется на соотношение $ta = at + \delta(a)$ (эквивалентно, $x^{-1}a = ax^{-1} + \delta(a)$, где $x = t^{-1}$). Оказывается, что возможно построить кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием, в котором соответствующее соотношение имеет более общий вид $x^{-1}a = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \delta(a)$, так что и кольцо косых рядов Лорана, и кольцо псевдодифференциальных операторов оказываются его частными случаями.

Это кольцо является одним из основных объектов изучения в данной работе (в случае, когда кольцо коэффициентов — тело, оно изучалось в [13]). Точное его определение с проверкой корректности будет дано ниже. Все полученные для него результаты верны и в случае кольца косых рядов Лорана, и в случае кольца псевдодифференциальных операторов.

Многие теоремы переносятся с колец косых рядов Лорана на кольца псевдодифференциальных операторов и на кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием и обратно практически без изменений, поэтому возникает вопрос о том, какого рода должно быть умножение (или задающее его соотношение вида $xa = \ldots$) на абелевой группе формальных рядов, для того чтобы сохранялись те же самые кольцевые свойства.

Ясно, что имеются естественные условия, вытекающие из дистрибутивности умножения по отношению к формальной бесконечной сумме и из отождествления единицы кольца коэффициентов с единицей циклической группы по умножению, порождённой переменной. Оказывается, что единственное необходимое свойство состоит в том, что младшая степень произведения двух рядов должна быть не меньше суммы младших степеней этих рядов (в случае кольца псевдодифференциальных операторов, где степень переменной в формальном ряде убывает, а не возрастает, вместо младших степеней используются старшие). Кольца, состоящие из формальных степенных рядов с отрицательными степенями, удовлетворяющие этому условию, называются в данной работе лорановскими кольцами.

Явные вычисления в кольце косых рядов Лорана с косым дифференцированием и в кольце псевдодифференциальных операторов крайне трудоёмки. В большинстве случае используется только тот факт, что кольцо является лорановским. Это является причиной изучения лорановских колец.

Из указанного требования к умножению, с учётом обратимости x, возникает необходимое условие на соотношение перестановки переменной с коэффициентом $xa = \ldots$, состоящее в том, что младшая степень правой части должна быть равна младшей степени левой. Обратимость x требует, чтобы соотношение имело вид $xa = \varphi(a)x + \ldots$, где φ — автоморфизм кольца коэффициентов. Требование ассоциативности умножения накладывает на соотношение последнее условие, которое, однако, нам будет удобнее сформулировать после того, как будет развита особая вычислительная техника. Проверка этого условия в общем случае также требует значительных усилий, однако в отдельных частных случаях это условие удаётся легко проверить.

Существует определённая взаимосвязь между решёткой правых (левых) идеалов лорановского кольца и решёткой правых (левых) идеалов его кольца коэффициентов: решётка идеалов кольца коэффициентов с помощью отображения μ вкладывается (с сохранением решёточных операций) в решётку идеалов лорановского кольца и существует отображение λ в обратную сторону, сохраняющее отношение включения, ставящее в соответствие каждому идеалу кольца рядов идеал кольца коэффициентов. При этом в конечно порождённом случае отображение λ сохраняет и строгое включение, благодаря чему решётка идеалов лорановского кольца не может быть значительно богаче решётки идеалов его кольца коэффициентов.

Далее в работе изучаются некоторые кольцевые свойства лорановских колец (все эти результаты, естественно, распространяются на кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов). Так, доказано, что лорановское кольцо является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом; для частных случаев колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов это хорошо известно (см., например, [13, с. 66; 14]). Аналогично, лорановское кольцо является нётеровым (артиновым) тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является нётеровым (артиновым); это утверждение известно для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов (см., например, [15, с. 19; 17]). Также проверено, что лорановское кольцо является областью тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является областью. Доказано, что лорановское кольцо является областью главных правых идеалов тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является областью главных правых идеалов.

Получен также критерий того, что лорановское кольцо является цепным кольцом, и критерий того, что оно является дистрибутивным и полулокальным кольцом. В этих случаях дополнительным необходимым условием оказывается артиновость (и кольца коэффициентов, и лорановского кольца). Получено также описание полуцепных артиновых колец косых рядов Лорана. Для того чтобы лорановское кольцо было простым или полупростым, должны быть, помимо такого же условия на кольцо коэффициентов, выполнены особые дополнительные условия (в случае кольца косых рядов Лорана это условие на скручивающий автоморфизм, а в случае кольца псевдодифференциальных операторов — условие на дифференцирование).

Помимо точных критериев, получены некоторые частичные результаты о дистрибутивных кольцах рядов, о полулокальных кольцах рядов и о кольцах главных правых идеалов. Для многих утверждений приведены примеры колец, иллюстрирующие необходимость каждого отдельного условия.

1. Обобщённые лорановские кольца

Из определений кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и кольца псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ над одним и тем же кольцом коэффициентов A следует, что между этими двумя кольцами есть естественная биекция, переводящая x в t^{-1}, а формальные суммы степеней x в соответствующие формальные суммы степеней t^{-1}. Эта биекция является изоморфизмом левых модулей ${}_AA((x,\varphi))$ и ${}_AA((t^{-1},\delta))$ над кольцом A. Такое сходство этих двух конструкций придаёт им близкие кольцевые свойства и даёт возможность в некоторых случаях доказывать сходные теоремы для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов, причём доказательства совпадают почти дословно.

В связи с этим будет удобно определить лорановское кольцо, частными случаями которого будут являться кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов, и доказать возможно большее число теорем в такой общности. Кроме того, часть результатов верна в ещё более широком классе колец — они будут называться обобщёнными лорановскими кольцами. Главную роль в определении играет $\mathbb{Z}$-фильтрация (для кольца косых рядов Лорана это фильтрация, задаваемая функцией младшей степени ряда, для кольца псевдодифференциальных операторов — функцией старшей степени). Приведём определение.

Определение. Кольцо R называется *обобщённым лорановским кольцом*, если в нём определён набор подгрупп по сложению $\{U_i \mid -\infty < i < +\infty\}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

а) для всех целых n и k выполнены включения $U_{n+1} \subseteq U_n$ и $U_nU_k \subseteq U_{n+k}$. Кроме того, объединение U_n по всем целым n даёт всё кольцо R, а пересечение U_n по всем целым n состоит из одного нуля;

б) существует пара элементов $y \in U_1$ и $y^{-1} \in U_{-1}$, таких что $yy^{-1} = y^{-1}y = 1$;

в) для любого набора $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ найдётся элемент $u \in U_n$ (*обобщённая бесконечная сумма* элементов u_i), такой что для всех натуральных k

$$\left(u - \sum_{i=n}^{n+k} u_i\right) \in U_{n+k+1}.$$

Замечание. Условие а) требует, чтобы R было $\mathbb{Z}$-фильтрованным кольцом. Остальные условия накладывают дополнительные ограничения на эту фильтрацию. Условие б) составляет специфику рядов с *отрицательными степенями* переменной: например, кольцо формальных степенных рядов удовлетворяет всем условиям, кроме б). Условие в) составляет специфику *бесконечных рядов*: например, кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$ удовлетворяет всем условиям, кроме в).

Из условий а) и б) вытекает, что U_0 — унитарное подкольцо в R, а U_1 — двусторонний идеал в U_0. Поэтому можно рассмотреть фактор-кольцо $A = U_0/U_1$, которое будет называться *кольцом коэффициентов* обобщённого лорановского кольца. Ниже будет доказано, что кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов являются обобщёнными лорановскими кольцами, так что понятие кольца коэффициентов в них совпадает с обычным определением.

Отметим, что кольцо коэффициентов не обязательно вкладывается в само обобщённое лорановское кольцо, как это имеет место в случаях колец многочленов, косых рядов Лорана, колец псевдодифференциальных операторов и формальных степенных рядов. Позже мы дадим определение лорановских колец, которые образуют более узкий класс колец и содержат свои кольца коэффициентов.

В условии в) вводится понятие обобщённой бесконечной суммы для некоторых наборов слагаемых. Ниже будет показано, что это есть просто сумма абсолютно сходящегося в некоторой топологии ряда, а пока докажем некоторые простые свойства этой суммы.

Лемма 1.1. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо. Будем обозначать обобщённую бесконечную сумму обычным знаком $\sum$. Тогда*:

1) *обобщённая сумма элементов $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ определена единственным образом, т. е. найдётся ровно один элемент, удовлетворяющий условию* в);
2) *для любого целого n выполнено равенство*
$$\sum_{i=n}^{+\infty} 0 = 0;$$
3) *если элементы $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ и элементы $v_m \in U_m, v_{m+1} \in U_{m+1}, v_{m+2} \in U_{m+2}, \ldots$ образуют обобщённую бесконечную сумму, причём есть биективное отображение η из неотрицательных целых чисел на неотрицательные целые числа, такое что $u_{n+i} = v_{m+\eta(i)}$ для всех целых неотрицательных i, то выполнено равенство*
$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=m}^{+\infty} v_i;$$
4) *если r — произвольный элемент кольца R, а элементы $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ образуют обобщённую бесконечную сумму, то выполнены равенства*
$$r\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=n}^{+\infty} ru_i, \quad \sum_{i=n}^{+\infty} u_i r = \sum_{i=n}^{+\infty} u_i r,$$
причём правая их часть всегда определена;
5) *если $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ — элементы, образующие обобщённую бесконечную сумму, то для любого целого $m > n$ выполнено*

равенство

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = \sum_{i=n}^{m-1} u_i + \sum_{i=m}^{+\infty} u_i,$$

где выражение $\sum\limits_{i=n}^{m-1} u_i$ *обозначает обыкновенную конечную сумму, причём правая часть всегда определена*;

6) *для любого такого набора элементов* $\{u_{i,j} \mid n \leqslant i < +\infty,\ m \leqslant j < +\infty\}$, *что* $u_{i,j} \in U_{i+j}$, *выполнено равенство*

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{i=n+m}^{+\infty} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j},$$

причём обе его части всегда определены;

7) *для любого такого набора элементов* $\{u_{i,j} \mid n \leqslant i < +\infty,\ m \leqslant j < +\infty\}$, *что* $u_{i,j} \in U_{i+j}$, *выполнено равенство*

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=m}^{+\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,j},$$

причём обе его части всегда определены.

Доказательство. 1. Действительно, допустим, что существуют два разных элемента u и v, удовлетворяющих условию в). Тогда по условию для каждого натурального k имеем

$$u - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1}, \quad v - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1},$$

поэтому $u - v \in U_{k+1}$, откуда из-за произвольности k получаем $u - v = 0$, что и требовалось доказать.

2. Утверждение проверяется непосредственно.

3. Обозначим бесконечную сумму u_i через u, а бесконечную сумму v_i через v. Для того чтобы доказать, что $u = v$, достаточно доказать, что для всех целых k, больших некоторого, выполнено $u - v \in U_k$. Пусть k' — максимальное значение, принимаемое функцией $m + \eta(i)$ при $i \leqslant k - n$, а k'' — максимум из двух чисел k и k'. Тогда

$$u - v = \left(u - \sum_{i=n}^{k} u_i\right) + \left(\sum_{i=n}^{k} u_i - \sum_{i=m}^{k''} v_i\right) - \left(v - \sum_{i=m}^{k''} v_i\right),$$

где первое и третье слагаемое лежат в U_{k+1} по определению обобщённой бесконечной суммы. Остаётся доказать, что второе слагаемое также лежит в U_k.

Действительно, по условию и по выбору k'' сумма $\sum\limits_{i=m}^{k''} v_i$ содержит те же члены, что и сумма $\sum\limits_{i=n}^{k} u_i$, а также некоторые дополнительные члены v_i, для всех них выполнено условие $\eta^{-1}(i-m) > k-n$. Но если $\eta^{-1}(i-m) > k-n$, то $v_i = u_{n+\eta^{-1}(i-m)} \in U_{k+1}$, что и завершает доказательство.

4. Пусть целое число m таково, что элемент r лежит в U_m. Тогда если u_i лежит в U_i, то $u_i r$ и $r u_i$ лежат в U_{i+m}, поэтому правые части доказываемых равенств определены. Равенства доказываются сходным образом, для определённости докажем первое. Надо доказать, что элемент $r\sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_i$ удовлетворяет условию в) для набора элементов $\{ru_i\}$. Действительно, для всех целых k имеем

$$r\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} r u_i = r\left(\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} u_i\right) \in U_{n+m},$$

что и требовалось доказать.

5. Действительно, если набор элементов $u_n, u_{n+1}, \ldots$ удовлетворяет условиям обобщённой бесконечной суммы, то и набор $u_m, u_{m+1}, \ldots$ удовлетворяет им. Для любого целого $k > m$ имеем

$$\left(\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{m-1} u_i\right) - \sum_{i=m}^{k} u_i = \sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{k} u_i \in U_{k+1},$$

что означает, в соответствии с условием в), что

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i - \sum_{i=n}^{m-1} u_i = \sum_{i=m}^{+\infty} u_i,$$

что и требовалось доказать.

6. Действительно, по условию в) для всех $i \geqslant n$ имеем

$$\sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} \in U_{i+m},$$

поэтому левая часть требуемого равенства всегда определена. Поскольку

$$\sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j} \in U_i,$$

то определена и правая часть, осталось доказать их равенство.

Достаточно доказать, что для всех достаточно больших целых k разность

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{+\infty} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}. Для этого достаточно показать, что разность

$$\sum_{i=n}^{k-m} \sum_{j=m}^{+\infty} u_{i,j} - \sum_{i=n+m}^{k} \sum_{j=m}^{i-n} u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}, а для этого достаточно доказать, что разность

$$\sum_{i=n}^{k-m}\sum_{j=m}^{k-n}u_{i,j}-\sum_{i=n+m}^{k}\sum_{j=m}^{i-n}u_{i-j,j}$$

лежит в U_{k+1}. Но последнее равенство содержит только конечные суммы и непосредственно следует из того, что $u_{i,j}\in U_{i+j}$.

7. Утверждение доказывается применением пункта 6 по отдельности к правой и левой частям требуемого равенства. $\square$

Замечание. Во избежание конфликта обозначений, обозначение $\sum$ для обобщённой бесконечной суммы не выносится за пределы доказанной выше леммы, так как в кольцах рядов Лорана, кольцах псевдодифференциальных операторов и т. д. знак $\sum$ будет использован для формальной записи бесконечных рядов. Во всех этих кольцах, однако, формальная запись $\sum$ будет являться частным случаем обобщённой бесконечной суммы.

Естественно определить *изоморфизм обобщённых лорановских колец* как изоморфизм $\mathbb{Z}$-фильтрованных колец (биективно отображающий фильтрующие подгруппы U_n обобщённого лорановского кольца R на соответствующие им фильтрующие подгруппы U'_n кольца R'). Из определения обобщённой бесконечной суммы непосредственно вытекает, что при изоморфизме обобщённых лорановских колец эта бесконечная сумма сохраняется. Кроме того, у изоморфных обобщённых лорановских колец изоморфны кольца коэффициентов. В предложении 4.6 будет построен пример обобщённых лорановских колец $\mathbb{Q}_{n^k}$, $\mathbb{Q}_{n^m}$, которые изоморфны как кольца, но не изоморфны как обобщённые лорановские кольца при различных натуральных k и m (например, потому, что у них не изоморфны кольца коэффициентов $\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n^m\mathbb{Z}$).

Нам потребуются следующие обозначения.

Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, а $\{U_i\}$ — набор множеств в нём, как в определении. Тогда для каждого элемента из U_0 назовём его образ при каноническом гомоморфизме U_0 на $A=U_0/U_1$ *свободным членом*. В случае кольца рядов Лорана это определение совпадает с естественным определением свободного члена, поэтому свободный член (когда он определён) элемента f будет обозначаться через f_0. Легко видеть, что свободный член суммы (произведения) двух элементов из U_0 равен сумме (произведению) их свободных членов.

Для каждого ненулевого элемента f из R назовём его *младшей степенью* такое целое число n, что f лежит в U_n и не лежит в U_{n+1} (для кольца обычных рядов Лорана младшая степень совпадает со степенью младшего члена). Иногда будет удобно считать, что младшая степень нуля равна плюс бесконечности. Младшая степень определена единственным образом. Элементы с младшей степенью 0 — это в точности все элементы из U_0 с ненулевым свободным членом. Каждый ненулевой элемент f кольца R может быть представлен в виде произведения вида uy^n, где $u\in U_0$ — элемент с ненулевым свободным членом, y — обратимый элемент, описанный в условии б), а n — младшая степень f.

Из этого сразу вытекает, что для любых целых n и m выполнено равенство $y^n U_m = U_{n+m}$.

Пусть R — обобщённое лорановское кольцо и y — какой-либо обратимый элемент, описанный в условии б). Если $u_0 + U_1$ — какой-либо элемент кольца коэффициентов U_0/U_1, то для любого целого n элемент $y^n u_0 y^{-n} + U_1$ также является элементом кольца коэффициентов и не зависит от выбора конкретного представителя u_0 (поскольку $y^n U_1 y^{-n} = U_1$). Поэтому отображение $\varphi\colon u_0 + U_1 \to y u_0 y^{-1} + U_1$ задаёт автоморфизм кольца коэффициентов, причём φ^n переводит элемент $u_0 + U_1$ в $y^n u_0 y^{-n} + U_1$. Для кольца косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ и элемента y, равного x, этот автоморфизм совпадает с автоморфизмом, задающим косое умножение в кольце косых рядов Лорана, поэтому для него используется то же самое обозначение φ и он будет называться *скручивающим автоморфизмом* обобщённого лорановского кольца. Скручивающий автоморфизм, вообще говоря, зависит от выбора конкретного элемента y. Для кольца псевдодифференциальных операторов и элемента $y = t^{-1}$ этот автоморфизм является тождественным автоморфизмом кольца коэффициентов.

Для каждого подмножества P обобщённого лорановского кольца R обозначим через $\lambda(P)$ образ множества $U_0 \cap P$ при каноническом гомоморфизме U_0 на U_0/U_1 (т. е. $\lambda(P)$ — это множество всех свободных членов всех рядов из $U_0 \cap P$). Непосредственно проверяется, что если P — левый (правый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ является левым (правым) идеалом кольца коэффициентов $A = U_0/U_1$. Таким образом, λ осуществляет отображение решётки левых (правых) идеалов кольца R в решётку левых (правых) идеалов кольца A, причём это отображение сохраняет отношение включения. Кроме того, если P — ненулевой правый (левый) идеал кольца R, то $\lambda(P)$ — ненулевой правый (левый) идеал (действительно, если $f \in P$ и n — такое целое число, что $f \in U_n \setminus U_{n+1}$, то $fx^{-n} \in U_0 \cap P$ или $x^{-n} f \in U_0 \cap P$, при этом элементы fx^{-n} и $x^{-n}f$ имеют ненулевые свободные члены).

Докажем теперь некоторые вспомогательные утверждения об обобщённых лорановских кольцах, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1.2. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов и A — область. Тогда для любых двух ненулевых элементов f и g из R младшая степень их произведения равна сумме их младших степеней.*

Доказательство. Действительно, если n — младшая степень элемента f, а k — младшая степень элемента g, то найдутся такие элементы f' и g' из $U_0 \setminus U_1$, что $f = y^n f'$ и $g = g' y^k$. Поскольку элементы f' и g' имеют ненулевые свободные члены, то и их произведение $f'g'$ имеет ненулевой свободный член и, следовательно, лежит в $U_0 \setminus U_1$.

Произведение $fg = y^n f' g' y^k$ лежит в U_{n+k}. Допустим, оно лежит также в U_{n+k+1}, тогда произведение $f'g' = y^{-n} f g y^{-k}$ лежит в U_1, чего не может быть. Таким образом, произведение $fg = y^n f' g' y^k$ лежит в $U_{n+k} \setminus U_{n+k+1}$, что и требовалось доказать. □

Лемма 1.3. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов, P — правый идеал в R. Допустим, что существуют такие элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $P \cap U_0$, что для каждого элемента g из $P \cap U_0$ выполнено $g_0 \in f_{1,0}A + f_{2,0}A + \ldots + f_{n,0}A$, где $f_{i,0}$ — это свободный член элемента f_i, а g_0 — свободный член элемента g. Тогда правый идеал P порождается n элементами $f_1, f_2, \ldots, f_n$.*

Доказательство. Обозначим через Q правый идеал $f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$ кольца R. Так как все элементы f_i лежат в идеале P и $Q = f_1R + f_2R + \ldots + f_nR$, то $Q \subseteq P$. Допустим, что утверждение леммы не верно. Тогда существует такой ряд $h \in P$, что $h \notin Q$. Без ограничения общности можно считать, что $h \in U_0$ (если это не так, то можно домножить h на элемент y из условия б) в соответствующей степени). Пусть h_0 — свободный член элемента h. По условию

$$h_0 = f_{1,0}a_{1,0} + f_{2,0}a_{2,0} + \ldots + f_{n,0}a_{n,0}$$

для некоторых элементов $a_{1,0}, \ldots, a_{n,0}$ кольца A. Рассмотрим элемент

$$(h - (f_1a_{1,0} + \ldots + f_na_{n,0}))y^{-1} = h' \in U_0.$$

Элемент h' также лежит в $P \cap U_0$, и к нему применимо условие леммы:

$$h'_0 = f_{1,0}a_{1,1} + f_{2,0}a_{2,1} + \ldots + f_{n,0}a_{n,1}.$$

Ряд h'' положим равным

$$(h' - (f_1a_{1,1} + \ldots + f_na_{n,1}))y^{-1}.$$

Цепочку $h, h', h'', \ldots$ можно продолжить до бесконечности. Непосредственно проверяется, что выполнено равенство (в смысле обобщённых бесконечных сумм, которые существуют по условию в))

$$h = f_1(a_{1,0} + a_{1,1}y + a_{1,2}y^2 + \ldots) + \ldots + f_n(a_{n,0} + a_{n,1}y + \ldots).$$

Это противоречит предположению $h \notin Q$. □

Замечание. Аналог леммы 1.3 для левых идеалов также верен.

В качестве простого следствия этой леммы можно получить следующее утверждение (его частные случаи для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов хорошо известны).

Предложение 1.4. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда если свободный член элемента $r \in U_0$ обратим справа* (*слева*) *в кольце A, то и сам элемент r обратим справа* (*слева*) *в кольце R. Кроме того, если A — тело, то и R — тело.*

Доказательство. Пусть свободный член элемента r обратим справа. Тогда применим лемму 1.3, положив n равным 1, f_1 равным r, а идеал P равным всему кольцу R. Получим, что $R = P = rR$, т. е. что элемент r обратим справа.

Пусть теперь A — тело, тогда из уже доказанного вытекает, что всякий элемент u из U_0 с ненулевым свободным членом обратим справа (и слева). Но всякий ненулевой элемент r кольца R может быть представлен в виде произведения uy^n, где $u \in U_0$ имеет ненулевой свободный член, а y — обратимый элемент. Поэтому r является произведением двух обратимых элементов и, следовательно, обратим. $\square$

Ниже будет доказано, что лорановское кольцо является телом тогда и только тогда, когда его кольцо коэффициентов является телом. Для обобщённых лорановских колец это неверно, соответствующий пример будет построен в предложении 4.6 (кольцо дробных p^n-адических чисел $\mathbb{Q}_{p^n}$ при $n > 1$, которое является телом, в то время как его кольцо коэффициентов не является областью).

Продемонстрируем, что к введённому в определении лорановского кольца понятию обобщённой бесконечной суммы можно подойти с топологической точки зрения. Мы представим обобщённую бесконечную сумму как сумму ряда, абсолютно сходящегося в определённой топологии.

Определение. Кольцо A с введённой на нём функцией $\|\cdot\|$ в $[0;+\infty)$ называется *нормированным кольцом*, если:

1) равенство $\|x\| = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) для всех элементов x и y из кольца A выполнено неравенство
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|;$$
3) для всех элементов x и y из кольца A выполнено неравенство
$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|;$$
4) выполнены равенства $\|1\| = \|-1\| = 1$.

В нормированном кольце обычным образом вводятся метрика $\rho(x,y) = \|x-y\|$ и топология, при этом операции умножения и сложения в кольце оказываются равномерно непрерывными функциями от двух переменных. Покажем, что на обобщённом лорановском кольце можно естественным образом ввести топологию, согласованную с нормой.

Предложение 1.5. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, и пусть $f\colon \mathbb{Z} \to (0;+\infty)$ — строго убывающая функция от целого аргумента, обладающая свойствами*
$$f(n+m) \leqslant f(n)f(m), \quad f(0) = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$$
(например, можно взять функцию $f(n) = 2^{-n}$). Тогда на R можно ввести норму так, что:

1) *$\|0\| = 0$ и для ненулевого элемента r из R с младшей степенью n его норма $\|r\|$ равна $f(n)$;*
2) *R с такой нормой будет нормированным кольцом, причём порождаемая нормой топология не зависит от выбора конкретной функции f;*
3) *R — полное метрическое пространство и всякое унитарное подкольцо R', удовлетворяющее условию $\lambda(R') = A$ и содержащее хотя бы одну пару взаимно-обратных элементов из U_1 и U_{-1}, всюду плотно в R.*

Доказательство. То, что для кольца R с указанной нормой выполнены все условия определения нормированного кольца, следует из свойств функции f и из того, что младшая степень произведения двух элементов кольца R больше или равна суммы их младших степеней, а младшая степень суммы двух элементов кольца R больше или равна минимума их младших степеней.

Для того чтобы проверить, что порождаемая нормой топология не зависит от выбора функции f, достаточно доказать, что фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из окрестностей вида $U'_\varepsilon = \{r \mid \|r\| < \varepsilon\}$ при $0 < \varepsilon < 1$, не зависит от выбора функции f. Действительно,

$$U'_\varepsilon = \{r \mid \|r\| < \varepsilon\} = \bigcup_{f(n)<\varepsilon} U_n = U_{g(\varepsilon)},$$

где $g(\varepsilon)$ — минимальное натуральное число n, такое что $f(n) < \varepsilon$. Из свойств функции f следует, что $g(\varepsilon)$ пробегает все натуральные числа при $0 < \varepsilon < 1$, поэтому фундаментальная система окрестностей нуля состоит из U_n при $n > 0$ и только из них. Таким образом, эта система не зависит от выбора функции f.

Проверим, что R — полное метрическое пространство. Пусть есть последовательность Коши $\{r_n\}$ элементов из кольца R. Выделим из неё такую подпоследовательность $\{r'_n\}$, что для всех натуральных n выполнено неравенство $\|r'_{n+1} - r'_n\| \leqslant f(n)$. Тогда для всех натуральных n выполнено $r'_{n+1} - r'_n \in U_n$. По условию в) определения лорановского кольца это означает, что существует обобщённая бесконечная сумма s элементов всех $r'_{n+1} - r'_n$ при $n \geqslant 1$. Тогда элемент $r = r_1 + s$ будет пределом последовательности $\{r'_n\}$, а значит, и последовательности $\{r_n\}$. Докажем это.

По определению обобщённой бесконечной суммы для всех натуральных n выполнено

$$r - r'_n = s - \sum_{i=1}^{n-1}(r'_{i+1} - r'_i) \in U_n,$$

что означает, что $\|r - r'_n\| \leqslant f(n)$, откуда без труда получаем, что элемент r равен пределу последовательности $\{r'_n\}$.

Пусть теперь R' — подкольцо кольца R, удовлетворяющее условию $\lambda(R') = A$ и содержащее пару взаимно-обратных элементов y из U_1 и y^{-1} из U_{-1}. Пусть r — произвольный ненулевой элемент кольца R с младшей степенью n. Нужно доказать, что для любого целого k найдётся такое $r_k \in R'$, что $r - r_k \in U_k$. Будем доказывать это индукцией по $k - n$. Если $n - k \leqslant 0$, то можно взять $r_k = 0$.

Пусть теперь $k-n$ — произвольное целое число. Тогда рассмотрим свободный член r_n элемента $ry^{-n} \in U_0$. По условию $\lambda(R') = A$, поэтому r_n лежит в $\lambda(R')$, следовательно, в $R' \cap U_0$ найдётся элемент r' со свободным членом r_n. Тогда разность $ry^{-n} - r'$ лежит в U_1, и поэтому разность $r - r'y^n$ лежит в U_{n+1}. Тогда к разности $r - r'y^n$ применимо предположение индукции и существует такой элемент r'' из R', что $r - r'y^n - r''$ лежит в U_k. Поскольку элемент $r'y^n + r''$ лежит в R', доказательство завершено. □

Замечание. Рассматривая норму и топологию, введённые в этом предложении, мы получаем, что обобщённая бесконечная сумма в определении обобщённого лорановского кольца является просто суммой абсолютно сходящегося ряда. Полнота обобщённого лорановского кольца как метрического пространства непосредственно связана с условием в) его определения. Так, в кольце многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$, не удовлетворяющем условию в), можно ввести норму и топологию аналогичным образом, но полученное пространство не будет полным. При этом кольцо $A[x, x^{-1}]$ как подкольцо в $A((x))$ удовлетворяет требуемым в предложении условиям и потому является всюду плотным подмножеством пространства $A((x))$.

2. Лорановские кольца

Класс обобщённых лорановских колец оказывается слишком широк для доказательства некоторых утверждений, поэтому понадобится более узкий класс лорановских колец, обладающих дополнительными общими свойствами колец рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов. В предложении 4.6 будет приведён пример кольца $\mathbb{Q}_n$, которое является обобщённым лорановским кольцом, но не является лорановским кольцом. Большинство результатов работы будет доказано для лорановских колец.

Будет дано два определения лорановского кольца и доказана их эквивалентность. Первое определение отражает поэлементный, комбинаторный подход. Это определение отвечает на вопрос, каково должно быть умножение, заданное на обычной аддитивной группе рядов Лорана, чтобы свойства кольца рядов были близки к свойствам колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

Если f — некоторый ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$ и $f = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} f_i x^i$, где $f_k \neq 0$, то произведение $f_k x^k$ называется *младшим членом* ряда f, элемент f_k кольца коэффициентов — *младшим коэффициентом* ряда f, а число k — *младшей степенью* ряда f. Считается, что младшая степень нулевого ряда равна $+\infty$.

Для каждого целого n через V_n обозначается множество всех рядов из $A((x))$, младшая степень которых не ниже n. Множество V_0, состоящее из всех рядов без отрицательных степеней переменной, является подкольцом кольца рядов Лорана $A((x))$, называется *кольцом формальных степенных рядов* и обозначается $A[[x]]$. Кольцо рядов Лорана $A((x))$ совпадает с кольцом частных кольца формальных степенных рядов $A[[x]]$ относительно мультипликативно замкнутого множества $x, x^2, x^3, \ldots$. Подкольцо кольца рядов Лорана $A[x, x^{-1}]$, состоящее из тех рядов, у которых лишь конечное число слагаемых отлично от нуля, называется *кольцом многочленов Лорана*.

Определение. Кольцо R называется *лорановским кольцом в первом смысле* с кольцом коэффициентов A, если существует изоморфизм π абелевой группы по сложению кольца рядов Лорана $A^+((x))$ на абелеву группу по сложению R^+, обладающий перечисленными ниже свойствами:

1) ограничение отображения π на кольцо A является унитарным кольцевым мономорфизмом кольца A в кольцо R;
2) π осуществляет изоморфизм левого модуля ${}_AA((x))$ на левый модуль ${}_AR$, где модуль ${}_AR$ определяется в соответствии с правилом $ar = \pi(a)r$;
3) для любых рядов f и g из $A((x))$ младшая степень ряда $\pi^{-1}(\pi(f)\pi(g))$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g;
4) ограничение отображения π на группу по умножению, порождённую элементом x, является групповым мономорфизмом.

Замечание. Если отождествить каждый ряд f из кольца рядов Лорана $A((x))$ с соответствующим ему элементом $\pi(f)$ лорановского кольца, то, как следует из доказываемой ниже леммы 2.1, определение можно дать так: абелева группа $A^+((x))$ с введённым на ней умножением $\circ$ называется лорановским кольцом, если она является кольцом, удовлетворяет соотношению $(af)\circ(gx^n) = a(f\circ g)x^n$, где $a \in A$, и при этом младшая степень произведения двух рядов больше или равна суммы их младших степеней. Очевидно, что само кольцо $A((x))$ является лорановским кольцом при $\pi = 1_{A((x))}$.

Докажем простые свойства отображения π.

Лемма 2.1. *Пусть R — лорановское кольцо в первом смысле с отображением π из $A((x))$ в R, как в определении. Тогда для любого ряда f из $A((x))$ и любого элемента a кольца A выполнено равенство $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$, а для любого ряда f из $A((x))$ и любого целого числа n выполнено равенство $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$.*

Доказательство. Из условия 2) вытекает, что для всех элементов a и b из кольца A и всех целых чисел n выполнено равенство $\pi(a)\pi(bx^m) = \pi(abx^m)$, а из условия 4) вытекает, что для любого элемента a из кольца A и для любых целых n и m выполнено равенство $\pi(bx^m)\pi(x^n) = \pi(bx^{n+m})$. Таким образом, равенства $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$ и $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$ доказаны, когда f имеет вид bx^m. По закону дистрибутивности умножения эти равенства сразу распространяются на любые конечные суммы одночленов вида bx^m, т. е. на всё кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$. Для любого ряда f из $A((x))$ и для любого целого m можно найти такой многочлен Лорана f', что $f - f' \in V_m$, откуда

$$\pi(a)\pi(f) - \pi(af) = \pi(a)\pi(f - f') - \pi(a(f - f')) \in \pi(V_m).$$

Из-за произвольности m получаем $\pi(a)\pi(f) - \pi(af) = 0$, что и означает, что равенство $\pi(a)\pi(f) = \pi(af)$ распространяется на все ряды f из $A((x))$. Аналогично равенство $\pi(f)\pi(x^n) = \pi(fx^n)$ распространяется на все ряды f из $A((x))$ $\square$

Теперь дадим другое определение лорановского кольца, отражающее структурный подход и отвечающее на вопрос, какие условия надо наложить на кольцо, чтобы его свойства были близки к кольцам косых рядов Лорана и кольцам псевдодифференциальных операторов.

Из определения лорановского кольца в первом смысле не ясна связь между лорановскими кольцами и обобщёнными лорановскими кольцами. Поэтому теперь определим лорановское кольцо, добавив к условиям а)—в) определения обобщённого лорановского кольца дополнительное условие г) (требующее существования вложения кольца коэффициентов в само лорановское кольцо).

Определение. Кольцо R называется *лорановским кольцом во втором смысле*, если в нём определён набор подгрупп по сложению $\{U_i \mid -\infty < i < +\infty\}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

а) для всех целых n и k выполнены включения $U_{n+1} \subseteq U_n$ и $U_n U_k \subseteq U_{n+k}$. Кроме того, объединение U_n по всем целым n даёт всё кольцо R, а пересечение U_n по всем целым n состоит из одного нуля;

б) существует пара элементов $y \in U_1$ и $y^{-1} \in U_{-1}$, таких что $yy^{-1} = y^{-1}y = 1$;

в) для любого набора $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in U_{n+2}, \ldots$ найдётся элемент $u \in U_n$ (*обобщённая бесконечная сумма* элементов u_i), такой что для всех натуральных k

$$\left(u - \sum_{i=n}^{n+k} u_i\right) \in U_{n+k+1};$$

г) канонический кольцевой гомоморфизм кольца U_0 на фактор-кольцо $A = U_0/U_1$ расщепляется, т. е. существует кольцевой мономорфизм $\pi\colon A \to R$, такой что его композиция с каноническим гомоморфизмом U_0 на A даёт тождественный автоморфизм кольца A.

Замечание. Условие г) требует существование вложения кольца коэффициентов в кольцо рядов, но не требует единственности. Действительно, это вложение часто не единственно.

Из определения лорановского кольца во втором смысле непосредственно вытекает, что если два обобщённых лорановских кольца изоморфны (как обобщённые лорановские кольца) и одно из них является лорановским кольцом, то и второе является лорановским кольцом.

Отметим, что определение лорановского кольца во втором смысле, в отличие от определения в первом смысле, симметрично относительно умножения справа или слева. Чтобы доказать эквивалентность двух определений, потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть кольцо R с набором подмножеств $\{U_n\}$ — лорановское кольцо во втором смысле, y — элемент из U_1, как в условии* б)*, а π — вложение $A \equiv U_0/U_1$ в R, как в условии* г)*. Тогда существует и единственно продолжение отображения π до отображения $\bar{\pi}$ из $A((x))$ в R, удовлетворяющее всем условиям определения лорановского кольца в первом смысле, условию $\bar{\pi}(x) = y$ и условию $\bar{\pi}(V_n) \subseteq U_n$ для всех целых n (V_n, как и раньше, обозначает множество всех рядов Лорана с младшей степенью не ниже n).*

Доказательство. Продолжим вложение π до вложения $A((x))$ в R следующим образом. Положим $\bar{\pi}(x) = y$ и $\bar{\pi}(x^{-1}) = y^{-1}$. Для любого элемента a из кольца A и любого целого n положим $\bar{\pi}(ax^n) = \pi(a)y^n \in U_n$. Теперь для каждого ряда $f = f_n x^n + f_{n+1}x^{n+1} + \ldots$ положим $\bar{\pi}(f)$ равным обобщённой бесконечной сумме элементов $\bar{\pi}(f_k x^k)$ для целых k, больших либо равных n. Такая обобщённая бесконечная сумма существует по условию в).

С учётом леммы 1.1 непосредственно проверяется условие 1) определения лорановского кольца в первом смысле, что π — корректно определённый гомоморфизм левых модулей, осуществляющий вложение $A((x))$ в R, и что для любого целого n верно нестрогое включение $\pi(V_n) \subseteq U_n$. Легко видеть, что условие 4) того же определения выполнено в силу определения гомоморфизма $\bar{\pi}$.

Докажем теперь, что $\bar{\pi}$ — сюръективное отображение. Пусть r — произвольный элемент кольца R. Обозначим через n наибольшее целое число, такое что r лежит в U_n (в силу условия а) такое n существует). Тогда ry^{-n} лежит в U_0. Обозначим через r_n образ элемента ry^{-n} при каноническом гомоморфизме $U_0 \to U_0/U_1 = A$. Тогда элемент $r - \bar{\pi}(r_n x^n)$ лежит в U_{n+1}. Применив к элементу $r - \bar{\pi}(r_n x^n)$ ту же процедуру, что и к r, получим, что элемент $r - \bar{\pi}(r_n x^n) - \bar{\pi}(r_{n+1}x^{n+1})$ лежит в U_{n+2}. Продолжим эту процедуру до бесконечности и получим последовательность элементов r_k из A. Непосредственно проверяется, что для ряда $f = r_n x^n + r_{n+1}x^{n+1} + \ldots$ выполнено равенство $\bar{\pi}(f) = r$, таким образом, $\bar{\pi}(A((x))) = R$, и тогда $\bar{\pi}$ — изоморфизм левых модулей над A. Из построения видно также, что $\bar{\pi}^{-1}(U_n) \subseteq V_n$ (с учётом $\bar{\pi}(V_n) \subseteq U_n$ получаем $\bar{\pi}(V_n) = U_n$), поэтому выполнено условие 3) определения в первом смысле: действительно,

$$\bar{\pi}(V_n)\bar{\pi}(V_m) = U_n U_m \subseteq U_{n+m} = \bar{\pi}(V_{n+m}).$$

Таким образом, доказано, что выполнены все условия определения лорановского кольца в первом смысле.

Остаётся доказать, что такое продолжение $\bar{\pi}$ единственно. Пусть существуют два продолжения $\bar{\pi}_1$ и $\bar{\pi}_1$, удовлетворяющих всем необходимым условиям. Для любого ряда $f = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} f_i x^i$ и любого целого $m > n$ рассмотрим равенство

$$f = \sum_{i=n}^{m-1} f_i x^i + \sum_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$$

и обозначим слагаемые в его правой части через $f_{(n,m-1)}$ и $f_{(m,+\infty)}$ соответственно. Получаем

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_1(f) - \bar{\pi}_2(f) &= \bar{\pi}_1\big(f_{(n,m-1)} + f_{(m,+\infty)}\big) - \bar{\pi}_2\big(f_{(n,m-1)} + f_{(m,+\infty)}\big) = \\ &= \left(\sum_{i=n}^{m-1} \pi(f_i)y^i\right) - \left(\sum_{i=n}^{m-1} \pi(f_i)y^i\right) + \bar{\pi}_1\big(f_{(m,+\infty)}\big) - \bar{\pi}_2\big(f_{(m,+\infty)}\big).\end{aligned}$$

В силу того что ряд $f_{(m,+\infty)}$ лежит в V_m, получаем, что элемент $\bar{\pi}_1(f) - \bar{\pi}_2(f)$ кольца R лежит в U_m. Из произвольности m следует, что $\bar{\pi}_1(f) = \bar{\pi}_2(f)$, что и требовалось доказать. □

Следующее предложение доказывает эквивалентность двух определений лорановского кольца.

Предложение 2.3. *Всякое лорановское кольцо R в первом смысле является также лорановским кольцом во втором смысле с набором подмножеств $U_n = \pi(V_n)$, причём кольцо коэффициентов U_0/U_1 изоморфно кольцу A. Кроме того, всякое лорановское кольцо R во втором смысле является также лорановским кольцом в первом смысле с кольцом коэффициентов $A = U_0/U_1$.*

Доказательство. Вторая часть утверждения непосредственно вытекает из определения лорановского кольца во втором смысле и леммы 2.2.

Пусть теперь R — лорановское кольцо в первом смысле с кольцом коэффициентов A. Положим $U_n = \pi(V_n)$ для каждого целого n. Условие а) проверяется непосредственно, в качестве двух взаимно-обратных элементов для условия б) можно взять $y = \pi(x)$ и $y^{-1} = \pi(x^{-1})$.

Поскольку в кольце $A((x))$ выполнены равенства $A \cap V_1 = 0$ и $A + V_1 = V_0$, то в кольце R выполнены равенства $\pi(A) \cap U_1 = 0$ и $\pi(A) + U_1 = U_0$. Отсюда сразу вытекает, что кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу $\pi(A)$ и, следовательно, кольцу A. При этом кольцо $\pi(A) \cong U_0/U_1$ лежит в кольце U_0, поэтому канонический гомоморфизм $U_0 \to U_0/U_1$ расщепляется, что и доказывает, что выполнено условие г). Остаётся доказать, что выполнено условие в).

Действительно, пусть есть набор элементов $u_n \in U_n$, $u_{n+1} \in U_{n+1}$, $u_{n+2} \in \in U_{n+2}, \ldots$ из кольца R. Пусть $f_k = \pi^{-1}(u_k) \in V_k$. Обозначим через $f_{k,i}$ соответствующий коэффициент ряда f_k так, чтобы выполнялось равенство

$$f_k = f_{k,k}x^k + f_{k,k+1}x^{k+1} + \ldots,$$

и составим ряд f, у которого коэффициент при x^k будет равняться $\sum\limits_{i=n}^{k} f_{i,k}$ для целых k, больших либо равных n (коэффициенты при степенях, меньших n, положим равными нулю). Положим теперь $u = \pi(f)$. Непосредственно проверяется, что элемент u удовлетворяет условию в) как обобщённая бесконечная сумма элементов u_n. □

Поскольку два определения эквивалентны, иногда в дальнейшем мы не будем их различать, а будем говорить просто об условиях 1, 2, 3, 4 или а), б), в), г). Кроме того, поскольку существует вложение кольца коэффициентов в лорановское кольцо, то мы часто будем полагать, что кольцо коэффициентов лежит в лорановском кольце. Если какое-нибудь кольцо рассматривается и как лорановское кольцо в первом смысле, и как лорановское кольцо во втором смысле, то предполагается, что отображение π согласовано с фильтрующими множествами U_n так, что $\pi(V_n) = U_n$ (как в лемме 2.2 и предложении 2.3).

Из леммы 2.2 вытекает, что выбрать для лорановского кольца в первом смысле конкретное отображение $\bar{\pi}$ — это всё равно что выбрать для лорановского кольца во втором смысле конкретные π и y, поскольку по π и y можно построить единственное отображение $\bar{\pi}$, а для любого отображения $\bar{\pi}$ можно взять $y = \bar{\pi}(x)$ и вложение π, равное ограничению $\bar{\pi}$ на кольцо коэффициентов A.

Покажем ещё, что понятие обобщённой бесконечной суммы, введённое в определении лорановского кольца во втором смысле, согласовано с формальной бесконечной суммой в кольце $A((x))$.

Лемма 2.4. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть π — биекция из $A((x))$ на R, как в определении лорановского кольца в первом смысле. Тогда для любой последовательности элементов $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ из кольца A элементы $\pi(a_i x^i)$ образуют обобщённую бесконечную сумму, равную $\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots)$.*

Доказательство. Действительно, элемент $\pi(a_i x^i)$ лежит в $U_i = \pi(V_i)$, поэтому элементы $\pi(a_i x^i)$ образуют обобщённую бесконечную сумму. Остаётся доказать, что для любого $k > n$ разность

$$\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \sum_{i=n}^{i\leqslant k} \pi(a_i x^i)$$

лежит в U_{k+1}. Но

$$\begin{aligned}\pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \sum_{i=n}^{i\leqslant k} \pi(a_i x^i) &= \\ = \pi(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots) - \pi\left(\sum_{i=n}^{i\leqslant k} a_i x^i\right) &= \\ = \pi(a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \ldots) \in \pi(V_n) = U_n,&\end{aligned}$$

что и завершает доказательство. □

Пусть R — лорановское кольцо в первом смысле, A — его кольцо коэффициентов, а π — фиксированное отображение из $A((x))$ в R, как в определении. Тогда, если $f = \sum f_i x^i$ — ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, будем для краткости называть элементы f_i из кольца A *левыми коэффициентами* элемента $\pi(f) \in R$. Поскольку отображение π — биекция $A((x))$ на R, у каждого элемента из R существует один и только один набор левых коэффициентов (при фиксированном отображении π). Непосредственно проверяется, что если рассмотреть фильтрацию множествами $U_n = \pi(V_n)$ и элемент u лежит в U_0, то его свободный член совпадает с его левым коэффициентом u_0.

Для кольца рядов Лорана во втором смысле с фиксированным вложением π и элементом y левые коэффициенты будет пониматься как левые коэффициенты для отображения $\bar{\pi}$, построенного по лемме 2.2.

Пусть R — лорановское кольцо в первом смысле, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда для каждого подмножества B кольца A обозначим через $\mu(B)$ множество всех тех элементов кольца R, все левые коэффициенты которых лежат в B. Непосредственно проверяется, что если B — правый идеал кольца A, то $\mu(B)$ — правый идеал кольца R и $\lambda(\mu(B)) = B$. Кроме того, если B — правый идеал, то правый идеал $\mu(B)$ замкнут относительно взятия обобщённых бесконечных сумм, как в условии в). Отображение μ осуществляет вложение решётки правых идеалов кольца A в решётку правых идеалов кольца R (это вложение является гомоморфизмом относительно решёточных операций сложения и пересечения, в том числе и бесконечных сумм и пересечений). Легко видеть, что для любого главного правого идеала aA кольца коэффициентов выполнено равенство $\mu(aA) = \pi(a)R$.

Замечание. Отображение μ, в отличие от отображения λ, определено несимметрично относительно умножений справа и слева. Можно было бы определить его для правых коэффициентов, и тогда оно осуществляло бы вложение решётки левых идеалов. Кроме того, наличие такого отображения существенно требует выполнения условия г) определения лорановского кольца и само отображение (поскольку оно использует понятие левых коэффициентов) зависит от выбора конкретного биективного отображения π из $A((x))$ в R.

Лемма 2.5. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда если B — максимальный правый идеал кольца A, то $\mu(B)$ — максимальный правый идеал кольца R.*

Доказательство. Действительно, пусть r — какой-то элемент кольца R, не лежащий в $\mu(B)$. Тогда достаточно доказать, что $rR + \mu(B) = R$.

Поскольку элемент r не лежит в $\mu(B)$, то какие-то из его левых коэффициентов не лежат в B, выберем из них коэффициент с наименьшим номером (такой, который стоит при самой младшей степени переменной в $A((x))$), пусть этот коэффициент будет r_n. Тогда, вычитая из элемента r элементы, лежащие в $\mu(B)$, можно добиться того, чтобы все левые коэффициенты r с номерами меньше n были равны нулю. Поэтому будем считать, что r_n имеет наименьший номер среди ненулевых коэффициентов. Перейдя от элемента r к элементу $r\pi(x^{-n})$, можно добиться того, чтобы число n было равно нулю. Тогда элемент r лежит в U_0 и его свободный член r_0 не лежит в B.

Поскольку B — максимальный правый идеал кольца A, найдутся такие элементы a из A и b из B, что $r_0a+b = 1$. Тогда у элемента $r\pi(a)+\pi(b)$ свободный член равен единице (а сам этот элемент лежит в $rR + \mu(B)$), следовательно, по предложению 1.4 он обратим в кольце R. Поэтому $rR + \mu(B) = R$, что и требовалось доказать. □

Предложение 2.6. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R лежит в $\mu(J(A))$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Поскольку радикал $J(A)$ совпадает с пересечением всех максимальных правых идеалов B кольца A, то правый идеал $\mu(J(A))$ совпадает с пересечением соответствующих им правых идеалов $\mu(B)$. По лемме 2.5 все правые идеалы $\mu(B)$ являются максимальными правыми идеалами кольца R, поэтому все они содержат радикал $J(R)$. Отсюда получаем, что $J(R)$ лежит в $\mu(J(A))$. □

Лемма 2.7. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть P — такой двусторонний идеал кольца A, что $\mu(P)$ — двусторонний идеал кольца R. Тогда на $R/\mu(P)$ можно естественно ввести структуру лорановского кольца, причём его кольцо коэффициентов будет изоморфно A/P.*

Доказательство. Действительно, проверим определение лорановского кольца в первом смысле. Пусть $B = A/P$. Построим отображение χ из $B((x))$ в $R/\mu(P)$. Пусть b — ряд из $B((x))$, а $\{b_i\}$ — его коэффициенты ($b = \sum b_i x^i$). Пусть для каждого i выполнено равенство $b_i = a_i + P$, где $\{a_i\}$ — набор элементов из кольца A. Тогда обозначим через a ряд $\sum a_i x^i$ и положим $\chi(b) = \pi(a) + \mu(P)$. Непосредственно проверяется, что такое задание не зависит от выбора a_i и что выполнены все свойства, требуемые в определении. □

3. Задание лорановских колец явными соотношениями

Для построения конкретных примеров лорановских колец нужно задать правило умножения рядов из $A((x))$ (поскольку правило сложения зафиксировано в определении лорановского кольца в первом смысле). Однако явная проверка аксиом кольца (особенно закона ассоциативности умножения) является чрезвычайно трудоёмкой процедурой. Поэтому будет целесообразно доказать несколько общих лемм, которые позволят упростить проверку аксиом кольца и построение умножения в кольце. Напомним, что если P — подмножество кольца коэффициентов, то для кольца рядов Лорана $A((x))$ через $\mu(P)$ обозначается множество всех рядов, все канонические коэффициенты которых лежат в P.

Лемма 3.1. *Пусть A — кольцо, а f — отображение, которое каждому одночлену вида ax^m (где a — элемент кольца A, а m — произвольное целое число) ставит в соответствие ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, причём для всех a и b из A и всех целых m выполнено равенство $f((a+b)x^m) = f(ax^m) + f(bx^m)$. Пусть существует такое целое n, что для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ больше или равна $n+m$. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^+((x))$ так, что ограничение f' на множество одночленов вида ax^m будет совпадать с f и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.*

При этом если для некоторого $c \in A$ для всех одночленов ax^n выполнялось условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или для некоторого целого j для всех одночленов ax^n выполнялось условие $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, то такое же условие будет выполнено и для отображения f'. Если же для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ равна $n+m$, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r. Если для некоторой подгруппы P абелевой группы A^+ для любого a

из P и любого целого m ряд $f(ax^m)$ лежит в $\mu(P)$, то для отображения f' будет выполнено условие $f'(\mu(P)) \subseteq \mu(P)$.

Доказательство. Поскольку для каждого фиксированного m отображение f задаёт гомоморфизм абелевой группы по сложению Ax^m, состоящей из всех одночленов вида ax^m, в абелеву группу $A^+((x))$, то отображение f расширяется до гомоморфизма прямой суммы абелевых групп Ax^m в абелеву группу $A^+((x))$. Прямая сумма абелевых групп Ax^m по всем целым m совпадает с кольцом многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$, поэтому можно считать, что f — гомоморфизм абелевой группы $A^+[x, x^{-1}]$ в абелеву группу $A^+((x))$. Условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, если оно было выполнено, при этом, очевидно, сохраняется. Легко видеть, что если для всякого элемента a из A и для всякого целого m младшая степень ряда $f(ax^m)$ равна $n+m$, то для всякого многочлена Лорана r с младшей степенью m младшая степень ряда $f(r)$ будет равна $n+m$. При этом если все коэффициенты многочлена Лорана r лежат в подгруппе P (такой, как в условии), то и все коэффициенты его образа $f(r)$ будут лежать в P, т. е. $f(r) \in \mu(P)$.

Докажем существование такого продолжения f'. Пусть r — произвольный ряд $\sum\limits_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$. Для каждого целого k обозначим многочлен Лорана $\sum\limits_{i=m}^{k} f_i x^i$ через $r^{(k)}$. При $k < m$ будем считать, что $r^{(k)} = 0$.

Будем строить ряд $f'(r)$. Положим, что коэффициент ряда $f'(r)$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k. Легко видеть, что все коэффициенты ряда $f'(r)$ при степенях переменной x младше $n+m$ равны нулю, поэтому ряд $f'(r)$ определён корректно и его младшая степень больше или равна $n+m$. Очевидно, что полученное отображение f' будет эндоморфизмом абелевой группы $A^+((x))$, поскольку $(r+s)^{(k)} = r^{(k)} + s^{(k)}$. Остаётся доказать, что для любого многочлена Лорана r выполнено равенство $f(r) = f'(r)$.

Коэффициент ряда $f'(r)$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k, следовательно, нужно доказать, что для всякого целого k коэффициент ряда $f(r^{(k-n)})$ при x^k равен коэффициенту ряда $f(r)$ при x^k. Для этого достаточно доказать, что $f(r) - f(r^{(k-n)}) \in V_{k+1}$, где через V_m, как и раньше, обозначается множество всех рядов с младшей степенью не ниже m. Но $f(r) - f(r^{(k-n)}) = f(r - r^{(k-n)})$, а многочлен $r - r^{(k-n)}$ является суммой одночленов со степенью выше $k-n$, поэтому ряд $f(r - r^{(k-n)})$ является суммой рядов со степенью выше k и, следовательно, лежит в V_{k+1}, что и требовалось доказать.

Нетрудно проверить по построению, что если было выполнено условие $f(cax^n) = cf(ax^n)$ или $f(ax^n x^j) = f(ax^n)x^j$, то оно сохранится и для отображения f', и что если для всякого многочлена Лорана r с младшей степенью m младшая степень ряда $f(r)$ равна $n+m$, то для любого ряда r с младшей степенью m младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$. Также по построению проверяется необходимое условие, касающееся P и $\mu(P)$.

Теперь докажем единственность такого продолжения f'. Если таких продолжений два, то их разность g также является эндоморфизмом абелевой группы

$A^+((x))$, причём $g(A[x,x^{-1}])=0$ и для любого ряда r младшая степень ряда $g(r)$ больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r. Допустим, что существует такой ряд r, что $g(r)$ отлично от нуля. Пусть k — младшая степень ряда $g(r)$. Тогда ряд $g(r-r^{(k-n)}) = g(r)-g(r^{(k-n)}) = g(r)$ имеет младшую степень k. С другой стороны, поскольку младшая степень ряда $r-r^{(k-n)}$ не ниже $k-n+1$, то младшая степень ряда $g(r-r^{(k-n)})$ не ниже $k+1$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание. С точки зрения топологии, введённой в предложении 1.5, лемма 3.1 является следствием того, что равномерно непрерывное отображение, определённое на всюду плотном подмножестве $A[x,x^{-1}]$, продолжается на всё полное метрическое пространство, причём единственным образом.

Иногда будет удобно пользоваться не непосредственно леммой 3.1, а её простым следствием.

Лемма 3.2. *Пусть A — кольцо, n — целое число, а $f\colon A^+ \to V_n$ — гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие ряд из кольца рядов Лорана $A((x))$, младшая степень которого не ниже n. Тогда отображение f можно единственным образом расширить до эндоморфизма f' абелевой группы $A^+((x))$ так, что ограничение f' на A будет совпадать с f, для всех рядов r и всех целых k будет выполнено равенство $f'(rx^k) = f'(r)x^k$ и при этом для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет больше или равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r.*

Если же для всякого элемента a из A младшая степень ряда $f(a)$ равна n, то для любого ряда r младшая степень ряда $f'(r)$ будет равна $n+m$, где m — младшая степень ряда r. Если для некоторой подгруппы P абелевой группы A^+ выполнено условие $f(P) \subseteq \mu(P)$, то для отображения f' будет выполнено условие $f'(\mu(P)) \subseteq \mu(P)$.

Доказательство. С учётом условия $f'(ax^m) = f'(a)x^m$ существует и единственно продолжение f' отображения f с абелевой группы A^+ на множество всех одночленов вида ax^m (где a — элемент кольца A, а m — произвольное целое число). К отображению f' можно применить лемму 3.1, что и завершает доказательство. □

Лемма 3.3. *Пусть A — кольцо, а $A((x))$ — кольцо рядов Лорана над ним. Пусть $\omega(\cdot,\cdot)$ — функция, которая каждой паре рядов из $A((x))$ ставит в соответствие ряд из $A((x))$. Пусть функция ω удовлетворяет следующим условиям (f, g и h в соотношениях — произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A):*

1) $\omega(f+g,h) \equiv \omega(f,h)+\omega(g,h)$ *и* $\omega(f,g+h) \equiv \omega(f,g)+\omega(f,h)$;
2) *младшая степень ряда $\omega(f,g)$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x,f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1},f)$ — ровно на единицу меньше;*
3) $\omega(1,f) \equiv f$, $\omega(x,1) = x$ *и* $\omega(x^{-1},1) = x^{-1}$;

4) $\omega(af, gx^n) \equiv a\omega(f,g)x^n$;
5) $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x, \omega(x^{n-1}, g))$ *при* $n > 0$ *и* $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{n+1}, g))$ *при* $n < 0$;
6) $\omega(x, \omega(x^{-1}, a)) \equiv a$;
7) $\omega(x^{-1}, ab) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b)$.

Тогда на абелевой группе $A^+((x))$ *можно задать умножение* $f \circ g = \omega(f, g)$ *так, что будут выполнены все аксиомы кольца.*

Доказательство. Всюду в доказательстве f, g и h в соотношениях — произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A.

Доказательство будет основано на следующем приёме: если некоторое соотношение $\beta(f) \equiv \gamma(f)$ выполнено для всех одночленов f вида ax^n и при этом функции β и γ удовлетворяют условиям леммы 3.1, то это соотношение выполнено для всех рядов f из $A((x))$. Это вытекает из того, что по лемме 3.1 продолжение функции $\beta - \gamma$ на всё кольцо $A((x))$ единственно и равно нулю (непосредственно проверяется, что если функции β и γ удовлетворяют условиям леммы 3.1 для каких-то целых n_β и n_γ, то функция $\beta-\gamma$ удовлетворяет условиям леммы 3.1 для $\min(n_\beta, n_\gamma)$). Как правило, в качестве функций β и γ будет браться функция ω с одним зафиксированным аргументом или её композиция с самой собой, поэтому в силу условий 1) и 2) будут выполнены условия леммы 3.1.

Основную трудность представляет доказательство ассоциативности умножения, задаваемого функцией ω. Выведем необходимые соотношения. Из условий 3) и 5) вытекает, что $\omega(x^n, 1) \equiv x^n$, откуда по условию 4) получаем, что $\omega(ax^n, 1) \equiv ax^n$ для всех a из A и, в силу леммы 3.1, $\omega(f, 1) \equiv f$ для всех f из $A((x))$, откуда по условию 4) $\omega(f, x^n) \equiv fx^n$ для всех целых n, в частности $\omega(x^n, x^m) \equiv x^{n+m}$. Из условий 3) и 4) вытекает, что $\omega(a, f) \equiv af$ для всех a и f.

Линейные эндоморфизмы β и β_{-1} абелевой группы $A^+((x))$, задаваемые соотношениями

$$\beta(f) = \omega(x, f), \quad \beta_{-1}(f) = \omega(x^{-1}, f),$$

являются по условию 2) инъективными. Из условий 6) и 4) получаем, что $\omega(x, \omega(x^{-1}, ax^n)) \equiv ax^n$, откуда по лемме 3.1 получаем соотношение $\omega(x, \omega(x^{-1}, f)) \equiv f$. Таким образом, $\beta\beta_{-1} = 1_{A^+((x))}$, поэтому эндоморфизм β сюръективен и, поскольку он инъективен, является автоморфизмом. Тогда β_{-1} совпадает с автоморфизмом β^{-1}. Из условий 3) и 5) тогда получаем, что $\beta^n(f) = \omega(x^n, f)$ для всех целых n. Отсюда для всех целых n и m получаем соотношения

$$\omega(x^n, \omega(x^m, f)) \equiv \omega(x^{n+m}, f) \equiv \omega(\omega(x^n, x^m), f).$$

С помощью 4) отсюда выводим, что для всех целых n и m, всех a из A и всех рядов g выполнено соотношение $\omega(ax^n, \omega(x^m, g)) \equiv \omega(\omega(ax^n, x^m), g)$. Тогда по лемме 3.1 получаем, что $\omega(f, \omega(x^m, g)) = \omega(\omega(f, x^m), g)$ для всех рядов f и g и всех целых m.

Из условий 7), 4) и доказанного выше вытекают соотношения

$$\omega(x^{-1}, \omega(a, bx^n)) \equiv \omega(x^{-1}, abx^n) \equiv \omega(x^{-1}, ab)x^n \equiv$$
$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b)x^n \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), bx^n).$$

По лемме 3.1 получаем соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(a, f)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), f).$$

Подставляя в последнее соотношение $f = \omega(x^n, g)$ и пользуясь ранее выведенными соотношениями, получаем

$$\omega(x^{-1}, \omega(ax^n, g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(\omega(a, x^n), g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(a, \omega(x^n, g))) \equiv$$
$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), \omega(x^n, g)) \equiv \omega(\omega(\omega(x^{-1}, a), x^n), g)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, ax^n), g).$$

Отсюда с помощью леммы 3.1 получаем соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, f), g).$$

Будем по индукции доказывать соотношение

$$\omega(x^{-n}, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^{-n}, f), g)$$

для всех натуральных n. При $n = 1$ оно доказано, пусть оно доказано для некоторого $n = k$. Тогда по условию 5), пользуясь доказанным соотношением для $n = k$ и для $n = 1$, получаем

$$\omega(x^{-k-1}, \omega(f, g)) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{-k}, \omega(f, g))) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(\omega(x^{-k}, f), g)) \equiv$$
$$\equiv \omega(\omega(x^{-1}, \omega(x^{-k}, f)), g) \equiv \omega(\omega(x^{-k-1}, f), g),$$

что и доказывает индуктивный переход. Поэтому соотношение $\omega(x^{-n}, \omega(f, g)) \equiv \equiv \omega(\omega(x^{-n}, f), g)$ доказано для всех натуральных n (для $n = 0$ оно вытекает из условия 3)).

Пусть теперь $n > 0$. Тогда, используя доказанное выше, получаем

$$\omega(\omega(x^n, f), g) \equiv \beta^n(\beta^{-n}(\omega(\omega(x^n, f), g))) \equiv \omega(x^n, \omega(x^{-n}, \omega(\omega(x^n, f), g))) \equiv$$
$$\equiv \omega(x^n, \omega(\omega(x^{-n}, \omega(x^n, f)), g)) \equiv \omega(x^n, \omega(\omega(x^{-n}, \omega(x^n, f)), g)) \equiv$$
$$\equiv \omega(x^n, \omega(\beta^{-n}(\beta^n(f)), g)) \equiv \omega(x^n, \omega(f, g)).$$

Таким образом, соотношение

$$\omega(x^n, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(x^n, f), g)$$

доказано для всех целых n. Рассматривая условие 4), доказываем соотношение

$$\omega(ax^n, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(ax^n, f), g),$$

которое можно с помощью леммы 3.1 расширить на все ряды, получив таким образом соотношение

$$\omega(h, \omega(f, g)) \equiv \omega(\omega(h, f), g).$$

Таким образом, ассоциативность доказана.

Дистрибутивность умножения, задаваемого функцией ω, прямо следует из условия 1), соотношение $\omega(f,1) \equiv f$ было доказано выше, а соотношение $\omega(1,f) \equiv f$ выполнено по условию 3). Таким образом, абелева группа $A^+((x))$ с умножением ω действительно является кольцом. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Пусть $\Delta\colon A^+ \to A^+[[x]]$ — произвольный гомоморфизм абелевых групп, который каждому элементу кольца A ставит в соответствие ряд без отрицательных степеней переменной с коэффициентами из A. Тогда существует и единственна функция $\omega(\cdot,\cdot)$, которая каждой паре рядов из $A((x))$ ставит в соответствие ряд из $A((x))$, удовлетворяющая следующим условиям (f, g и h в соотношениях — произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A):*

1) $\omega(f+g,h) \equiv \omega(f,h) + \omega(g,h)$ *и* $\omega(f,g+h) \equiv \omega(f,g) + \omega(f,h)$;
2) *младшая степень ряда $\omega(f,g)$ больше или равна сумме младших степеней рядов f и g, при этом младшая степень ряда $\omega(x,f)$ всегда ровно на единицу больше младшей степени ряда f, а младшая степень ряда $\omega(x^{-1},f)$ — ровно на единицу меньше;*
3) $\omega(1,f) \equiv f$;
4) $\omega(af, gx^n) \equiv a\omega(f,g)x^n$;
5) $\omega(x^n,g) \equiv \omega(x,\omega(x^{n-1},g))$ *при* $n>0$ *и* $\omega(x^n,g) \equiv \omega(x^{-1},\omega(x^{n+1},g))$ *при* $n<0$;
6) $\omega(x,\omega(x^{-1},a)) \equiv a$;
7) $\omega(x^{-1},a) = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)$.

Если обозначить через $\bar\varphi$ продолжение отображения φ до эндоморфизма $A^+((x))$, которое существует по лемме 3.2, и аналогично через $\overline{\varphi^{-1}}$ и $\bar\Delta$ такие же продолжения φ^{-1} и Δ, а через $\gamma(\cdot)$ обозначить эндоморфизм $-\bar\Delta(\overline{\varphi^{-1}}(\cdot))$, то для функции ω будет выполнено соотношение

$$\omega(x,a) \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} \bar\varphi(\gamma^i(a))x^{i+1},$$

где знак $\sum$ обозначает введённую ранее обобщённую бесконечную сумму в кольце $A((x))$.

Доказательство. Всюду в доказательстве f и g в соотношениях — произвольные ряды из $A((x))$, n и m — произвольные целые числа, а a и b — произвольные элементы кольца A.

Обобщённая бесконечная сумма элементов $\bar\varphi(\gamma^i(a))x^{i+1}$ в условии определена корректно, поскольку младшая степень такого элемента равна $i+1$.

Допустим, что такая функция ω существует, и докажем по индукции, что при соблюдении этих условий для любого натурального n выполнено соотношение (для всех рядов f из $A((x))$)

$$\omega(x,f) = \omega(x,\gamma^n(f)x^n) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar\varphi(\gamma^i(f))x^{i+1}. \qquad (*)$$

Действительно, для $n = 1$ из выполненного по условию 7) равенства
$$\omega(x^{-1}, a) = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)$$
и условия 4) получаем
$$\omega(x^{-1}, ax) = \varphi^{-1}(a) + \Delta(a)x,$$
откуда
$$\omega(x, \omega(x^{-1}, ax)) = \omega(x, \varphi^{-1}(a)) + \omega(x, \Delta(a)x).$$
Применяя условие 6), имеем
$$ax = \omega(x, \varphi^{-1}(a)) + \omega(x, \Delta(a)x),$$
затем, делая замену $b = \varphi^{-1}(a)$, получаем
$$\omega(x, b) = \varphi(b)x - \omega(x, \Delta(\varphi(b))x) = \varphi(b)x + \omega(x, \gamma(b)x).$$
Тогда по лемме 3.2 выполнено соотношение
$$\omega(x, f) \equiv \bar{\varphi}(f)x + \omega(x, \gamma(f)x), \tag{$**$}$$
что и требовалось для доказательства базы индукции.

Допустим теперь, что равенство $(*)$ верно для некоторого n. Тогда, применяя $(**)$ к равенству $(*)$ для n, получаем
$$\omega(x, f) = \bar{\varphi}(\gamma^n(f)x^n)x + \omega(x, \gamma(\gamma^n(f)x^n)x) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}.$$
Отсюда с учётом того, что $\gamma(gx^m) \equiv \gamma(g)x^m$, и условия 4) получаем
$$\omega(x, f) = \omega(x, \gamma^{n+1}(f)x^{n+1}) + \sum_{i=0}^{n} \bar{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1},$$
что завершает индуктивный переход.

Таким образом, равенство $(*)$ верно для всех натуральных n. Тогда получаем, что для всех натуральных n
$$\omega(x, f) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1} \in U_{n+1},$$
что и означает по определению обобщённой бесконечной суммы, что
$$\omega(x, f) = \sum_{i=0}^{+\infty} \bar{\varphi}(\gamma^i(f))x^{i+1}.$$

Будем теперь строить функцию ω, постепенно расширяя область определения, так, чтобы каждый шаг был единственно возможным. Для всех рядов g из $A((x))$ и всех элементов b из A положим, в соответствии с условиями,
$$\omega(1, g) \equiv g,$$
$$\omega(x^{-1}, b) \equiv \varphi^{-1}(b)x^{-1} + \Delta(b),$$

положим также (как показано выше, единственно возможным образом)

$$\omega(x,b) \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} \bar{\varphi}(\gamma^i(b))x^{i+1}.$$

С помощью леммы 3.2 расширим область определения функции ω по второму аргументу до всего кольца $A((x))$. Таким образом, функция $\omega(f,g)$ определена для всех рядов g из $A((x))$ и для рядов $f = x^{-1}, 1, x$. В соответствии с условием 5) для $n > 1$ определим индуктивно $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x, \omega(x^{n-1}, g))$, а для $n < -1$ положим $\omega(x^n, g) \equiv \omega(x^{-1}, \omega(x^{n+1}, g))$. Зададим $\omega(ax^n, g) \equiv a\omega(x^n, g)$ и по лемме 3.1 расширим область определения ω по первому аргументу до всего кольца $A((x))$. Легко проверить, что каждый шаг построения был единственно возможным и что при построении соблюдались все требуемые свойства функции ω, кроме, возможно, 6).

Докажем, что выполнено условие 6). Действительно,

$$\omega(x, \omega(x^{-1}, a)) = \omega(x, \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)) = \omega(x, \varphi^{-1}(a))x^{-1} + \omega(x, \Delta(a)) =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \bar{\varphi}(\gamma^i(\varphi^{-1}(a)))x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \bar{\varphi}(\gamma^i(\Delta(a)))x^{i+1}\right) = a. \quad \square$$

Предложение 3.5. *Пусть A — кольцо, R — множество с бинарными операциями сложения и умножения, а π — отображение из $A((x))$ в R. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *R — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A и отображением π* (*как в определении лорановского кольца в первом смысле*);
2) *π является биективным отображением $A((x))$ на R и существуют автоморфизм φ кольца A и гомоморфизм абелевых групп $\Delta\colon A^+ \to A^+[[x]]$, такие что сложение в R задаётся формулой $\pi(f) + \pi(g) = \pi(f+g)$, а умножение — формулой $\pi(f)\pi(g) = \pi(\omega(f,g))$, где ω — функция, построенная по лемме 3.4 на основе φ и Δ, при этом φ и Δ таковы, что для всех a и b из A выполнено соотношение*

$$\Delta(ab) \equiv \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)\Delta(b).$$

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По определению лорановского кольца π — биективное отображение и выполнено требуемое соотношение $\pi(f) + \pi(g) = \pi(f+g)$. Обозначим через $\beta(\cdot,\cdot)$ функцию, ставящую в соответствие двум рядам из $A((x))$ ряд в $A((x))$ по правилу $\beta(f,g) \equiv \pi^{-1}(\pi(f)\pi(g))$.

Пусть φ — скручивающий автоморфизм для элемента $\pi(x)$ (т. е. автоморфизм фактор-кольца $A = U_0/U_1$, индуцированный автоморфизмом $r \to \pi(x)r(\pi(x))^{-1}$ кольца U_0, сохраняющим U_1). Непосредственно проверяется, что φ^{-1} совпадает с автоморфизмом кольца A, индуцированным автоморфизмом $r \to (\pi(x))^{-1}r\pi(x)$. Тогда для каждого элемента a из A свободный член элемента $(\pi(x))^{-1}\pi(a)\pi(x)$ совпадает с $\varphi^{-1}(a)$, поэтому

$$(\pi(x))^{-1}\pi(a)\pi(x) - \pi(\varphi^{-1}(a)) \in U_1,$$

откуда с учётом леммы 2.1 получаем

$$\pi(x^{-1})\pi(a) - \pi(\varphi^{-1}(a)x^{-1}) \in U_0 = \pi(V_0).$$

Следовательно, образ отображения $\Delta(a) \equiv \beta(x^{-1}, a) - \varphi^{-1}(a)x^{-1}$ лежит в V_0. Очевидно, что Δ — гомоморфизм абелевых групп по сложению.

Непосредственно проверяется, что в силу леммы 2.1 функция β удовлетворяет всем условиям леммы 3.4 для φ и Δ. В силу единственности функции в лемме 3.4 ω совпадает с функцией β.

Остаётся доказать соотношение

$$\Delta(ab) \equiv \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)\Delta(b).$$

В силу ассоциативности умножения в кольце R выполнено соотношение

$$\omega(x^{-1}, \omega(ab)) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$

Пользуясь свойствами отображения ω и соотношением

$$\omega(x^{-1}, a) \equiv \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a),$$

получаем

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \Delta(ab) = \omega(\Delta(a), b) + \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1}, b) = \\ = \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)(\Delta(b) + \varphi^{-1}(b)x^{-1}),\end{aligned}$$

откуда и следует требуемое соотношение.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Чтобы применить к функции ω лемму 3.3, надо проверить равенства

$$\omega(x, 1) = x, \quad \omega(x^{-1}, 1) = x^{-1}, \quad \omega(x^{-1}, ab) \equiv \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$

Первые два равенства непосредственно вытекают из условия

$$\omega(x^{-1}, a) = \varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a).$$

Остаётся доказать третье равенство.

Действительно,

$$\omega(x^{-1}, ab) = \varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \Delta(ab).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\omega(\omega(x^{-1}, a), b) = \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a), b) = \omega(\varphi^{-1}(a)x^{-1}, b) + \omega(\Delta(a), b) = \\ = \varphi^{-1}(a)\omega(x^{-1}, b) + \omega(\Delta(a), b) = \varphi^{-1}(ab)x^{-1} + \varphi^{-1}(a)\Delta(b) + \Delta(a)b,\end{aligned}$$

откуда по условию получаем, что

$$\omega(x^{-1}, ab) = \omega(\omega(x^{-1}, a), b).$$

Применив теперь к функции ω лемму 3.3, получим, что абелева группа $A^+((x))$ с умножением, заданным функцией ω, является кольцом. Тогда кольцом является и само множество R с операциями сложения и умножения. Условия определения лорановского кольца в первом смысле непосредственно вытекают из соответствующих свойств функции ω. $\square$

Предложение 3.5 показывает, что для задания в лорановском кольце умножения единственным образом достаточно задать левые коэффициенты для произведения $x^{-1}a$. Сформулируем соответствующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть R — лорановское кольцо с заданными на нём фильтрующими подгруппами U_n и R' — лорановское кольцо с заданными на нём фильтрующими подгруппами U_n'. Пусть их кольца коэффициентов U_0/U_1 и U_0'/U_1' изоморфны одному и тому же кольцу A. Пусть y и y' — обратимые элементы из U_1 и U_1', как в определении лорановского кольца во втором смысле, а π и π' — вложения соответственно из A в R и из A в R', как в том же определении. Тогда если для любого элемента a кольца A левые коэффициенты элемента $y^{-1}\pi(a)$ совпадают с левыми коэффициентами элемента ${y'}^{-1}\pi'(a)$, то существует и единствен изоморфизм τ обобщённых лорановских колец из R в R', переводящий y в y', а $\pi(a)$ в $\pi'(a)$ (для всех элементов a из A).*

Доказательство. Как показано в лемме 2.2, можно построить продолжение отображения π до биективного отображения $A((x))$ на R и продолжение π' до биективного отображения $A((x))$ на R' так, чтобы выполнялись равенства $\pi(x) = y$, $\pi(x^{-1}) = y^{-1}$, $\pi'(x) = y'$, $\pi'(x^{-1}) = {y'}^{-1}$, при этом для π и π' будут выполнены условия определения лорановского кольца в первом смысле.

По предложению 3.5 найдутся φ и Δ, задающие умножение в кольце R. Кроме того, по лемме 3.4 для любого элемента a из A будет выполнено соотношение

$$\pi(x^{-1})\pi(a) = \pi(\varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)).$$

С учётом того, что $\Delta(a)$ имеет вид $\delta_0(a)+\delta_1(a)x+\ldots$ (формальный бесконечный ряд в $A((x))$) по лемме 2.4, а также с учётом равенства $\pi(x^{-1}) = y^{-1}$ получаем, что в правой части равенства

$$\pi(x^{-1})\pi(a) = \pi(\varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a))$$

стоят левые коэффициенты элемента $\pi(x^{-1})\pi(a)$, поэтому по условию верно равенство

$$\pi'(x^{-1})\pi'(a) = \pi'(\varphi^{-1}(a)x^{-1} + \Delta(a)).$$

Оно показывает, что в кольце R' умножение задаётся теми же самыми φ и Δ, что и в R, откуда по предложению 3.5 вытекает изоморфность R и R' как колец с изоморфизмом $\pi'\pi^{-1}$ из R в R'. То, что этот изоморфизм является также изоморфизмом обобщённых лорановских колец (т. е. переводит фильтрующие множества U_n в U_n'), следует из свойств отображений π и π'.

Единственность изоморфизма τ следует из того, что его значение зафиксировано на одночленах вида ay^n, а в силу того что изоморфизм обобщённых лорановских колец должен сохранять обобщённую бесконечную сумму, значение τ зафиксировано и на бесконечных суммах таких одночленов. Остаётся заметить, что всякий элемент лорановского кольца может быть представлен в виде обобщённой бесконечной суммы таких одночленов. □

Замечание. Как говорилось выше, два определения лорановского кольца отражают два подхода: один — поэлементный, с построением кольца через явные соотношения, а второй — структурный, через наложение на кольцо определённых условий. Определение изоморфизма обобщённых лорановских колец дано с помощью структурного подхода, поэтому, вообще говоря, изоморфные лорановские кольца могут задаваться неодинаковыми поэлементными соотношениями. Лемма 3.6 позволяет находить изоморфизмы между лорановскими кольцами, заданными разными соотношениями. Например, это будет проделано в предложении 4.5 и предложении 7.6.

Докажем ещё вспомогательное утверждение о двусторонних идеалах в лорановских кольцах.

Лемма 3.7. *Пусть R — лорановское кольцо (совпадающее с $A^+((x))$ как группа по сложению), A — его кольцо коэффициентов, причём умножение в R задано с помощью автоморфизма φ и отображения Δ из A в $A((x))$, как в предложении* 3.5 (*так, что* $x^{-1}a = \varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a)$). *Пусть P — двусторонний идеал в кольце A. Тогда правый идеал $\mu(P)$ в кольце R является двусторонним тогда и только тогда, когда $\varphi(P) = P$ и $\Delta(P) \subseteq \mu(P)$.*

Доказательство. Пусть $\mu(P)$ — двусторонний идеал. Тогда для любого элемента a из P выполнено $\varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a) = x^{-1}a \in \mu(P)$, откуда $\varphi^{-1}(P) \subseteq P$ и $\Delta(P) \subseteq P$. С учётом того, что свободный член ряда xax^{-1} равен $\varphi(a)$, получаем, что $\varphi(P) \subseteq P$. Таким образом, $\varphi(P) = P$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\varphi(P) = P$ и $\Delta(P) \subseteq \mu(P)$. Докажем, что $x^{-1}\mu(P) \subseteq \mu(P)$, т. е. что для любого f из $\mu(P)$ выполнено $x^{-1}f \in \mu(P)$. Действительно, для рядов $f \in \mu(P)$ вида ax^0 имеем $x^{-1}f = x^{-1}a = \varphi^{-1}(a)x^{-1}+\Delta(a) \in \mu(P)$. По лемме 3.2 получаем, что свойство $x^{-1}f \in \mu(P)$ выполнено для всех рядов f из $\mu(P)$, т. е. $x^{-1}\mu(P) \subseteq \mu(P)$. По той же лемме эндоморфизмы $\bar{\varphi}$ и $\bar{\Delta}$ абелевой группы $A^+((x))$ переводят $\mu(P)$ в себя. Тогда в силу формулы для xa, выведенной в предложении 3.5, для всех a из P выполнено включение $xa \subseteq \mu(P)$. Тогда по лемме 3.2 получаем, что $x\mu(P) \subseteq \mu(P)$.

Поскольку P — двусторонний идеал, то для любого a из A выполнено включение $a\mu(P) \subseteq \mu(P)$. Учитывая включения $x^{-1}\mu(P) \subseteq \mu(P)$ и $x\mu(P) \subseteq \mu(P)$, получаем, что для любого одночлена ax^m выполнено включение $ax^m\mu(P) \subseteq \mu(P)$. Поскольку правый идеал $\mu(P)$ замкнут относительно взятия обобщённых бесконечных сумм, то включение $f\mu(P) \subseteq \mu(P)$ обобщается на любые обобщённые бесконечные суммы одночленов вида ax^m. Но такие суммы и составляют всё кольцо R. Таким образом, получаем, что $R\mu(P) \subseteq \mu(P)$, что и требовалось доказать. □

4. Примеры лорановских колец

Предложение 3.5, хотя и даёт формально полное описание лорановских колец, не позволяет строить их в общем случае достаточно эффективно, поскольку проверка требуемого соотношения на φ и Δ в общем виде не существенно проще, чем непосредственная проверка аксиом кольца. Тем не менее частный случай, когда образ гомоморфизма абелевых групп Δ содержится не только в $A[[x]]$, но и в A, позволяет построить несколько важных примеров. В этом случае (после переобозначения $\delta = \Delta$) условие, накладываемое в предложении 3.5 на φ и δ, упрощается до равенства $\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b)$.

Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, а δ — φ^{-1}-*дифференцирование* (т. е. эндоморфизм абелевой группы по сложению A^+, удовлетворяющий условию $\delta(ab) = \delta(a)b + \varphi^{-1}(a)\delta(b)$ для всех a и b из A). Тогда по предложению 3.5 с помощью φ и δ строится лорановское кольцо $A((x, \varphi, \delta))$, которое будет называться *кольцом косых рядов Лорана с косым дифференцированием*. Тождественно нулевой эндоморфизм δ всегда является φ^{-1}-дифференцированием, в этом случае получаем кольцо косых рядов Лорана. В случае $\varphi = 1_A$ φ^{-1}-дифференцирование становится обычным дифференцированием, и кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием в этом случае изоморфно кольцу псевдодифференциальных операторов.

Кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием является основным примером лорановского кольца, хотя ниже будет показано, что можно построить и другие. Кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов, как легко видеть, являются его частными случаями.

Предложение 4.1. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда всем условиям определения лорановского кольца в первом смысле удовлетворяет кольцо рядов Лорана $R = A((x, \varphi))$ с естественным изоморфизмом абелевых групп $A((x, \varphi))$ и $A((x))$, который переводит формальную сумму $a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$ в одном кольце в точно такую же формальную сумму в другом кольце. При этом если $a_n, a_{n+1}, \ldots$ — произвольная последовательность элементов кольца A, то обобщённая бесконечная сумма одночленов $a_i x^i$ по $i \geqslant n$ всегда определена и совпадает с формальным рядом $a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$.*

Предложение 4.1 проверяется непосредственно.

Из предложения 3.5 и леммы 2.4 вытекает утверждение, в котором производится построение кольца псевдодифференциальных операторов, упоминавшегося ранее.

Следствие 4.2. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда существует и единственно с точностью до изоморфизма кольцо $A((t^{-1}, \delta))$, состоящее из формальных сумм $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^i$, где t — переменная, m — целое (возможно, отрицательное) число, а коэффициенты f_i ряда f — элементы кольца A, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1) *кольцо $A((t^{-1}, \delta))$ является лорановским кольцом, если в качестве отображения π из $A((x))$ в $A((t^{-1}, \delta))$ в определении лорановского кольца в первом смысле взять отображение, переводящее формальную сумму $\sum\limits_{i=m}^{+\infty} f_i x^i$ в формальную сумму $\sum\limits_{i=-\infty}^{-m} f_{-i} t^i$;*

2) *в кольце* $A((t^{-1}, \delta))$ *для каждого элемента* a *из кольца* A *выполнено равенство* $ta = at + \delta(a)$.

При этом если $a_n, a_{n+1}, \ldots$ — *произвольная последовательность элементов кольца* A, *то обобщённая бесконечная сумма одночленов* $a_i x^i$ *по* $i \geqslant n$ *всегда определена и совпадает с формальным рядом* $a_n t^{-n} + a_{n+1} t^{-n-1} + \ldots$. *Кроме того, в кольце* $A((t^{-1}, \delta))$ *для каждого элемента* a *из кольца* A *будет выполнено равенство*

$$t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1}.$$

Выбранный метод построения кольца псевдодифференциальных операторов позволил не задавать произведение двух рядов явной формулой для коэффициентов, а доказать существование такого произведения итеративной процедурой. Тем не менее выпишем явную формулу, хотя проверка с её помощью каких-либо свойств произведения является трудоёмкой вычислительной процедурой.

Для выписывания формулы умножения потребуется дополнительное обозначение. Обычно биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ определяются только для неотрицательных целых n и неотрицательных целых $k \leqslant n$ с помощью формулы

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

где предполагается, что $0! = 1$. Распространим это же определение на все целые значения n и все неотрицательные целые значения k. При этом если $k > n \geqslant 0$, то $\binom{n}{k} = 0$. Для того чтобы доказать, что для отрицательных n число $\binom{n}{k}$ является целым, отметим, что

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} = \\ = (-1)^k \frac{(n)(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Лемма 4.3. *Пусть* A — *кольцо,* δ — *дифференцирование в нём и* $A((t^{-1}, \delta))$ — *кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любого целого* n *и для любого элемента* a *из* A *в кольце* $A((t^{-1}, \delta))$ *выполнено равенство*

$$t^n a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i}.$$

Доказательство. В рамках этого доказательства для обозначения обобщённой бесконечной суммы из условия в) определения лорановского кольца будет использоваться обычный знак суммирования $\sum$. При этом используется то, что формальная сумма в записи элементов кольца псевдодифференциальных операторов является частным случаем обобщённой бесконечной суммы.

Заметим, что для неотрицательных n в равенстве

$$t^n a = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i}$$

бесконечная сумма является фактически конечной, поскольку для всех $i > n$ биномиальный коэффициент $\binom{n}{i}$ равен нулю.

Докажем требуемое соотношение по индукции для неотрицательных n. Для $n = 0$ соотношение тривиально, для $n = 1$ оно совпадает с соотношением $ta = at + \delta(a)$, которое входит в определение кольца псевдодифференциальных операторов. Пусть теперь оно доказано для некоторого n, докажем его тогда для $n + 1$.

Действительно, имеем

$$t^{n+1}a = t(t^n a) = t\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^i(a) t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\delta^i(a)t + \delta^{i+1}(a)) t^{n-i} =$$
$$= at^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \delta^i(a) t^{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \delta^i(a) t^{n+1-i}.$$

Остаётся доказать требуемое соотношение для отрицательных n. Для $n = -1$ оно совпадает с соотношением

$$t^{-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \delta^i(a) t^{-i-1},$$

которое выполнено по следствию 4.2. Пусть оно доказано для некоторого $-n$, где n — натуральное число. С учётом леммы 1.1 получаем

$$t^{-n-1}a = t^{-1}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{-n}{i} \delta^i(a) t^{-n-i} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} t^{-1} \binom{-n}{i} \delta^i(a) t^{-n-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-n}{i} \delta^{i+j}(a) t^{-j-1} \right) t^{-n-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-n}{i} \delta^{i+j}(a) t^{-n-i-j-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{-n}{i-j} \delta^i(a) t^{-n-i-1}.$$

Учитывая равенство $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ и делая замену $j = i - j$, получаем, что

$$t^{-n-1}a = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n+j-1}{j} \right) \delta^i(a) t^{-n-i-1}.$$

С учётом чисто арифметического равенства

$$\sum_{j=0}^{i} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+i}{i},$$

которое легко доказывается индукцией по i, получаем равенство

$$t^{-n-1}a=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\binom{n+i}{i}\delta^i(a)t^{-n-i-1}=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{-n-1}{i}\delta^i(a)t^{-n-i-1},$$

что и требовалось доказать. □

Теперь можно выписать явную формулу для умножения двух рядов.

Предложение 4.4. *Пусть A — кольцо, δ — дифференцирование в нём и $A((t^{-1},\delta))$ — кольцо псевдодифференциальных операторов. Тогда для любых двух элементов*

$$f=\sum_{i=-\infty}^{n}f_it^i\in A((t^{-1},\delta)),\quad g=\sum_{i=-\infty}^{m}g_it^i\in A((t^{-1},\delta))$$

выполнено равенство

$$fg=\sum_{k=-\infty}^{n+m}\Bigg(\sum_{i=k-m}^{n}\ \sum_{j=k-i}^{m}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)\Bigg)t^k.$$

Доказательство. В рамках этого доказательства обобщённая бесконечная сумма из условия в) определения лорановского кольца обозначается обычным знаком суммирования $\sum$. При этом используется то, что формальная сумма в записи элементов кольца псевдодифференциальных операторов является частным случаем обобщённой бесконечной суммы.

Действительно, применяя лемму 1.1 и формулу, доказанную в лемме 4.3, получаем

$$\begin{aligned}fg&=\Bigg(\sum_{i=-\infty}^{n}f_it^i\Bigg)\Bigg(\sum_{i=-\infty}^{m}g_it^i\Bigg)=\sum_{i=-\infty}^{n}\ \sum_{j=-\infty}^{m}f_it^ig_jt^j=\\&=\sum_{i=-\infty}^{n}\ \sum_{j=-\infty}^{m}f_i\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{i}\binom{i}{i-k}\delta^{i-k}(g_j)t^k\Bigg)t^j=\\&=\sum_{i=-\infty}^{n}\ \sum_{j=-\infty}^{m}\ \sum_{k=-\infty}^{i}\binom{i}{i-k}f_i\delta^{i-k}(g_j)t^{k+j}=\\&=\sum_{i=-\infty}^{n}\ \sum_{j=-\infty}^{m}\ \sum_{k=-\infty}^{i+j}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)t^k.\end{aligned}$$

Положив временно, что для отрицательных k биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ равен нулю, можно расширить в последнем выражении верхний предел суммирования по k до $n+m$ (сделав его, таким образом, не зависящим от i и j) и тогда по лемме 1.1 можно поменять порядок суммирования. Получаем

$$fg=\sum_{k=-\infty}^{n+m}\ \sum_{i=-\infty}^{n}\ \sum_{j=-\infty}^{m}\binom{i}{i+j-k}f_i\delta^{i+j-k}(g_j)t^k.$$

Теперь учтём, что при $i+j-k<0$ коэффициент $\binom{i}{i+j-k}$ равен нулю, что позволяет изменить нижние пределы суммирования по i и j. Получаем

$$fg = \sum_{k=-\infty}^{n+m} \sum_{i=k-m}^{n} \sum_{j=-k-i}^{m} \binom{i}{i+j-k} f_i \delta^{i+j-k}(g_j) t^k,$$

что и требовалось доказать. □

Автоморфизм φ кольца A называется *внутренним*, если существует такой обратимый элемент b кольца A, что для всех элементов a кольца A выполнено равенство $\varphi(a) = bab^{-1}$. Легко проверить, что всякий обратимый элемент b кольца A задаёт внутренний автоморфизм.

Дифференцирование δ кольца A называется *внутренним*, если существует такой элемент b кольца A, что для всех элементов a кольца A выполнено равенство $\delta(a) = ba - ab$. Легко проверить, что всякий элемент b кольца A задаёт внутреннее дифференцирование.

По аналогии с внутренним дифференцированием определим внутреннее φ^{-1}-дифференцирование: φ^{-1}-дифференцирование δ кольца A называется *внутренним*, если существует такой элемент b кольца A, что для всех элементов a кольца A выполнено равенство $\delta(a) = ba - \varphi^{-1}(a)b$. Легко проверить, что всякий элемент b кольца A задаёт внутреннее φ^{-1}-дифференцирование.

Внутренние автоморфизмы и внутренние φ^{-1}-дифференцирования, как показывает следующее утверждение, не позволяют строить принципиально новых примеров колец рядов.

Предложение 4.5. *Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, а δ — φ^{-1}-дифференцирование в кольце A. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *автоморфизм φ является внутренним и φ^{-1}-дифференцирование δ является внутренним*;
2) *существует изоморфизм π кольца обычных рядов Лорана $A((x))$ на кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием $A((y,\varphi,\delta))$, сохраняющий кольцо коэффициентов A (т. е. $\pi(A) = A$) и сохраняющий младшую степень рядов.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть существует такой обратимый элемент b из A, что $\varphi(a) = bab^{-1}$ для всех a из A, и такой элемент c из A, что $\delta(a) = ca - \varphi^{-1}(a)c$ для всех a из A. Легко проверяется, что ряд $b(y^{-1}-c)$ в кольце $A((y,\varphi,\delta))$ обратим (как произведение обратимых элементов) и его обратный z имеет младшую степень 1.

Для любого элемента a из кольца коэффициентов имеем

$$\begin{aligned} z^{-1}a = b(y^{-1}-c)a = by^{-1}a - bca = \\ = bb^{-1}aby^{-1} + bca - abc - bca = aby^{-1} - abc = az^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому по лемме 3.6 строится изоморфизм лорановских колец между $A((x))$ и $A((y,\varphi,\delta))$, действующий тождественно на всех элементах кольца коэффициентов A и переводящий x в z.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть π — такой изоморфизм, как описано в условии. Тогда ряд $f = \pi^{-1}(y)$ имеет младшую степень 1 и представляется в виде $f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. Ряд $g = \pi^{-1}(y^{-1})$ является обратным к f и имеет степень -1, поэтому, приравнивая коэффициенты в равенствах $fg = 1$ и $gf = 1$, сразу получаем $f_1 g_{-1} = 1$ и $g_{-1} f_1 = 1$, откуда $g_{-1} = f_1^{-1}$. Тогда элемент $\varphi(a)$ равен свободному члену ряда $yay^{-1} = \pi(f)a\pi(g) = \pi(f\pi^{-1}(a)g)$. Поскольку свободный член ряда $f\pi^{-1}(a)g$ равен $f_1\pi^{-1}(a)f_1^{-1}$, получаем, что выполнено равенство $\varphi(a) = \pi(f_1)a\pi(f_1^{-1})$, и, таким образом, автоморфизм φ является внутренним.

Заметим теперь, что $\delta(a) = y^{-1}a - \varphi^{-1}(a)y^{-1}$. С учётом того, что ряд $\pi^{-1}(y^{-1}) = g$ имеет вид $f_1^{-1}x^{-1} + g_0 + \ldots$, получаем, что

$$\begin{aligned}\delta(a) &= \pi(g)a - \varphi^{-1}(a)\pi(g) = \pi(g\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(\varphi^{-1}(a))g) = \\ &= \pi(g\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(\pi(f_1^{-1})a\pi(f_1))g) = \pi(g\pi^{-1}(a) - f_1^{-1}\pi^{-1}(a)f_1 g).\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при нулевой степени переменной, получаем

$$\delta(a) = \pi(g_0)a - \pi(f_1^{-1})a\pi(f_1)\pi(g_0) = \pi(g_0)a - \varphi^{-1}(a)\pi(g_0).$$

Но это и означает, что δ — внутреннее φ^{-1}-дифференцирование. $\square$

Покажем, что на аддитивной группе рядов Лорана можно задать такое умножение, что получится лорановское кольцо, не являющееся кольцом косых рядов Лорана с косым дифференцированием. Построим кольцо, в котором произведение переменной с коэффициентом будет удовлетворять соотношению $x^{-1}a = ax^{-1} + \delta(a)x$.

Пусть F — поле, а $F[[z^{-1}]]$ — кольцо многочленов от формальной переменной z^{-1} над ним. Пусть A — фактор-кольцо кольца $F[[z^{-1}]]$ по идеалу, порождённому z^{-4}. В кольце A можно ввести дифференцирование γ по обычному правилу $\gamma(cz^{-n}) = -ncz^{-n-1}$. Поскольку идеал, порождённый z^{-4}, инвариантен относительно дифференцирования γ, то оно индуцирует дифференцирование δ в кольце A. Отметим, что множество $\delta(A)$ совпадает с идеалом, порождённым z^{-2}, и поэтому $\delta(A)\delta(A) = 0$.

Будем строить лорановское кольцо R с кольцом коэффициентов A согласно предложению 3.5. Возьмём φ равным тождественному автоморфизму кольца A и $\Delta(a) = \delta(a)x$. Тогда, чтобы R было кольцом, нужно доказать, что для функции ω, построенной по лемме 3.4, и отображения Δ выполнено соотношение

$$\Delta(ab) = \omega(\Delta(a), b) + \varphi^{-1}(a)\Delta(b)$$

для всех a и b из A. Подставляя $\Delta(a) \equiv \delta(a)x$ и $\varphi \equiv 1_A$, получаем, что надо доказать равенство $\delta(ab)x = \omega(\delta(a)x, b) + a\delta(b)x$, т. е. нужно доказать, что $\omega(\delta(a)x, b) = \delta(a)bx$. Согласно свойствам функции ω достаточно доказать, что $\delta(a)\omega(x, b) = \delta(a)bx$.

Непосредственно проверяется, что $\bar{\varphi}$ и $\overline{\varphi^{-1}}$ совпадают с тождественным автоморфизмом кольца $A((x))$ и $\bar{\Delta}(ax^k) = \delta(a)x^{k+1}$. С учётом этого по леммам

3.4 и 2.4 получаем, что

$$\omega(x,b)=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\delta^i(b)x^{2i+1},$$

и тогда

$$\delta(a)\omega(x,b)=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\delta(a)\delta^i(b)x^{2i+1}.$$

Пользуясь равенством $\delta(A)\delta(A)=0$, получаем, что $\delta(a)\omega(x,b)=\delta(a)bx$, что и требовалось доказать.

Приведём также пример обобщённого лорановского кольца, не являющегося лорановским кольцом.

Пусть n — произвольное целое число, большее единицы. По аналогии с кольцом целых p-адических чисел назовём *кольцом целых n-адических чисел* кольцо всех последовательностей элементов $a_1\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a_2\in\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z},\ldots$, таких что $a_k\equiv a_{k-1}\pmod{n^{k-1}}$ с почленным сложением и умножением. Непосредственно проверяется, что это определение корректно и что кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ естественным образом лежит в кольце $\mathbb{Z}_n$ (целому числу a можно поставить в соответствие последовательность остатков от деления a на n^k). *Кольцом дробных n-адических чисел* $\mathbb{Q}_n$ назовём кольцо частных кольца целых n-адических чисел по мультипликативно замкнутому множеству $n,n^2,n^3,\ldots$. Кольцо целых p-адических чисел является частным случаем кольца целых n-адических чисел (при простом $n=p$), а поле p-адических чисел является частным случаем кольца дробных n-адических чисел.

Предложение 4.6. *Для любого целого n, большего единицы, кольцо дробных n-адических чисел $\mathbb{Z}_n$ является обобщённым лорановским кольцом, если положить $U_k=n^k\mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n$ — кольцо целых n-адических чисел, вложенное в $\mathbb{Q}_n$. При этом кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и не вкладывается в кольцо $\mathbb{Q}_n$ как унитарное подкольцо.*

Кольцо $\mathbb{Q}_n$ является полем тогда и только тогда, когда $n=p^m$, где p — простое, а m — натуральное число, а для других n оно не является не только полем, но и областью.

Доказательство. Нужно проверить три условия определения обобщённого лорановского кольца. Докажем, что пересечение U_k по всем целым k состоит из одного нуля, остальная часть условия а) проверяется тривиально. Достаточно заметить, что для положительных k множество $U_k\subset U_0=\mathbb{Z}_n$ содержит только целые n-адические числа и состоит из тех и только тех последовательностей $\{a_i\}$ (удовлетворяющих условию n-адического числа), у которых первые k членов равны нулю. Отсюда сразу вытекает, что пересечение U_k по положительным k состоит из одного нуля.

Условие б) также выполнено: достаточно взять в качестве взаимно-обратных элементов $n\in U_1$ и $n^{-1}\in U_{-1}$.

Пусть теперь $u_k \in U_k$, $u_{k+1} \in U_{k+1}, \ldots$ — последовательность элементов, как в условии в). Можно откинуть любое конечное количество начальных членов этой последовательности, определить обобщённую бесконечную сумму оставшихся элементов, а затем добавить к этой сумме прежде откинутые члены. Поэтому можно считать, что k — неотрицательное целое число. Добавив в сумму конечное число нулевых слагаемых в начале, можно сделать так, чтобы k равнялось нулю. Определим теперь обобщённую бесконечную сумму v как последовательность $v_i \in \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$, где v_i равно $\sum\limits_{j=0}^{i-1} u_j i$, $u_j i \in \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$ — соответствующий член последовательности, определяющей элемент u_j кольца целых n-адических чисел. Непосредственно проверяется, что v и есть искомая сумма.

Из того что U_1 содержит те и только те последовательности, у которых первый член нулевой, очевидным образом следует, что кольцо U_0/U_1 изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Кольцо $\mathbb{Q}_n$ по сложению является абелевой группой без кручения (поскольку содержит поле рациональных чисел), следовательно, кольцо U_0/U_1 не может быть в него вложено.

Докажем теперь, что кольцо целых (дробных) n^m-адических чисел изоморфно кольцу целых (дробных) n-адических чисел для любого натурального m, тогда будет доказано, что для простого p кольцо дробных p^m-адических чисел является полем (хорошо известно, что кольцо дробных p-адических чисел является полем). Действительно, последовательности $a_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}, \ldots$, определяющей элемент a кольца $\mathbb{Z}_n$, можно поставить в соответствие её подпоследовательность $a_m \in \mathbb{Z}/n^m\mathbb{Z}$, $a_{2m} \in \mathbb{Z}/n^2m\mathbb{Z}, \ldots$, определяющую элемент из кольца $\mathbb{Z}_{n^m}$. И наоборот, каждой последовательности $a_m \in \mathbb{Z}/n^m\mathbb{Z}$, $a_{2m} \in \mathbb{Z}/n^2m\mathbb{Z}, \ldots$ можно поставить в соответствие последовательность $a_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}, \ldots$, определив недостающие члены из условия $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{n^{k-1}}$. Непосредственно проверяется, что эти соответствия определяют изоморфизм колец.

Пусть теперь n — натуральное число, большее единицы и не являющееся степенью простого числа. Тогда можно представить число n в виде ab, где a и b — взаимно-простые натуральные числа, отличные от единицы. Определим целое n-адическое число v такой последовательностью v_i, что $v_1 = a$ и v_i делится на a^i в кольце $\mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$. Такую последовательность можно построить индуктивно. Действительно, пусть $v_i \equiv a^i q_i \pmod{n^i}$ для некоторого целого q_i. Поскольку целые числа a и b^i взаимно просты, то a обратимо в кольце вычетов по модулю b^i и можно найти такое q_{i+1}, что $aq_{i+1} \equiv q_i \pmod{b^i}$. Тогда $a^{i+1}q_{i+1} \equiv a^i q_i \pmod{a^i b^i}$, что и требовалось.

Аналогично можно определить целое n-адическое число w так, чтобы $w_1 = b$ и w_i делилось на b^i в кольце $\mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$. Элементы w и v отличны от нуля (поскольку w_1 и v_1 отличны от нуля), при этом $wv = 0$, поскольку для каждого натурального i элемент $w_i v_i$ делится на $a^i b^i = n^i$ в кольце $\mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$, а следовательно, равен нулю. Поэтому кольцо $\mathbb{Q}_n$ не является областью и, как следствие, не является телом. $\square$

5. Тела, нётеровы и артиновы кольца

Кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием является по построению лорановским кольцом, поэтому на него переносятся все результаты, которые получены для лорановских колец. Эти же результаты переносятся на кольца косых рядов Лорана и на кольца псевдодифференциальных операторов как на его частные случаи. Будем (в соответствии с ранее введёнными обозначениями) полагать, что в кольцах косых рядов Лорана с косым дифференцированиям U_n обозначает множество всех рядов, в которые переменная входит в степени не ниже n, а в кольцах псевдодифференциальных операторов — множество всех рядов, в которые переменная входит в степени не выше $-n$. Сохраняются обозначения свободного члена, отображения λ и μ и др.

С учётом условия г) определения лорановского кольца из предложения 1.4 можно получить утверждение, частные случаи которого для кольца косых рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов хорошо известны, а для кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием были получены в [13].

Предложение 5.1. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Кольцо R является телом тогда и только тогда, когда кольцо A является телом.*

Доказательство. В одну сторону утверждение доказано в предложении 1.4. Пусть теперь R — тело. Тогда кольцо A является областью, поскольку вкладывается в тело R. Пусть a — произвольный ненулевой элемент кольца A. Элемент $\pi(a)$ обратим в теле R, пусть r — его обратный. Согласно определению лорановского кольца в первом смысле элементу r соответствует какой-то ряд f из $A((x))$, такой что $r = \pi(f)$. По лемме 2.1 выполнено равенство $\pi(a)r = \pi(af)$. Пусть $f_n x^n$ — младший член ряда f. A — область, поэтому элемент $af_n x^n$ отличен от нуля. Тогда

$$1 = \pi(a)r = \pi(a)\pi(f) = \pi(af) = \pi(af_n x^n + v_{n+1}),$$

где v_{n+1} лежит в V_{n+1}. Отсюда получаем, что $1-\pi(af_n x^n) \in U_{n+1}$, что возможно только в случае $n = 0$ и $1 = \pi(af_0)$, поскольку элемент $af_n x^n$ отличен от нуля. Но тогда элемент a обратим справа, что и требовалось доказать. $\square$

Можно получить для лорановского кольца критерии артиновости и нётеровости, которые также были известны ранее для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов.

Предложение 5.2. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда кольцо A нётерово справа.*

Доказательство. Если кольцо R нётерово справа, то, поскольку решётка правых идеалов кольца A инъективно вкладывается в решётку правых идеалов кольца R (с помощью отображения μ), то и кольцо A нётерово справа.

Пусть теперь A — нётерово справа кольцо. Допустим, что кольцо R не нётерово справа, тогда в нём существует бесконечная строго возрастающая цепочка правых идеалов $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Рассмотрим возрастающую цепочку правых идеалов $\lambda(B_1), \lambda(B_2), \ldots$ в кольце A. По условию кольцо A нётерово справа, поэтому существует такое натуральное число k, что $\lambda(B_n) = \lambda(B_k)$ для всех $n > k$. Но кольцо A нётерово справа, поэтому все правые идеалы $\lambda(B_n)$ являются конечно порождёнными. Тогда идеал $\lambda(B_k)$ порождается конечным числом элементов кольца A, которые являются свободными членами каких-то элементов $\{c_i\}$ из множества $U_0 \cap B_k$. Тогда для любого $n > k$ к правым идеалам B_n и B_k и к набору элементов $\{c_i\}$ применима лемма 1.3, откуда вытекает, что все правые идеалы B_n совпадают при $n > k$, что противоречит предположению. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Предложение 5.3. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Кольцо R артиново справа тогда и только тогда, когда кольцо A артиново справа.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 5.2. $\square$

Замечание. Можно отметить, что доказательство предложений 5.2 и 5.3 использует условие г) определения лорановского кольца только для доказательства в одну сторону. Таким образом, если кольцо коэффициентов A нётерово или артиново, то кольцо R нётерово или артиново, даже если R — обобщённое лорановское кольцо.

6. Области, кольца главных идеалов и кольца Безу

Предложение 6.1. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Кольцо R является областью тогда и только тогда, когда кольцо A является областью.*

Доказательство. Пусть R — область. Тогда A тоже является областью, поскольку изоморфно подкольцу области R.

Пусть теперь A — область. Пусть r_1 и r_2 — произвольные ненулевые элементы кольца R. Тогда предста́вим их в виде $r_1 = w_1 v_1$ и $r_2 = v_2 w_2$, где v_1 и v_2 — элементы из U_0 с ненулевыми свободными членами, а w_1 и w_2 — обратимые элементы кольца R. Тогда $r_1 r_2 = w_1(v_1 v_2)w_2$, при этом элемент $v_1 v_2$ отличен от нуля, поскольку его свободный член, равный произведению двух ненулевых элементов области A, отличен от нуля. Но тогда и элемент $r_1 r_2$ отличен от нуля, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Для обобщённых лорановских колец утверждение предложения 6.1 справедливо только в одну сторону. В предложении 4.6 построен пример обобщённого лорановского кольца $\mathbb{Q}_{p^n}$, которое является телом, а его кольцо коэффициентов (при n, больших единицы) не является областью.

Кольцо A называется *кольцом главных правых идеалов*, если каждый его правый идеал является главным правым идеалом. Кольцо A называется *правым кольцом Безу*, если каждый его конечно порождённый правый идеал является главным.

Предложение 6.2. *Пусть R — обобщённое лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда если A — кольцо главных правых идеалов, то и R — кольцо главных правых идеалов.*

Доказательство. Действительно, пусть P — правый идеал кольца R. Тогда $\lambda(P)$ — правый идеал кольца A и по условию порождается каким-то элементом a из A. Поскольку a лежит в $\lambda(P)$, найдётся элемент r из $P \cap U_0$, такой что свободный член r равен a. Тогда к правому идеалу P и к элементу r применима лемма 1.3, из которой следует, что $rR = P$, что и требовалось доказать. □

Теорема 6.3. *Пусть R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов. Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) *R — область главных правых идеалов*;
2) *R — кольцо главных правых идеалов и A — область*;
3) *A — область главных правых идеалов.*

Доказательство. Условия 1) и 2) равносильны в силу предложения 6.1. Из условия 3) вытекает условие 2) по предложению 6.2. Остаётся доказать, что из условия 2) вытекает условие 3).

Пусть B — произвольный ненулевой правый идеал кольца A. Тогда правый идеал $\mu(B)$ кольца R является главным и порождается каким-то элементом f. Поскольку элемент f можно представить в виде uv, где u лежит в U_0 и имеет ненулевой свободный член, а v обратим, то без ограничения общности можно считать, что f лежит в U_0 и имеет ненулевой свободный член. Пусть a — свободный член f. Очевидно, a лежит в B. Для всякого элемента b из B выполнено $\pi(b) \in \mu(B)$, поэтому для какого-то элемента g из R выполнено равенство $fg = \pi(b)$. Поскольку A — область, по лемме 1.2 получаем, что младшая степень элемента g равна нулю (так как младшие степени f и $\pi(b)$ равны нулю).

Тогда, поскольку свободный член произведения равен произведению свободных членов, получаем, что $ag_0 = b$, где g_0 — свободный член g. Тогда b лежит в aA, поэтому $B = aA$ — главный правый идеал, что и требовалось доказать. □

Замечание. Теорема 6.3 доказана для лорановских колец и поэтому верна для колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов. Поэтому из неё вытекает, что кольцо рядов Лорана $\mathbb{Z}((x))$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ является кольцом главных идеалов. В связи с этим заметим, что кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x]$ и кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[x]]$ не являются кольцами главных идеалов, поскольку идеал, порождённый 2 и x, не является главным. Это показывает, что случай колец рядов Лорана отличается от случаев колец многочленов и колец формальных степенных рядов.

Сумма подмодулей (или идеалов) называется *сократимой*, если в ней есть такое слагаемое, при удалении которого из суммы сумма не меняется. Сумма подмодулей (или идеалов) называется *несократимой*, если при удалении любого из её слагаемых сумма меняется.

Лемма 6.4. *Пусть M_A — правый модуль над кольцом A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *любая бесконечная сумма подмодулей $\{M_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ модуля M_A сократима*;
2) *все фактор-модули модуля M_A конечномерны, т. е. не содержат бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть N_A — фактор-модуль модуля M_A и в нём существует бесконечная прямая сумма ненулевых подмодулей N_α. Тогда рассмотрим их прообразы M_α при каноническом гомоморфизме M_A на N_A. По условию сумма подмодулей M_α должна быть сократима, т. е. для некоторого β модуль M_β лежит в сумме $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Но тогда и модуль N_β лежит в сумме $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} N_\alpha$, что противоречит предположению.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Пусть $\{M_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — произвольное множество подмодулей модуля M. Рассмотрим подмодуль P_A модуля M, равный сумме

$$\sum_{\beta\in\Omega}\Bigl(M_\beta \cap \sum_{\alpha\neq\beta} M_\alpha\Bigr).$$

Пусть $p = \sum\limits_{\beta\in\Omega} m_\beta$ (лишь конечное число членов суммы отлично от нуля) — какой-то элемент подмодуля P, причём

$$m_\beta \in M_\beta \cap \sum_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$$

для всех β из Ω. Тогда для каждого $\beta \in \Omega$ элемент m_β лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ и элемент

$$p - m_\beta = \sum_{\alpha\neq\beta} m_\alpha$$

лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$, поэтому элемент p также лежит в модуле $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$. Таким образом, для каждого $\beta \in \Omega$ выполнено включение $P \subseteq \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$.

Обозначим через N_A фактор-модуль M/P, а через N_α — образ подмодуля M_α при каноническом гомоморфизме M на N. Докажем, что модули N_α образуют прямую сумму. Для этого нужно показать, что для каждого $\beta \in \Omega$ пересечение модуля N_β с модулем $\sum\limits_{\alpha\neq\beta} N_\alpha$ равно нулю, или, что то же самое, показать, что пересечение модуля $M_\beta + P$ с модулем $P + \sum\limits_{\alpha\neq\beta} M_\alpha$ лежит в P.

Как доказано выше, выполнено включение $P \subseteq \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$, поэтому надо доказать только, что пересечение модуля M_β с модулем $\sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$ лежит в P. Но это верно по определению модуля P.

Таким образом, модули N_α образуют бесконечную прямую сумму в фактор-модуле $N = M/P$ и по условию не могут быть все ненулевыми. Поэтому для некоторого $\beta \in \Omega$ модуль N_β равен нулю и, следовательно, $M_\beta \subseteq P$. Как было доказано выше, выполнено включение $P \subseteq \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$, поэтому $M_\beta \subseteq \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$. Но это и означает, что сумма $\sum_{\beta \in \Omega} M_\beta$ сократима. Доказательство завершено. $\square$

Модуль называется *дистрибутивным*, если для любых его подмодулей A, B, C выполнено равенство $(A + B) \cap C = A \cap C + B \cap C$. Кольцо называется *дистрибутивным справа* (*слева*), если оно является дистрибутивным правым (левым) модулем над собой.

В дальнейшем для проверки дистрибутивности модуля будет использоваться приведённый ниже известный критерий (см., например, [18, предложение 1.17]).

Лемма 6.5. *Правый модуль M_A над кольцом A является дистрибутивным тогда и только тогда, когда для любых двух его элементов m, n существует такой элемент a кольца A, что $ma \in nA$ и $n(1 - a) \in mA$.*

Предложение 6.6. *Пусть B — кольцо, содержащее бесконечную последовательность ненулевых центральных попарно ортогональных идемпотентов $e(i)$, таких что все кольца $A(i) = e(i)B$ являются областями. Предположим также, что B содержит такой элемент b, что $e(i)b$ — необратимый ненулевой элемент области $A(i)$ для каждого i. Пусть φ — такой автоморфизм кольца B, что $\varphi(e(i)) = e(i)$ для всех i. Тогда $B((x, \varphi))$ не является правым кольцом Безу и не является дистрибутивным справа кольцом.*

Доказательство. Пусть $R = B((x, \varphi))$ и C — прямая сумма областей $A(i)$. Непосредственно проверяется, что C — идеал кольца B. Обозначим через D идеал кольца B, состоящий из всех таких элементов d, что лишь конечное число проекций $de(i)$ (i меняется от 0 до ∞) отлично от нуля. Очевидно, что $C \subseteq D$. Заметим, что элемент b не лежит в идеале D, поскольку $be(i)$ — ненулевой элемент для всех i. Будем отождествлять кольцо $R(i) = e(i)R$ с кольцом косых рядов Лорана над $A(i)$ (поскольку $\varphi(e(i)) = e(i)$, то ограничение автоморфизма φ на кольцо $A(i)$ является автоморфизмом кольца $A(i)$). Для каждого элемента a кольца B обозначим через $a(i)$ его проекцию $ae(i)$ на кольцо $A(i)$.

Рассмотрим элементы $f = e(1)x + e(2)x^2 + \ldots$ и $b = bx^0$ кольца рядов R. Допустим, что R — правое кольцо Безу. Тогда существует такой ряд g, что $fR + bR = gR$. Из этого равенства вытекает, что все коэффициенты ряда g лежат в правом идеале $C + bB$ кольца B, порождённом коэффициентами рядов f и b. С другой стороны, элемент b также должен лежать в правом идеале кольца B, порождённом коэффициентами ряда g. Поэтому все коэффициенты ряда g не могут лежать в идеале D.

Выберем среди коэффициентов ряда g, не лежащих в D, самый младший. Пусть это g_i. Все коэффициенты ряда g, которые младше g_i, лежат в идеале D. Более того, поскольку их конечное число, то найдётся такое натуральное число k, что проекции этих коэффициентов на $A(n)$ равны нулю для всех n, превосходящих k. Поскольку коэффициент g_i лежит в правом идеале $C+bB$ и не лежит в идеале D, то найдётся такое число $n>k$, что элемент $g_i(n)$ лежит в правом идеале $bA(n)$ и не равен нулю. Тогда рассмотрим проекцию равенства $gR=fR+bR$ на кольцо $R(n)=e(n)R$. Получаем равенства

$$\begin{aligned} e(n)gR = g(n)R(n) = f(n)R(n) + b(n)R(n) = \\ = e(n)x^n R(n) + b(n)R(n) = R(n) + b(n)R(n) = R(n). \end{aligned}$$

Таким образом, ряд $g(n)=e(n)g$ обратим в кольце $R(n)$. Младшим коэффициентом ряда $g(n)$ является элемент $g_i(n)\in A(n)$, поскольку все коэффициенты при более низких степенях равны нулю (в силу того что $n>k$). Кроме того, элемент $g_i(n)$ лежит в собственном правом идеале $bA(n)=e(i)bA(n)$ кольца $A(n)$ и, следовательно, не обратим в кольце $A(n)$. Тогда в силу того что младший член произведения равен произведению младших членов (поскольку $A(n)$ — область), ряд $g(n)$ не обратим в кольце $R(n)$. Получено противоречие. Таким образом, $B((x,\varphi))$ не является правым кольцом Безу.

Предположим теперь, что кольцо R дистрибутивно справа. Согласно сформулированному ранее критерию дистрибутивности (лемма 6.5) для элементов b и f дистрибутивного справа кольца R существует такой элемент g кольца R, что $bg\in fR$ и $f(1-g)\in bR$. Непосредственно проверяется, что все коэффициенты всех рядов из fR лежат в правом идеале C, который порождён всеми коэффициентами ряда f. Тогда все коэффициенты ряда bg лежат в C. В частности, для каждого i лишь конечное число проекций $e(n)bg_i=b(n)g_i(n)$ отлично от нуля. Поскольку все кольца $A(n)$ являются областями и проекции $b(n)$ отличны от нуля для всех n, то для каждого i лишь конечное число проекций $g_i(n)$ отлично от нуля. Поэтому все коэффициенты g_i лежат в D.

Пусть младший член ряда g равен $g_{-t}x^{-t}$. Поскольку множество индексов i, таких что $-t\leqslant i\leqslant 0$, конечно и все коэффициенты g_i лежат в D, то найдётся такое натуральное n, что все проекции $g_i(n)$ равны нулю при $-t\leqslant i\leqslant 0$. Домножив $f(1-g)\in bR$ на центральный идемпотент $e(n)$, получим

$$e(n)f(1-g)\in b(n)R.$$

Таким образом,

$$e(n)x^n(1-g)\in b(n)R(n).$$

Поскольку $A(n)$ — область, то произвольный ряд из кольца $R(n)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим его младший коэффициент. В силу выбора n младший член ряда $e(n)(1-g)$ равен $e(n)$. Следовательно, ряд $e(n)x^n(1-g)$ обратим в кольце $R(n)$. Тогда элемент $b(n)$ обратим в кольце $R(n)$. Следовательно, элемент $b(n)$ обратим в кольце $A(n)$. Получено противоречие. □

Кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Модуль называется *риккартовым*, если все его циклические подмодули проективны. Правый модуль над кольцом A является риккартовым тогда и только тогда, когда аннулятор каждого его элемента порождается идемпотентом кольца A как правый идеал. Кольцо называется *риккартовым справа* (*слева*), если оно является риккартовым правым (левым) модулем над собой.

Следующее предложение показывает, что аналог предложения 6.2 для колец Безу неверен.

Предложение 6.7. *Пусть A — дистрибутивная справа правая область Безу, не являющаяся телом* (*например, кольцо целых чисел*),

$$B = A(1) \times A(2) \times A(3) \times \ldots \text{ —}$$

прямое произведение счётного числа экземпляров $A(i)$ области A. Тогда:

1) *B — риккартово справа и слева дистрибутивное справа редуцированное правое кольцо Безу*;
2) *$B((x))$ — риккартово справа и слева редуцированное кольцо, которое не является ни правым кольцом Безу, ни дистрибутивным справа кольцом.*

Доказательство. 1. Так как любое прямое произведение редуцированных колец является редуцированным кольцом, то B — редуцированное кольцо.

Для каждого элемента b кольца B его правый аннулятор совпадает с левым аннулятором и порождается центральным идемпотентом e, где компоненты идемпотента e задаются следующим образом: $e(i)$ равно единице области $A(i)$ для тех i, для которых $b(i) = 0$, и $e(i)$ равно нулю для всех остальных i. Поэтому B — риккартово справа и слева кольцо.

Для того чтобы доказать, что B — правое кольцо Безу, достаточно показать, что любой 2-порождённый правый идеал является главным правым идеалом. Пусть u, v — произвольные элементы кольца B, а $u(i)$, $v(i)$ — проекции элементов u и v на компоненту $A(i)$. Тогда для каждого i существует такой элемент $w(i) \in A$, что $w(i)A = u(i)A + v(i)A$. Для элемента w кольца B с компонентами $w(i)$ выполнено равенство $wB = uB + vB$, что и требовалось доказать.

Чтобы показать, что B — дистрибутивное справа кольцо, достаточно проверить сформулированный ранее критерий дистрибутивности (лемма 6.5). Пусть u, v — произвольные элементы кольца B, а $u(i)$, $v(i)$ — проекции элементов u и v на компоненту $A(i)$. Тогда в силу дистрибутивности A для каждого i существует такой элемент $w(i) \in A$, что $u(i)w(i) \in v(i)A(i)$ и $v(i)(e(i) - w(i)) \in u(i)A(i)$. Для элемента $w \in B$ с компонентами $w(i)$ выполнены равенства $uw \in vB)$ и $v(1 - w) \in uB$, что и требовалось доказать.

2. Так как B — редуцированное кольцо, то $B((x))$ — редуцированное кольцо.

Для каждого натурального числа i обозначим через $e(i)$ единицу кольца $A(i)$. Кольцо $B((x))$ является риккартовым справа и слева, поскольку правый аннулятор каждого его элемента f совпадает с его левым аннулятором и порождается центральным идемпотентом t кольца B, где компоненты идемпотента t

задаются следующим образом: $t(i)$ равно единице области $A(i)$ для тех i, для которых $fe(i) = 0$, и $t(i)$ равно нулю для всех остальных i.

Оставшаяся часть утверждения пункта 2) следует из предложения 6.6, применённого к кольцу B, где нужно положить $\varphi = 1_B$. Все компоненты элемента b можно взять равными a, где a — произвольный ненулевой необратимый элемент кольца A. $\square$

7. Простые и полупростые кольца

Всюду в тексте под *полупростым* кольцом подразумевается артиново полупростое кольцо.

Для того чтобы получать из предложений о лорановских кольцах следствия для колец косых рядов Лорана с косым дифференцированием, колец косых рядов Лорана и колец псевдодифференциальных операторов, понадобится несколько вспомогательных утверждений о двусторонних идеалах в кольцах рядов.

Лемма 7.1. *Пусть A — кольцо, φ — автоморфизм в нём и P — двусторонний идеал в кольце косых рядов Лорана $A((x, \varphi))$. Тогда $\mu(\lambda(P))$ также двусторонний идеал в кольце $A((x, \varphi))$.*

Доказательство. С учётом леммы 3.7 достаточно доказать, что $\varphi(\lambda(P)) = \lambda(P)$. Пусть a — какой-то элемент из $\lambda(P)$, тогда элемент a является свободным членом какого-то ряда f из $P \cap U_0$. Тогда элемент xfx^{-1} также лежит в $P \cap U_0$ и его свободный член равен $\varphi(a)$. Аналогично свободный член элемента $x^{-1}fx$ равен $\varphi^{-1}(a)$, откуда получаем включения $\varphi(\lambda(P)) \subseteq \lambda(P)$ и $\varphi^{-1}(\lambda(P)) \subseteq \lambda(P)$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 7.2. *Пусть A — кольцо, δ — его дифференцирование. Тогда для любого двустороннего идеала P кольца псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1}, \delta))$ правый идеал $\mu(\lambda(P))$ в кольце $A((t^{-1}, \delta))$ также является двусторонним.*

Доказательство. С учётом леммы 3.7 достаточно доказать, что $\delta(\lambda(P)) \subseteq \lambda(P)$. Пусть a — какой-то элемент из $\lambda(P)$, тогда элемент a является свободным членом какого-то ряда f из $P \cap U_0$, т. е. $f = a + u_1$, где b — какой-то элемент кольца A, а u_1 — какой-то ряд из U_1. Тогда элемент $tft^{-2} - ft^{-1} = \delta(a) + u_1'$ также лежит в $P \cap U_0$, а его свободный член равен $\delta(a)$. Отсюда получаем включение $\delta(\lambda(P)) \subseteq \lambda(P)$, что и требовалось доказать. $\square$

В пределах этого раздела будем говорить, что лорановское кольцо обладает свойством ($\star$), если для каждого его двустороннего идеала P правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Как показывают леммы 7.1 и 7.2, кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов обладают свойством ($\star$). Кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием, вообще говоря, этим свойством не обладают. Соответствующий пример будет построен в предложении 7.6.

Предложение 7.3. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов.*

1. *Если R — простое кольцо, то в кольце A нет такого собственного ненулевого двустороннего идеала B, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним.*
2. *Если кольцо R удовлетворяет свойству $(\star)$ и A не имеет такого собственного ненулевого двустороннего идеала B, что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним, то R — простое кольцо.*

Доказательство. 1. Допустим, что B — собственный ненулевой двусторонний идеал кольца A. Тогда $\mu(B)$ — собственный ненулевой правый идеал кольца R. Поскольку R — простое кольцо, правый идеал $\mu(B)$ не является двусторонним идеалом, что и требовалось доказать.

2. Допустим, что R не простое кольцо. Тогда в нём найдётся собственный ненулевой двусторонний идеал P. По условию правый идеал $\mu(\lambda(P))$ также является двусторонним. Это означает, что двусторонний идеал $\lambda(P)$ кольца A равен либо нулю, либо всему кольцу A. Он не может быть равен нулю, так как идеал P отличен от нуля. Следовательно, $\lambda(P) = A$, в частности $1 \in \lambda(P)$, т. е. в P лежит некоторый элемент $f \in U_0$, свободный член которого равен единице. По предложению 1.4 получаем, что f — обратимый элемент и идеал P равен всему кольцу R. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

С учётом того, что по леммам 7.1 и 7.2 кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов обладают свойством $(\star)$, в качестве следствий предложения 7.3 с помощью леммы 3.7 можно получить критерии простоты кольца псевдодифференциальных операторов и кольца косых рядов Лорана.

Следствие 7.4. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$A((x,\varphi))$ — простое кольцо*;
2) *кольцо A не имеет таких собственных ненулевых двусторонних идеалов B, что $\varphi(B) = B$.*

Следствие 7.5. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$A((t^{-1},\delta))$ — простое кольцо*;
2) *кольцо A не имеет таких собственных ненулевых двусторонних идеалов B, что $\delta(B) \subseteq B$.*

Построим пример, показывающий, что условие $(\star)$ в предложении 7.3 существенно.

Пусть K — поле, а c — произвольный элемент этого поля, отличный от нуля и единицы.

Пусть $A = K[z]$ — кольцо многочленов над полем K, а φ — автоморфизм кольца A, оставляющий элементы из поля K на месте и переводящий z в одночлен cz. Пусть δ — отображение из A в A, переводящее многочлен f в многочлен $z^{-1}(f - \varphi^{-1}(f))$. Это отображение определено корректно, поскольку свободный член многочлена $f - \varphi^{-1}(f)$ всегда равен нулю. Непосредственно проверяется, что δ является φ^{-1}-дифференцированием.

В этих обозначениях докажем следующее утверждение.

Предложение 7.6. *Существует изоморфизм обобщённых лорановских колец кольца косых рядов Лорана с косым дифференцированием $A((x, \varphi, \delta))$ на кольцо косых рядов Лорана $A((x', \varphi))$. Кольцо $A((x, \varphi, \delta))$ не является простым, не удовлетворяет условию $(\star)$, а в кольце A нет ненулевых собственных идеалов B, таких что идеал $\mu(B)$ кольца $A((x, \varphi, \delta))$ является двусторонним.*

Доказательство. Отметим, что $\delta(z) = 1 - c^{-1}$ — элемент поля K и поэтому лежит в центре кольца $A((x, \varphi, \delta))$.

Будем строить искомый изоморфизм по лемме 3.6. Построим вначале особое вложение π кольца коэффициентов A в кольцо косых рядов Лорана с косым дифференцированием $A((x, \varphi, \delta))$. Пусть π сохраняет на месте элементы поля K, а элемент z переводит в $z - x$. Поскольку $A = K[z]$ — кольцо многочленов от переменной z, то это отображение продолжается до гомоморфизма колец. Легко видеть, что при таком вложении для любого элемента a из A свободный член ряда $\pi(a)$ совпадает с a.

Для произвольного элемента w из поля K имеем $\pi(w) = w$ и

$$x^{-1}\pi(w) = x^{-1}w = \varphi(w)x^{-1} + \delta(w) = wx^{-1} = \pi(\varphi(w))x^{-1}.$$

Кроме того, для z имеем

$$\begin{aligned} x^{-1}\pi(z) &= x^{-1}(z - x) = \\ &= \varphi^{-1}(z)x^{-1} + \delta(z) - 1 = c^{-1}zx^{-1} - c^{-1} = c^{-1}(z - x)x^{-1} = \pi(\varphi(z))x^{-1}. \end{aligned}$$

С учётом этого получаем, что равенство $x^{-1}\pi(a) = \pi(\varphi(a))x^{-1}$ выполнено для всех a из A.

Обозначим через π' естественное вложение кольца коэффициентов A в кольцо косых рядов Лорана $A((x', \varphi))$. Тогда доказанное соотношение $x^{-1}\pi(a) = \pi(\varphi(a))x^{-1}$ имеет такой же вид, как и соотношение $x'^{-1}\pi'(a) = \pi'(\varphi(a))x'^{-1}$, задающее умножение в кольце $A((x', \varphi))$. Поэтому можно применить лемму 3.6, взяв построенное вложение π и элемент x с одной стороны и вложение π' и элемент x' с другой. Таким образом, получен изоморфизм колец $A((x, \varphi, \delta))$ и $A((x', \varphi))$.

Поскольку в кольце A есть собственные ненулевые φ-инвариантные идеалы (например, идеал всех многочленов с нулевым свободным членом), то по следствию 7.4 кольцо $A((x, \varphi))$ не является простым. Тогда простым не является и изоморфное ему кольцо $A((x, \varphi, \delta))$, т. е. в нём есть собственный ненулевой идеал P. С другой стороны, в кольце A нет собственных ненулевых δ-инвариантных идеалов (так как любой многочлен многократным применением φ^{-1}-дифференцирования δ переводится в ненулевой элемент поля K), поэтому (в силу леммы 3.7) в A нет собственных ненулевых собственных идеалов B, таких что идеал $\mu(B)$ кольца $A((x,\varphi,\delta))$ является двусторонним. По предложению 7.3 это означает, что кольцо $A((x,\varphi,\delta))$ не удовлетворяет условию ($\star$). Можно убедиться в этом непосредственно, так как можно проверить, что $\mu(\lambda(P))$ не является двусторонним идеалом, если P — двусторонний идеал, порождённый элементом $z-x$. $\square$

Получим теперь результаты для полупростых артиновых колец. Нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 7.7. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть B — двусторонний идеал кольца A, такой что $\mu(B)$ — двусторонний идеал кольца R. Тогда для любого правого идеала C кольца A выполнено включение $\mu(C)\mu(B)\subseteq\mu(CB)$. В частности, если идеал B нильпотентен, то и идеал $\mu(B)$ кольца R нильпотентен.*

Доказательство. Нужно доказать, что если f — произвольный элемент из $\mu(C)$, а g — произвольный элемент из $\mu(B)$, то произведение fg лежит в $\mu(CB)$. В силу закона дистрибутивности для обобщённой бесконечной суммы и того, что правый идеал $\mu(CB)$ замкнут относительно взятия обобщённой бесконечной суммы, достаточно доказать это утверждение для элемента f вида $\pi(cx^n)$, где c — произвольный элемент из C, а n — целое число. Тогда $fg=\pi(c)\pi(x^n)g$, а поскольку $\mu(B)$ — двусторонний идеал, элемент $g'\pi(x^n)g$ лежит в $\mu(B)$. Если теперь $\{b_i\}$ — левые коэффициенты элемента g', то левые коэффициенты элемента $\pi(c)g'$ — это $\{cb_i\}$, поэтому элемент $\pi(c)g'$ лежит в $\mu(CB)$, что и требовалось доказать.

Из доказанного выше вытекает, что $\mu(B^{n-1})\mu(B)\subseteq\mu(B^n)$, откуда легко получаем включение $(\mu(B))^n\subseteq\mu(B^n)$. Поэтому если идеал B нильпотентен, то и идеал $\mu(B)$ нильпотентен. $\square$

Предложение 7.8. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда если R — полупростое артиново кольцо, то A — артиново кольцо и в его радикале $J(A)$ не содержится никакой ненулевой двусторонний идеал B, такой что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. При этом если кольцо R удовлетворяет свойству ($\star$), то верна и импликация в обратную сторону.*

Доказательство. Допустим, что R — полупростое артиново кольцо. Тогда по предложению 5.3 A — артиново справа кольцо, и следовательно, его радикал $J(A)$ нильпотентен. Допустим, что в $J(A)$ содержится ненулевой двусторонний идеал B, такой что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. Тогда B — нильпотентный идеал, и по лемме 7.7 двусторонний идеал $\mu(B)$ также является нильпотентным. Но в R нет ненулевых нильпотентных идеалов. Полученное противоречие завершает доказательство в одну сторону.

Пусть теперь A — артиново кольцо и в $J(A)$ не содержится никакой ненулевой двусторонний идеал B, такой что правый идеал $\mu(B)$ в кольце R является двусторонним. По предложению 5.3 кольцо R также является артиновым справа. Допустим, радикал Джекобсона $J(R)$ отличен от нуля. Тогда $\lambda(J(R))$ — двусторонний идеал кольца A, лежащий в $J(A)$ (в силу леммы 2.6). При этом $\mu(\lambda(J(R)))$ — двусторонний идеал кольца R, что противоречит условию. Полученное противоречие завершает доказательство. □

С учётом того, что по леммам 7.1 и 7.2 кольцо косых рядов Лорана и кольцо псевдодифференциальных операторов обладают свойством $(\star)$, в качестве следствий предложения 7.8 можно получить критерии полупростоты кольца псевдодифференциальных операторов и кольца косых рядов Лорана.

Следствие 7.9. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $A((x,\varphi))$ — *полупростое артиново кольцо*;
2) A — *полупростое артиново кольцо.*

Доказательство. По лемме 7.1 в кольце косых рядов Лорана $A((x,\varphi))$ выполнено условие $(\star)$. По лемме 3.7, учитывая, что $\varphi(J(A)) = J(A)$, получаем, что правый идеал $\mu(J(A))$ кольца $A((x,\varphi))$ всегда является двусторонним. С учётом этого заключение теоремы непосредственно выводится из предложения 7.8. □

Следствие 7.10. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $A((t^{-1},\delta))$ — *полупростое артиново кольцо*;
2) A — *артиново справа кольцо, причём для любого ненулевого элемента j радикала $J(A)$ существует натуральное число n, такое что элемент $\delta^n(j)$ не лежит в $J(A)$.*

Доказательство. По лемме 7.2 в кольце косых рядов Лорана $A((t^{-1},\delta))$ выполнено условие $(\star)$, так что можно применить предложение 7.8. С учётом леммы 3.7 остаётся проверить, что в $J(A)$ тогда и только есть ненулевой двусторонний идеал B, такой что $\delta(B) \subseteq B$, когда в $J(A)$ найдётся ненулевой элемент j, такой что $\delta^n(j)$ лежит в $J(A)$ для всех натуральных n.

Действительно, если такой идеал B существует, то в качестве j можно взять любой его ненулевой элемент. Обратно, пусть существует такой элемент j. Тогда рассмотрим двусторонний идеал, порождённый элементами j, $\delta(j)$, $\delta^2(j)$ и т. д. Все его элементы являются конечными суммами произведений вида $a_1\delta^n(j)a_2$, где n — неотрицательное целое число. Достаточно показать, что дифференцирование δ переводит произведение такого вида в сумму произведений такого же вида. Действительно,

$$\delta(a_1\delta^n(j)a_2) = \delta(a_1)\delta^n(j)a_2 + a_1\delta^{n+1}(j)a_2 + a_1\delta^n(j)\delta(a_2),$$

что и требовалось доказать. □

Модуль называется *цепным*, если все его подмодули образуют цепь относительно включения. Модуль называется *полуцепным*, если он является прямой суммой цепных модулей. Кольцо называется *цепным* (*полуцепным*) *справа*, если оно является цепным (полуцепным) правым модулем над собой.

В связи со следствиями 7.5 и 7.10 приведём следующий пример.

Предложение 7.11. *Пусть F — поле ненулевой характеристики p, $K = F[x]$ — кольцо многочленов. Тогда коммутативное кольцо $A = K/x^pK$ является цепным артиновым, но не является полем. В кольце A можно ввести дифференцирование δ по правилам $\delta(x^n) = nx^{n-1}$ и $\delta(a) = 0$ для каждого элемента a из поля F. При этом кольцо $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $(p \times p)$-матриц над полем $F((t^{-p}))$, состоящим из рядов вида $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{m} f_i t^{pi}$, где все коэффициенты f_i лежат в F. В частности, $A((t^{-1},\delta))$ — простое артиново кольцо, не являющееся цепным кольцом.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что все идеалы в кольце A исчерпываются идеалами вида x^kA, где k — целое число от 0 до p. Отсюда следует, что A — цепное артиново кольцо (при этом $1 \in \delta(J(A))$). Легко видеть, что множество $F((t^{-p}))$ является подкольцом в $A((t^{-1},\delta))$ и изоморфно кольцу рядов Лорана $F((s))$ (изоморфизм переводит s в t^{-p}), следовательно, оно является полем. Поскольку для всех натуральных k и n справедливо равенство $t^nx^k = x^kt^n + nx^{k-1}t^{n-1}$, то для всех натуральных k элементы x^k и t^p кольца $A((t^{-1},\delta))$ коммутируют, поэтому все элементы поля $F((t^{-p}))$ лежат в центре кольца $A((t^{-1},\delta))$. Таким образом, кольцо $A((t^{-1},\delta))$ является алгеброй над полем $F((t^{-p}))$. Ясно, что размерность этой алгебры как линейного пространства над полем составляет p^2.

Если B — какой-либо двусторонний идеал кольца $A((t^{-1},\delta))$, а

$$f = \sum_{i=-\infty}^{m} f_i t^i \,-$$

его произвольный элемент, то идеал B содержит также элемент

$$ft - tf = \sum_{i=-\infty}^{m} \delta(f_i)t^i.$$

Поэтому правый идеал $\lambda(B)$ кольца A обладает свойством $\delta(\lambda(B)) \subseteq \lambda(B)$. Однако кольцо A не имеет собственных ненулевых правых идеалов с этим свойством. Поэтому если B — ненулевой идеал, то $\lambda(B) = A$, и следовательно, в B найдётся элемент $b \in U_0$ со свободным членом, равным единице. Из предложения 1.4 следует, что $B = A((t^{-1},\delta))$. Значит, $A((t^{-1},\delta))$ — простое кольцо.

Согласно предложению 5.3 $A((t^{-1},\delta))$ — артиново справа простое кольцо. Поэтому существуют такое тело H и натуральное число l, что $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $(l \times l)$-матриц над H. Центр кольца матриц лежит в подкольце скалярных матриц, изоморфном телу H, а поле $F((t^{-p}))$ лежит в центре кольца $A((t^{-1},\delta))$. Поэтому тело H содержит подполе, изоморфное полю $F((t^{-p}))$.

Пусть размерность тела H как линейного пространства над $F((t^{-p}))$ составляет s. Тогда размерность кольца $A((t^{-1},\delta))$ над полем $F((t^{-p}))$ равна $p^2 = l^2 s$. Поскольку p — простое число, то либо $l = 1$, либо $s = 1$ и $l = p$. Если $l = 1$, то $A((t^{-1},\delta))$ — тело, но это невозможно, так как $A((t^{-1},\delta))$ имеет ненулевой нильпотентный элемент x. Если $s = 1$ и $l = p$, то $H = F((t^{-p}))$. Таким образом, кольцо $A((t^{-1},\delta))$ изоморфно кольцу всех $(p \times p)$-матриц над полем $F((t^{-p}))$.

Для наглядности построим в явном виде p ненулевых взаимно-ортогональных идемпотентов в кольце $A((t^{-1},\delta))$, дающих в сумме единицу. Для этого выведем некоторые соотношения в кольце $A((t^{-1},\delta))$. Заметим вначале, что имеет место соотношение $tx = xt + 1$. Для любого натурального n

$$\begin{aligned} x^n t^n = x^{n-1}(xt^{n-1})t = x^{n-1}(t^{n-1}x - (n-1)t^{n-2}t = \\ = x^{n-1}t^{n-1}(xt) - (n-1)x^{n-1}t^{n-1} = x^{n-1}t^{n-1}(xt - (n-1)). \end{aligned}$$

Отсюда легко получаем, что

$$x^n t^n = \prod_{i=0}^{n-1}(xt - i).$$

В частности,

$$0 = x^p t^p = \prod_{i=0}^{p-1}(xt - i).$$

Обозначим xt через y. Из хорошо известного равенства

$$\prod_{i=0}^{p-1}(y - i) \equiv y^p - y \pmod p$$

получаем, что $y^p = y$. Нетрудно видеть, что ни один многочлен от y степени меньше p над полем F хотя бы с одним ненулевым коэффициентом не равен нулю, поскольку из доказанных выше соотношений вытекает, что множество всех многочленов от y над F совпадает с линейной оболочкой всех одночленов $x^n t^n$ над полем F и, следовательно, размерность этого множества как линейного пространства равна p.

Рассмотрим теперь для каждого j от 0 до $p-1$ многочлен

$$e_j(u) = \prod_{i \neq j}(u - i)$$

от переменной u над полем F, где произведение берётся по всем i от 0 до $p-1$, исключая j. Тогда, очевидно, степень многочлена $e_j(u)$ равна $p-1$. Поэтому элемент $e_j(y)$ отличен от нуля для всех j. Кроме того, если $j_1 \neq j_2$, то многочлен $e_{j_1}(u)e_{j_2}(u)$ делится на

$$\prod_{i=0}^{p-1}(u - i) = u^p - u.$$

Значит, $e_{j_1}(y)e_{j_2}(y)=0$. Из известного равенства $(p-1)!\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$ вытекает, что $e_j(j)=-1$ для всех j. Поэтому многочлен $e_j(u)+1$ делится на $u-j$. Следовательно, $e_j(u)(e_j(u)+1)$ делится на

$$\prod_{i=0}^{p-1}(u-i)=u^p-u.$$

А это значит, что $e_j(y)(e_j(y)+1)=0$, т. е. $e_j^2(y)=-e_j(y)$. Непосредственно проверяется, что для каждого i от 0 до $p-1$ выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{p-1}e_j(i)\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Поэтому многочлен

$$1+\sum_{j=0}^{p-1}e_j(u)$$

степени не выше $p-1$ имеет по крайней мере p корней. Отсюда следует, что

$$\sum_{j=0}^{p-1}e_j(u)=-1,$$

в частности

$$\sum_{j=0}^{p-1}e_j(y)=-1.$$

Из всего доказанного выше вытекает, что элементы $-e_j(y)$ $(j=1,\dots,p-1)$ образуют систему из p ненулевых попарно ортогональных идемпотентов кольца $A((t^{-1},\delta))$, дающих в сумме единицу. $\square$

8. Цепные и полуцепные кольца

Кольцо называется *полулокальным*, если его фактор-кольцо по радикалу Джекобсона является артиновым. Кольцо полулокально тогда и только тогда, когда его радикал Джекобсона совпадает с пересечением некоторого конечного набора максимальных правых идеалов (или максимальных левых идеалов).

Подмодуль N модуля M называется *вполне инвариантным*, если для любого эндоморфизма f модуля M выполнено включение $f(N)\subseteq N$. Кольцо называется *инвариантным справа* (*слева*), если все его правые (левые) идеалы являются вполне инвариантными подмодулями кольца как модуля над собой. Кольцо является инвариантным справа (слева) тогда и только тогда, когда все его правые (левые) идеалы являются одновременно и левыми (правыми) идеалами.

Следующие две вспомогательные леммы 8.1 и 8.2 являются частными случаями хорошо известных результатов (см., например, [18]) и приведены здесь с доказательствами только для удобства.

Лемма 8.1. *Пусть M_A — цепной модуль с условием максимальности для циклических подмодулей. Тогда M — нётеров модуль, все подмодули которого являются циклическими вполне инвариантными подмодулями в M.*

Доказательство. Допустим M не нётеров модуль. Тогда существует бесконечная строго возрастающая последовательность подмодулей $\{M_i\}$ модуля M. Пусть $x_i \in (M_{i+1} \setminus M_i)$, $x_iA \not\subset M_i$, а M — цепной модуль. Тогда $M_i \subset x_iA$ и $x_iA \subseteq M_{i+1}$. Таким образом, $x_{i-1}A \subset M_i \subset x_iA$. Но последовательность циклических подмодулей x_iA стабилизируется начиная с некоторого i. Поэтому стабилизируется и последовательность M_i. Противоречие. Таким образом, M — нётеров модуль. Произвольный подмодуль N нётерова модуля M является конечно порождённым. Цепной конечно порождённый модуль N является циклическим. Осталось доказать, что если f — эндоморфизм модуля M, N — подмодуль модуля M, то $f(N) \subseteq N$. Допустим противное. Так как M — цепной модуль и $f(N) \nsubseteq N$, то N строго содержится в $f(N)$. Тогда $\ker(f) \subseteq N$ (в противном случае $f(N) = 0 \subseteq N$). Поскольку $N \subset f(N)$, то $f^i(N) \subseteq f^{i+1}(N)$. Пусть $a \in f(N) \setminus N$, тогда $f^i(a) \in f^{i+1}(N)$. Предположим, что $f^i(a) \in f^i(N)$ (т. е. $f^i(a) = f^i(b_i)$, $b_i \in N$). Но тогда $f^{i-1}(a) = f^{i-1}(b_i) + c$, $c \in \ker(f) \subseteq N \subseteq \subseteq f^{i-1}(N)$, а следовательно, $f^{i-1}(a) = f^{i-1}(b_{i-1})$. Продолжая это построение, получим $a = b_0 \in N$ — противоречие. Следовательно, $f^{i+1}(N)$ строго содержит $f^i(N)$ для всех i. Получена бесконечная строго возрастающая цепочка подмодулей $f^i(N)$, а это противоречит тому, что M — нётеров модуль. □

Кольцо называется *полупервичным*, если для любого его правого идеала I из равенства $I^2 = 0$ следует, что $I = 0$. Кольцо называется *первичным*, если для любых его правых идеалов I и J из равенства $IJ = 0$ следует равенство $I = 0$ или равенство $J = 0$. Двусторонний идеал I кольца A называется *полупервичным*, если фактор-кольцо A/I полупервично, *первичным*, если кольцо A/I первично, и *вполне первичным*, если фактор-кольцо A/I является областью. Кольцо называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона нильпотентен, а фактор-кольцо по радикалу Джекобсона — тело.

Лемма 8.2. *Пусть A — цепное справа кольцо. Тогда верны следующие утверждения*:

1) *если A — нётерово справа кольцо, то A — инвариантное справа кольцо главных правых идеалов*;
2) *если A — полупримарное кольцо, то A — инвариантное справа кольцо главных правых идеалов, в котором каждый собственный правый идеал совпадает с какой-либо степенью радикала $J(A)$, причём $A/J(A)$ — тело*;
3) *если A — полупервичное кольцо, то A — первичное кольцо*;
4) *если A — инвариантное справа полупервичное кольцо, то A — область*;
5) *если A — нётерово справа кольцо, то его первичный радикал N является вполне первичным идеалом.*

Доказательство. 1. Рассмотрим A как правый модуль над собой. Тогда A — кольцо главных правых идеалов в силу леммы 8.1. При этом каждый идеал B

инвариантен относительно любых модульных эндоморфизмов модуля A_A. Рассмотрим эндоморфизм $\psi_a\colon A_A \to A_A$ левого умножения на a: $\psi_a(x) = ax$. Тогда $aB = \psi_a(B) \subseteq B$ для любого правого идеала B в кольце A. Это означает, что A — инвариантное справа кольцо.

2. Пусть $J \equiv J(A)$. Тогда A/J — цепное справа артиново справа кольцо с нулевым радикалом Джекобсона. Полупростое кольцо A/J является конечной прямой суммой минимальных правых идеалов. Учитывая, что A/J — цепное справа кольцо, получаем, что A/J — тело. Рассмотрим J^i/J^{i+1} как модуль над телом A/J (это действительно A/J-модуль, так как $(j_i + J^{i+1})(a + J) = j_i a + J^{i+1}$). Цепной A/J-модуль J^i/J^{i+1} неразложим, поэтому J^i/J^{i+1} — одномерное линейное пространство над телом A/J. В частности, J^i/J^{i+1} — простой A/J-модуль. Тогда J^i/J^{i+1} — простой A-модуль.

Пусть теперь B — произвольный правый идеал кольца A. Кольцо A цепное, $J^0 = A$ и $J^n = 0$. Поэтому существует такое натуральное i, что $J^{i+1} \subseteq B \subseteq J^i$. Тогда $B/J^{i+1} \subseteq J^i/J^{i+1}$. Кроме того, J^i/J^{i+1} — простой модуль. Поэтому $B = J^i$ или $B = J^{i+1}$. Таким образом, в кольце A каждый правый идеал совпадает с какой-то степенью идеала J. Так как J — двусторонний идеал, то кольцо A инвариантно справа. Осталось доказать, что A — кольцо главных правых идеалов. Поскольку A имеет лишь конечное число правых идеалов, то A — нётерово справа кольцо и можно применить утверждение 1).

3. Допустим противное, т. е. что A не первичное кольцо. Тогда в кольце A существуют такие идеалы B и C, что $BC = 0$. Так как A — цепное кольцо, то либо $B \subseteq C$, либо $C \subseteq B$. Пусть для определённости $B \subseteq C$. Тогда $B^2 \subseteq BC = 0$, откуда $B^2 = 0$. Поскольку A — полупервичное кольцо, получили противоречие.

4. Согласно 3) A — первичное кольцо. Допустим теперь, что A не область. Тогда существуют такие ненулевые элементы $a, b \in A$, что $ab = 0$. Правый аннулятор $r(a)$ элемента a является правым идеалом кольца A. Так как A — инвариантное справа кольцо, то $r(a)$ — левый идеал в A. Поэтому из включения $b \in r(a)$ следует включение $Rb \subseteq r(a)$. Значит, $aRb = 0$. Отсюда $aRbR = 0$, что противоречит первичности кольца A.

5. В силу 1) A является инвариантным справа кольцом. Этим же свойством обладает и кольцо A/N. Поэтому A/N — инвариантное справа полупервичное кольцо, являющееся согласно 4) областью. Это означает, что N — вполне первичный идеал. $\square$

Лемма 8.3. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть R — цепное справа кольцо. Тогда верны следующие утверждения*:

1) *A — цепное справа кольцо*;
2) *все элементы кольца A, не являющиеся левыми делителями нуля, обратимы справа*;
3) *если кольцо A обладает нильпотентным вполне первичным идеалом N, то A — цепное справа артиново справа кольцо*;
4) *если A — нётерово справа кольцо, то A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. 1. Пусть a, b — ненулевые элементы кольца коэффициентов A, а $\pi(a)$ и $\pi(b)$ — их образы в лорановском кольце R в первом смысле (см. определение). Так как R — цепное справа кольцо, то можно без ограничения общности считать, что существует такой элемент $f \in R$, что $\pi(a) = \pi(b)f$. Пусть $f = \pi(g)$, где g — некоторый ряд из $A((x))$. Тогда получаем $\pi(a) = \pi(b)\pi(g) = \pi(bg)$, откуда $a = bg$. Приравняв коэффициенты при x^0, получим, что $a = bg_0$, где $g_0 \in A$ — соответствующий коэффициент ряда g. Таким образом, A — цепное справа кольцо.

2. Пусть $a \in A$ и элемент a не является левым делителем нуля в кольце A. Надо доказать, что элемент a обратим справа. Рассмотрим элементы a, $a+y$ кольца R, где y — обратимый элемент из условия б). Так как R — цепное справа кольцо, то либо $a+y \in aR$, либо $a \in (a+y)R$. Поэтому либо существует такой элемент $f \in R$, что $y = (a+y)-a = afy$, либо существует такой элемент $f \in R$, что $y = (a+y)-a = (a+y)fy$. В первом случае обозначим a через a', во втором случае обозначим $a+y$ через a' и получим, что в обоих случаях $1 = a'f$, где $a' \in U_0$ и свободный член a' равен a.

Предста́вим f в виде $f'y^n$, где $f' \in U_0$ и свободный член f' отличен от нуля. Тогда свободный член произведения $a'f'$ отличен от нуля (поскольку свободный член a' не является левым делителем нуля), и мы получаем, что $1 = a'f = a'f'y^n$ лежит в U_n, но не лежит в U_{n+1}. Поэтому $n = 0$ и определён свободный член элемента f, обозначим его через f_0. Из равенства $a'f = 1$ получаем $af_0 = 1$, т. е. элемент a обратим справа, что и требовалось доказать.

3. Поскольку N — вполне первичный идеал, то ни один элемент множества $A \setminus N$ не является левым делителем нуля. Согласно 2) эти элементы обратимы справа. Поэтому $F = A/N$ — тело. Пусть $N^k = 0$. Фактор-модуль $M = N^i/N^{i+1}$ $(0 < i < k)$ можно рассматривать как модуль над F. Кроме того, поскольку A — цепное справа кольцо, модуль M цепной над телом F. Следовательно, M является простым F-модулем и порождается любым своим ненулевым элементом. Пусть теперь L — произвольный собственный правый идеал в A. Если $N \subseteq L$, то L/N — собственный правый идеал в теле F, и тогда $L = N$.

Пусть теперь $N \not\subseteq L$. Так как A — цепное справа кольцо, то $L \subseteq N$. Пусть $i < k+1$ — такое натуральное число, что $N^i \subseteq L \subset N^{i+1}$ (второе включение строгое). Рассмотрим L/N^{i+1} как подмодуль модуля N^i/N^{i+1} над F. Ввиду того что N^i/N^{i+1} — простой модуль, имеем $L = N^i$. Таким образом, для любого правого идеала L существует такое i, что $L = N^i$. Отсюда получаем, что кольцо A имеет ровно k собственных правых идеалов. В частности, A — артиново справа кольцо.

4. Так как A — нётерово справа кольцо, то его первичный радикал нильпотентен. Согласно утверждению 5) леммы 8.2 он является также вполне первичным идеалом. Применяя утверждение 3) данной леммы, получаем, что A — цепное справа артиново справа кольцо. □

Лемма 8.4. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *все правые циклические модули над кольцом* R *конечномерны* (*не содержат бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей*);
2) *кольцо* R *нётерово справа*;
3) *кольцо* A *нётерово справа.*

Доказательство. Равносильность условий 2) и 3) доказана в предложении 5.2.

Проверим импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Все правые циклические модули над кольцом R — это в точности все фактор-модули модуля R_R, поэтому если кольцо R нётерово справа, то и все правые циклические модули над ним нётеровы и, следовательно, конечномерны.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Идея доказательства этой импликации взята из [17].

Допустим, что кольцо A не является нётеровым справа. Тогда существует строго возрастающая цепочка правых идеалов $a_1A \subset a_1A + a_2A \subset \ldots$. Построим такую систему рядов Лорана $f^i \in A((x))$, что правые идеалы $\pi(f^i)R$ образуют бесконечную несократимую сумму. Принимая во внимание лемму 6.4, приходим к выводу, что это будет противоречить условию.

Пусть $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — сюръективное отображение натуральных чисел на натуральные числа, такое что $g^{-1}(n)$ — бесконечное множество для каждого натурального n. (Можно положить, например, $g(n) = n - [\sqrt{n}]^2 + 1$, где через $[x]$ обозначается целая часть от x.)

Зададим ряды f^i следующим образом: $f^{g(n)}_{2^n} = a_n$ для каждого n, а все остальные коэффициенты (отличные от вышеуказанных) всех рядов f^i равны нулю.

Предположим теперь, что $\pi(f^i)R$ не образуют несократимую сумму. Тогда существует такое i, что

$$\pi(f^i) \in \sum_{j\neq i} \pi(f^j)R.$$

Поэтому для некоторого набора элементов r_j из R выполнено равенство

$$\pi(f^i) = \sum_{j\neq i} \pi(f^j)r_j,$$

причём эта сумма содержит лишь конечное число ненулевых членов. Обозначим через l наименьшую из младших степеней r_j. В силу выбора отображения g множество $g^{-1}(i)$ бесконечно. Поэтому это множество содержит такое натуральное число n, что $2^n > -l$.

Тогда $f^i_{2^n} = f^{g(n)}_{2^n} = a_n$. Из равенства

$$\pi(f^i) = \sum_{j\neq i} \pi(f^j)r_j$$

следует, что

$$a_n \in \sum_{j\neq i,\ k\leqslant 2^n - l} f^j_k A.$$

Кроме того, коэффициент f_k^j может быть отличен от нуля, только если k совпадает с какой-то степенью двойки, причём $k \leqslant 2^n - l < 2^{n+1}$. При k, равном 2^n, коэффициент f_k^j (при j, отличном от i) также равен нулю. Таким образом,

$$a_n \in \sum_{j \neq i,\ k < 2^n} f_k^j A,$$

из чего следует

$$a_n \in \sum_{m<n} a_m A,$$

что противоречит выбору последовательности $\{a_m\}$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 8.5. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *R — цепное справа кольцо*;
2) *R — цепное справа артиново справа кольцо*;
3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\mu(J(A))$ — двусторонний идеал кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Все правые циклические модули над кольцом R являются фактор-модулями модуля R_R. Поэтому они являются цепными и, следовательно, конечномерными. По лемме 8.4 кольцо A является нётеровым справа.

Применяя теперь утверждение 4) леммы 8.3, получаем, что A — цепное справа артиново справа кольцо. Осталось доказать, что $\mu(J(A))$ — двусторонний идеал кольца R.

По предложению 5.3 кольцо R артиново справа. В силу утверждения 1) леммы 8.2 кольцо R инвариантно справа. Но тогда правый идеал $\mu(J(A))$ является двусторонним идеалом.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Цепное справа артиново справа кольцо A является полупримарным кольцом с радикалом Джекобсона J. Согласно утверждению 2) леммы 8.2 A — кольцо главных правых идеалов, в котором каждый собственный правый идеал совпадает с какой-либо степенью J, причём A/J — тело. Рассмотрим фактор-кольцо $R/\mu(J)$ (по условию $\mu(J)$ — двусторонний идеал). По лемме 2.7 кольцо $R/\mu(J)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A/J, откуда по теореме 5.1 получаем, что $R/\mu(J)$ — тело.

Так как A — кольцо главных правых идеалов, то J как правый идеал порождается одним элементом j, а $\mu(J)$ — элементом $\pi(j)$. Тогда

$$J^2 = jAjA = j(AjA) = jJ = jjA = j^2A.$$

Аналогично доказывается, что $J^n = j^nA$ и $\mu(J)^n = \pi(j^n)R$. Поэтому $\mu(J)^n = \mu(J^n)$. Так как идеал J нильпотентен, то $\mu(J)$ — нильпотентный идеал кольца R. Ввиду того что идеал $\mu(J^n)$ является главным правым идеалом кольца R, модуль $\mu(J^n)/\mu(J^{n+1})$ — одномерное линейное пространство над телом $R/\mu(J)$.

Докажем теперь, что $\mu(J^n)$ как правый идеал порождается любым элементом $r \in \mu(J^n) \setminus \mu(J^{n+1})$ (число n может быть равно нулю, тогда $\mu(J^n) = R$). Действительно, так как $\mu(J^n)/\mu(J^{n+1})$ — одномерное линейное пространство над телом $R/\mu(J)$, то существует такой элемент $a \in R$, что

$$(r + \mu(J^{n+1}))(a + \mu(J)) = j^n + \mu(J^{n+1}).$$

Значит, $ra = j^n(1+k)$, где $k \in \mu(J)$. Поскольку k — нильпотентный элемент, то $1+k$ — обратимый элемент. Поэтому $ra(1+k)^{-1} = j^n$, а отсюда следует, что элемент r порождает (как правый идеал) весь идеал $\mu(J^n)$.

Пусть теперь B — какой-либо собственный правый идеал кольца R, а n — минимальное натуральное число, такое что $\mu(J^n) \subseteq B$. Допустим, $B \neq \mu(J^n)$, тогда существует натуральное $i < n$, такое что пересечение $(\mu(J^i) \setminus \mu(J^{i+1})) \cap B$ непусто. Но тогда по доказанному выше $\mu(J^i) \subseteq B$. Получили противоречие. Поэтому любой собственный правый идеал в R совпадает с какой-то степенью $\mu(J)$, откуда R — цепное справа артиново справа кольцо. □

Теорема 8.5 получена для любых лорановских колец и верна, в частности, в случае кольца рядов Лорана и кольца псевдодифференциальных операторов.

Следствие 8.6. *Пусть A — кольцо, а φ — автоморфизм в нём. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *$A((x,\varphi))$ — цепное справа кольцо*;
2) *$A((x,\varphi))$ — цепное справа артиново справа кольцо*;
3) *A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. Из леммы 3.7 сразу вытекает, что правый идеал $\mu(J(A))$ кольца $A((x,\varphi))$ всегда является двусторонним идеалом (поскольку радикал Джекобсона любого кольца переходит в себя при любом автоморфизме). Тогда утверждение теоремы вытекает из теоремы 8.5 и предложения 4.1. □

Следствие 8.7. *Пусть A — кольцо и δ — его дифференцирование. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *$A((t^{-1},\delta))$ — цепное справа кольцо*;
2) *$A((t^{-1},\delta))$ — цепное справа артиново справа кольцо*;
3) *A — цепное справа артиново справа кольцо и $\delta(J(A)) \subseteq J(A)$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 3.7, теоремы 8.5 и следствия 4.2. □

В связи со следствием 8.7 отметим, что в предложении 7.11 построен пример цепного артинова кольца с таким дифференцированием в нём, что кольцо псевдодифференциальных операторов не является цепным.

Теорема 8.8. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Пусть правый идеал $\mu(J(A))$ является двусторонним идеалом кольца R, где $J(A)$ — радикал Джекобсона кольца A. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *кольцо R является полуцепным справа артиновым справа*;
2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. Обозначим радикал Джекобсона кольца A через J.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Поскольку кольцо A является полуцепным справа, в нём существует конечная система попарно ортогональных идемпотентов e_i $(i = 1, \ldots, n)$, такая что $\sum e_i = 1$ и e_iA — цепной модуль над A для каждого i. Для каждого идемпотента e и двустороннего идеала I верно равенство $eA \cap I = eI$. В частности, для всех $i = 1, \ldots, n$ и неотрицательных целых k выполнено равенство $e_iA \cap J^k = e_iJ^k$ (полагаем, что $J^0 = A$).

В силу того что A — артиново справа кольцо, идеал J нильпотентен и кольцо A/J является полупростым. Следовательно, все модули J^k/J^{k+1} над A/J также являются полупростыми. Поэтому для всех i и k цепной модуль

$$e_iJ^k/e_iJ^{k+1} \cong (e_iJ^k + J^{k+1})/J^{k+1} \subseteq J^k/J^{k+1}$$

является простым (над A/J и, следовательно, над A). Так как модуль e_iA является цепным для каждого i, то все его подмодули исчерпываются модулями e_iJ^k, среди которых лишь конечное число отлично от нуля в силу нильпотентности J. При этом каждый модуль e_iJ^k порождается любым своим элементом, не лежащим в модуле e_iJ^{k+1}.

Рассмотрим теперь радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R. По предложению 2.6 он лежит в правом идеале $\mu(J)$. Радикал J кольца A нильпотентен и, поскольку правый идеал $\mu(J)$ по условию является двусторонним, можно применить лемму 7.7, откуда получаем, что идеал $\mu(J)$ также является нильпотентным и, следовательно, лежит в $J(R)$. Поэтому $J(R) = \mu(J)$. Рассмотрим теперь правые идеалы $e_iR = \mu(e_iA)$ кольца R. Их прямая сумма равна R. Докажем теперь, что для каждого i правый идеал e_iR является цепным модулем над R.

Пусть $f \in e_iR$ — ненулевой элемент. Для некоторого неотрицательного k выполнено $f \in \mu(e_iJ^k) \setminus \mu(e_iJ^{k+1})$. Рассмотрим правый идеал $P = fR + \mu(e_iJ^{k+1})$ кольца R. Он лежит в $\mu(e_iJ^k)$ и содержит $\mu(e_iJ^{k+1})$. Тогда $\lambda(P)$ лежит в e_iJ^k и содержит e_iJ^{k+1}. Так как e_iJ^k/e_iJ^{k+1} — простой модуль, то $\lambda(P)$ совпадает либо с e_iJ^k, либо с e_iJ^{k+1}. Но правые идеалы e_iJ^{k+1} и e_iJ^k являются главными, поэтому можно применить лемму 1.3 и получить, что $P = \mu(e_iJ^{k+1})$, что невозможно по выбору k, или $P = \mu(e_iJ^k)$.

Из равенства $fR+\mu(e_iJ^{k+1}) = \mu(e_iJ^k)$ следует, что в правом идеале fR найдётся элемент g вида $\pi(e_ij_k) + r$, где e_ij_k — элемент кольца A, порождающий правый идеал e_iJ^k, а r — произвольный элемент из $\mu(e_iJ^{k+1})$. Тогда порождающий элемент главного правого идеала e_iJ^{k+1} может быть представлен в виде e_ij_kj, где j — некоторый элемент из J, и поэтому

$$r \in \mu(e_iJ^{k+1}) = \pi(e_ij_kj)R = \pi(e_ij_k)\pi(j)R,$$

откуда $f \in \pi(e_ij_k)(1 + \pi(j)R)$. В силу того что $J(R) = \mu(J)$, все элементы из $1 + \pi(j)R$ обратимы, следовательно, $\pi(e_ij_k) \in fR$, откуда $fR = \mu(e_iJ^k)$. Таким образом, все подмодули модуля e_iR исчерпываются модулями $\mu(e_iJ^k)$ и e_iR — цепной артинов модуль.

Следовательно, модуль R_R является конечной прямой суммой цепных артиновых модулей. Поэтому R — полуцепное справа артиново справа кольцо, что и требовалось доказать.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть π — вложение кольца A в кольцо R, как в определении лорановского кольца во втором смысле. В силу предложения 5.3 кольцо A артиново справа. Таким образом, радикал J нильпотентен. По предложению 2.6 радикал $J(R)$ лежит в правом идеале $\mu(J)$. Радикал J кольца A нильпотентен и, поскольку правый идеал $\mu(J)$ по условию является двусторонним, можно применить лемму 7.7, откуда получаем, что идеал $\mu(J)$ также является нильпотентным и, следовательно, лежит в $J(R)$. Поэтому $J(R) = \mu(J)$.

Рассмотрим полупростое кольцо $B \equiv A/J$ и в нём систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$, такую что $\sum e_i = 1$. По лемме 2.7 кольцо $S = R/\mu(J)$ также является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов B. Легко видеть, что отображение π_S из B в S, определённое соотношением $\pi_S(a+J) = \pi(a) + \mu(J)$, является вложением кольца B в кольцо S, удовлетворяющим условию г) определения лорановского кольца. Все идеалы e_iB являются минимальными. Поэтому для каждого i по лемме 1.3 правый идеал $\pi_S(e_i)S$ порождается любым своим ненулевым элементом, т. е. является минимальным. Таким образом, идемпотенты $\pi_S(e_i)$ являются примитивными в полупростом кольце S. В силу полупримарности кольца A полную конечную систему примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}$ кольца A/J можно поднять до полной системы примитивных попарно ортогональных идемпотентов $\{d_i\}$ кольца A. Тогда все идемпотенты $\pi(d_i)$ будут примитивны в кольце R, поскольку примитивны их образы $\pi(d_i) + J(R) = \pi_S(e_i)$ в кольце $R/J(R)$.

Так как R — полуцепное справа кольцо и любое прямое разложение артинова справа кольца R в прямую сумму ненулевых неразложимых правых идеалов является единственным с точностью до изоморфизма, то все правые идеалы $\pi(d_i)R$ кольца R являются цепными модулями над R. Кроме того, для каждого i решётка подмодулей правого идеала d_iA вкладывается в решётку подмодулей d_iR с помощью отображения $M \to \mu(M)$. Поэтому модуль d_iA тоже является цепным, и кольцо A представляется в виде прямой суммы конечного числа цепных модулей d_iA. Следовательно, A — полуцепное справа кольцо. □

Следствие 8.9. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *кольцо $A((x,\varphi))$ является полуцепным справа артиновым справа*;
2) *кольцо A является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. Отметим, что в силу леммы 3.7 и того, что $\varphi(J(A)) = J(A)$, выполнены условия теоремы 8.8, из которой и следует заключение теоремы. □

Следствие 8.10. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём, причём для радикала Джекобсона $J(A)$ кольца A выполнено включение $\delta(J(A)) \subseteq J(A)$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *кольцо псевдодифференциальных операторов* $A((t^{-1},\delta))$ *является полуцепным справа артиновым справа*;
2) *кольцо* A *является полуцепным справа артиновым справа.*

Доказательство. По лемме 3.7 выполнены условия теоремы 8.8, из которой и следует заключение теоремы. □

9. Дистрибутивные полулокальные кольца

Лемма 9.1. *Пусть* R — *лорановское кольцо, а* A — *его кольцо коэффициентов. Пусть кольцо* R *инвариантно справа, а кольцо* A *редуцированно. Тогда*:

1) *если* φ — *автоморфизм кольца коэффициентов* A, *переводящий элемент* u_0+U_1 *в элемент* $\pi(x)u_0\pi(x^{-1})+U_1$, *то* $\varphi^n(a)A=aA$ *для всех* a *из* A *и для всех целых* n;
2) *если для элементов* r *и* s *из* U_0 *и для целого числа* n *выполнено соотношение* $r\pi(x^n)s\in U_{n+1}$, *то для свободных членов* r_0 *и* s_0 *выполнены соотношения* $r_0s_0=0$ *и* $s_0r_0=0$;
3) *если для свободных членов* r_0 *и* s_0 *элементов* r *и* s *из* U_0 *выполнено соотношение* $r_0s_0=0$, *то для любого целого числа* m *выполнены соотношения* $r\pi(x^m)s\in U_{m+1}$ *и* $s\pi(x^m)r\in U_{m+1}$;
4) *радикал Джекобсона* $J(R)$ *кольца* R *равен нулю.*

Доказательство. В доказательстве потребуется следующее свойство редуцированного кольца A: если $a,b\in A$ и $ab=0$, то $(ba)^2=b(ab)a=0$, откуда из-за нильпотентных элементов следует, что $ba=0$. Кроме того, каждый обратимый справа элемент редуцированного кольца A обратим слева.

1. Пусть a — элемент кольца A, а n — целое число. Тогда элемент $\varphi^n(a)$ из A равен свободному члену элемента $\pi(x^n)\pi(a)\pi(x^{-n})$ из U_0. Поскольку кольцо R инвариантно справа, элемент $\pi(x^n)\pi(a)\pi(x^{-n})$ лежит в правом идеале $\pi(a)R=\mu(aA)$, поэтому все его левые коэффициенты (и, в частности, свободный член) лежат в aA. Поэтому $\varphi^n(a)A\subseteq aA$. В силу того что n может принимать и отрицательные значения, получаем, что $\varphi^n(a)A=aA$ для всех a из A и для всех целых n.

2. Действительно, $r\pi(x^n)s\pi(x^{-n})\in U_1$, поэтому произведение свободных членов элементов r и $\pi(x^n)s\pi(x^{-n})$ равно нулю, т. е. $r_0\varphi^n(s_0)=0$. Из пункта 1) вытекает, что $s_0\in\varphi^n(s_0)A$, поэтому $r_0s_0=0$, откуда вытекает также, что $s_0r_0=0$.

3. Пусть m — произвольное целое число. Тогда в силу 1) $\varphi^m(s_0)\in s_0A$, и поэтому $r_0\varphi^m(s_0)=0$, т. е. произведение свободных членов элементов r и $\pi(x^m)s\pi(x^{-m})$ равно нулю, откуда $r\pi(x^m)s\pi(x^{-m})\in U_1$. Получаем, что $r\pi(x^m)s\in U_{m+1}$. Аналогично из соотношения $s_0r_0=0$ получаем $s\pi(x^m)r\in U_{m+1}$, что и требовалось доказать.

4. Допустим, что радикал $J(R)$ отличен от нуля. Тогда в нём найдётся элемент $r = \pi(fx^{-1})$, младшая степень которого равна -1 (и тогда младшая степень ряда f равна нулю). По предложению 2.6 все коэффициенты ряда fx^{-1} (и, следовательно, все коэффициенты ряда f) лежат в радикале $J(A)$. Пусть $(1+r)^{-1} = \pi(gx^m)$ — элемент из R, обратный к $1+\pi(fx^{-1})$, и младшая степень ряда g равна нулю.

Допустим, что $m < 0$. Из равенства $(1+\pi(fx^{-1}))\pi(gx^m) = 1$ получаем

$$(\pi(x) + \pi(f))\pi(x^{-1})\pi(g) = \pi(x^{-m}) \in U_{-m} \subseteq U_0.$$

По пункту 2) получаем, что $f_0g_0 = 0$ и $g_0f_0 = 0$. В силу правой инвариантности кольца R выполнено включение

$$\pi(f_0)R\pi(g_0) \subseteq \pi(f_0)\pi(g_0)R = \pi(f_0g_0)R = 0.$$

Из соотношения

$$\begin{aligned}\pi(x^{-m}) &= (\pi(x) + \pi(f))\pi(x^{-1})\pi(g) = \\ &= (\pi(f_0) + \pi(1 + f_1)\pi(x) + \ldots)\pi(x^{-1})(\pi(g_0) + \pi(g_1)\pi(x) + \ldots) = \\ &= \pi(x^{-m}) \in U_{-m}\end{aligned}$$

получаем

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) \in U_1.$$

В силу доказанного выше $\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_0) = 0$, поэтому

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) \in U_1.$$

Домножив справа на $\pi(x^{-1})\pi(f_0)$ и учтя, что $g_0\pi(x^{-1})f_0 \in g_0f_0R = 0$, получаем

$$\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(f_0) \in U_0,$$

откуда по пункту 2) получаем, что $f_0g_1f_0 = 0$, поэтому $(f_0g_1)^2 = 0$ и $f_0g_1 = 0$. Отсюда

$$\pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1) \in \pi(f_0)\pi(g_1)R = 0,$$

поэтому из соотношения

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) \in U_1$$

получаем $\pi(1 + f_1)\pi(g_0) \in U_1$, откуда $(1 + f_1)g_0 = 0$. Но элемент f_1 по предложению 2.6 лежит в радикале Джекобсона, поэтому элемент $1 + f_1$ обратим. Следовательно, $g_0 = 0$, что противоречит выбору элемента g.

Допустим теперь, что $m = 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем равенства $f_0g_0 = 0$ и $g_0f_0 = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) + \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) - 1 \in U_1.$$

Тогда

$$\pi(1 + f_1)\pi(g_0) \in 1 - \pi(f_0)\pi(x^{-1})\pi(g_1)\pi(x) + U_1 = 1 - \pi(f_0)\pi(\varphi^{-1}(g_1)) + U_1,$$

откуда $(1+f_1)g_0 = 1 - f_0\varphi^{-1}(g_1)$. Элемент f_0 по предложению 2.6 лежит в радикале Джекобсона $J(A)$, поэтому элемент $1 - f_0\varphi^{-1}(g_1)$ обратим, аналогично обратим и элемент $1+f_1$. Поэтому элемент g_0 также обратим, что противоречит равенству $f_0g_0 = 0$ и выбору ряда f.

Наконец, допустим, что $m > 0$. Тогда из равенства $(1+\pi(fx^{-1}))\pi(gx^m) = 1 \in U_0$ вытекает, что $m = 1$ и произведение свободных членов элементов $\pi(f)$ и $\pi(x^{-1})\pi(g)\pi(x)$ равно единице. Но этого не может быть, поскольку по предложению 2.6 свободный член элемента $\pi(f)$ лежит в радикале $J(A)$ и, следовательно, не может быть обратимым. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Предложение 9.2. *Пусть A — кольцо. Тогда*:

1) *если R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов и кольцо R полулокально, то кольцо A полулокально*;
2) *если φ — автоморфизм кольца A и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана полулокально, то кольцо A полулокально*;
3) *если δ — дифференцирование кольца A и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ полулокально, то кольцо A полулокально.*

Доказательство. 1. Допустим, что кольцо A не полулокально. Тогда в нём существует бесконечная последовательность максимальных правых идеалов B_1, B_2, $B_3,\ldots$, такая что правые идеалы B_1, $B_1\cap B_2$, $B_1\cap B_2\cap B_3,\ldots$ образуют строго убывающую последовательность. По лемме 2.5 правые идеалы $\mu(B_i)$ являются максимальными правыми идеалами кольца R, при этом идеалы $\mu(B_1)$, $\mu(B_1)\cap\mu(B_2)$, $\mu(B_1)\cap\mu(B_2)\cap\mu(B_3),\ldots$ тоже образуют строго убывающую последовательность, что противоречит полулокальности кольца R. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пункты 2) и 3) непосредственно вытекают из пункта 1) предложения 4.1 и следствия 4.2. $\square$

Из того что отображение μ является инъективным вложением решётки правых идеалов кольца A в решётку правых идеалов кольца R, непосредственно вытекает следующее простое утверждение.

Предложение 9.3. *Пусть A — кольцо. Тогда*:

1) *если R — лорановское кольцо, A — его кольцо коэффициентов и кольцо R дистрибутивно справа, то и кольцо A дистрибутивно справа*;
2) *если φ — автоморфизм кольца A и кольцо $A((x,\varphi))$ косых рядов Лорана дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа*;
3) *если δ — дифференцирование кольца A и кольцо псевдодифференциальных операторов $A((t^{-1},\delta))$ дистрибутивно справа, то и кольцо коэффициентов A дистрибутивно справа.*

Следующая лемма содержит известные утверждения (см., например, [18,20]) и приведена с доказательством только для удобства.

Лемма 9.4. *Пусть A — дистрибутивное справа кольцо. Тогда*:

1) *если I и J — правые идеалы кольца A, то между $I/(I \cap J)$ и $J/(I \cap J)$ нет ненулевых модульных гомоморфизмов*;
2) *если A нётерово справа, то A инвариантно справа*;
3) *если A — полупростое кольцо, то A является прямым произведением конечного числа тел*;
4) *если A полулокально, то A не содержит бесконечных несократимых сумм правых идеалов*;
5) *предположим, что A инвариантно справа, идеал $J(A)$ нильпотентен и фактор-кольцо $A/J(A)$ является прямым произведением конечного числа тел. Тогда A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец.*

Доказательство. 1. Достаточно доказать, что если $(X \oplus Y)_A$ — дистрибутивный модуль и $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$, то $f(x) = 0$ для любого $x \in X$. По лемме 6.5 для элементов $x \in X$ и $f(x) \in Y$ найдётся такой элемент $a \in A$, что

$$xa, f(x)(1-a) \in xA \cap f(x)A \subseteq X \cap Y = 0.$$

Тогда

$$f(x) = f(x)(a + (1-a)) = f(x)a = f(xa) = f(0) = 0.$$

2. Пусть I — правый идеал кольца A, а $y \in A$ — произвольный элемент этого кольца. Тогда в силу нётеровости кольца A возрастающая цепочка

$$I \subseteq (I + yI) \subseteq (I + yI + y^2I) \subseteq \ldots$$

должна стабилизироваться. Пусть

$$J = I + yI + \ldots + y^nI$$

и $J + y^{n+1}I \subseteq J$. Тогда $yJ \subseteq J$. Пусть k — такое минимальное целое число, что

$$J = I + yI + \ldots + y^kI.$$

Предположим, что $yI \nsubseteq I$. Тогда k отлично от нуля. Пусть

$$K = I + yI + \ldots + y^{k-1}I.$$

Тогда $J \neq K$ и $J = K + yK$.

Правилом $x \to yx$ задаётся модульный гомоморфизм ψ из J в J, который естественным образом индуцирует гомоморфизм $\bar{\psi}$ из J/K в J/yK. Кроме того,

$$J/K = (yK + K)/K \cong yK/(K \cap yK)$$

и аналогично

$$J/yK \cong K/(K \cap yK).$$

Поэтому (в силу 1)) гомоморфизм $\bar{\psi}$ должен быть нулевым. Тогда

$$\psi(J) = yJ \subseteq yK = \psi(K).$$

Таким образом,

$$J = \psi^{-1}(\psi(J)) = \psi^{-1}(\psi(K)) = K + \ker\psi.$$

Обозначим через K_1 правый идеал $\psi^{-1}(K)$. Непосредственно проверяется, что

$$J = K + \ker\psi \subseteq K + K_1 = K_1 + \psi(K_1).$$

Применяя к K_1 те же рассуждения, что и ранее к K, получаем равенство $K_1 + \ker\psi = J$. Кроме того, $\ker\psi \subseteq K_1$. Поэтому $\psi^{-1}(K) = K_1 = J$. Тогда $yK \subseteq yJ = \psi(J) \subseteq K$, откуда $J = K + yK = K$, что противоречит выбору K.

3. Поскольку кольцо A полупросто, то оно является прямым произведением конечного числа простых колец A_i. По пункту 2) кольцо A (а следовательно, и каждое из колец A_i) является инвариантным справа. Инвариантное справа простое кольцо является телом. Следовательно, A является прямым произведением конечного числа тел.

4. Так как кольцо A полулокально, то существует лишь конечное число неизоморфных простых правых модулей над A.

Предположим теперь, что $S = \sum I_i$ — счётная несократимая сумма ненулевых правых идеалов кольца A (без ограничения общности можно считать, что $\{I_i\}$ — главные правые идеалы). Тогда положим $J_j = \sum\limits_{i\neq j} I_i$. Заметим, что все подмодули J_j отличны от модуля S. Каждый правый модуль S/J_j является циклическим ненулевым модулем и обладает поэтому простым фактор-модулем. Поскольку j пробегает бесконечное множество значений и общее число неизоморфных простых правых модулей над A конечно, то среди вышеупомянутых простых фактор-модулей имеется хотя бы два изоморфных модуля. Это означает, что найдутся различные индексы i, j и собственные подмодули M, N в модуле S, такие что $S/M \cong S/N$, причём $J_i \subseteq M$ и $J_j \subseteq N$. Кроме того, $S = J_i + J_j \subseteq M + N$. Следовательно,

$$S/M = (M+N)/M = N/(M\cap N), \quad S/N = (M+N)/N = M/(M\cap N).$$

Поэтому

$$N/(M\cap N) \cong M/(M\cap N),$$

что в силу пункта 1) противоречит дистрибутивности A.

5. Пусть фактор-кольцо $A/J(A)$ является прямым произведением конечного числа тел F_i. Обозначим через f_i единицу тела F_i. Единица фактор-кольца $A/J(A)$ является суммой попарно ортогональных идемпотентов f_i. Конечная система $\{f_i\}$ попарно ортогональных идемпотентов фактор-кольца $A/J(A)$ поднимается до системы попарно ортогональных идемпотентов e_i кольца A, поскольку $J(A)$ — ниль-идеал. Тогда $A = \bigoplus e_iA$.

Все идемпотенты инвариантного справа кольца A являются центральными в A. Кроме того,

$$F_i = (e_iA + J(A))/J(A) \cong e_iA/(e_iA\cap J(A)) -$$

тело. Тогда e_iA — дистрибутивное кольцо (обозначим его A_i), причём кольцо $A_i/(A_i \cap J(A))$ является тело и идеал $A_i \cap J(A)$ нильпотентен. Умножение на e_i является гомоморфизмом из кольца A в кольцо A_i. Поэтому

$$A_i \cap J(A) = e_iJ(A) \subseteq J(e_iA) = J(A_i),$$

и $e_iJ(A) = J(A_i)$, поскольку $A_i/e_iJ(A)$ — тело. Таким образом, A_i — дистрибутивное справа инвариантное справа локальное кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона.

Тогда дистрибутивный правый модуль $J^n(A_i)/J^{n+1}(A_i)$ является векторным пространством над телом $A_i/J(A_i)$, и (в силу дистрибутивности) он прост. Поэтому

$$J(A_i)/J^2(A_i) = \bar{\jmath}(A_i/J(A_i)),$$

где j — произвольный элемент из $J(A_i) \setminus J^2(A_i)$, а $\bar{\jmath}$ — его образ в модуле $J(A)/J^2(A)$ при естественном эпиморфизме. Получаем

$$J(A_i) = jA_i + J^2(A_i) = jA_i + (jA_i + J^2(A_i))^2 = jA_i + j^2A_i + J^3(A_i) = \ldots = jA_i$$

в силу нильпотентности $J(A_i)$ и инвариантности A_i. Тогда $J^n(A_i)$ как правый идеал порождается любым элементом из $j^nA_i \setminus j^{n+1}A_i$, из чего следует, что любой правый идеал кольца A_i совпадает с какой-то степенью $J(A)$. Поэтому для каждого i кольцо A_i является цепным справа и артиновым справа, а кольцо A изоморфно прямому произведению A_i. $\square$

Теорема 9.5. *Пусть R — лорановское кольцо, а A — его кольцо коэффициентов. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *кольцо R дистрибутивно справа и полулокально*;
2) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа колец*;
3) *R — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец*;
4) *A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причём правый идеал $\mu(A_i)$ является двусторонним для всех i.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Из предложений 9.3 и 9.2 следует, что кольцо A дистрибутивно справа и полулокально. По пункту 4) леммы 9.4 кольцо R не содержит бесконечных несократимых сумм правых идеалов. Кроме того, из лемм 6.4 и 8.4 следует, что кольца A и R нётеровы справа. По пункту 2) леммы 9.4 кольца A и R инвариантны справа.

Пусть $N(A)$ — первичный радикал кольца A. Так как A — нётерово справа кольцо, то идеал $N(A)$ нильпотентен. Из правой инвариантности кольца A следует, что $N(A)$ совпадает с множеством всех нильпотентных элементов кольца A. Тогда $A/N(A)$ — редуцированное кольцо. Поскольку R — инвариантное справа кольцо, идеал $\mu(N(A))$ является двусторонним. По лемме 2.7 кольцо $R/\mu(N(A))$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов $A/N(A)$. По пункту 4) леммы 9.1 радикал Джекобсона $J(R/\mu(N(A)))$ равен нулю, поэтому радикал Джекобсона $J(R)$ кольца R равен $\mu(N(A))$. По условию кольцо R

полулокально, поэтому кольцо $R/J(R) = R/\mu(N(A))$ артиново полупросто. По предложению 5.3 $A/N(A)$ — артиново кольцо. Тогда его радикал Джекобсона нильпотентен и, следовательно, равен нулю, так как в фактор-кольце $A/N(A)$ не может быть ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому $A/N(A)$ — полупростое артиново кольцо и $J(A) = N(A)$.

Применяя пункт 3) леммы 9.4 к кольцу $A/J(A)$ и пункт 5) леммы 9.4 к кольцу A, получаем, что A — прямое произведение конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i. Поскольку кольцо R инвариантно справа, то все правые идеалы $\mu(A_i)$ являются двусторонними, что и требовалось доказать.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Пусть кольцо A разлагается в прямую сумму конечного числа колец A_i, причём $\mu(A_i)$ — двусторонние идеалы кольца R. Тогда, поскольку отображение $B \to \mu(B)$ сохраняет конечные суммы и пересечения правых идеалов, кольцо R разлагается в прямую сумму правых идеалов $\mu(A_i)$, являющихся по условию также и двусторонними идеалами. Остаётся доказать, что каждое из колец $\mu(A_i)$ является цепным справа артиновым справа. Для этого докажем, что кольцо $\mu(A_i)$ является лорановским кольцом с кольцом коэффициентов A_i.

Пусть π — отображение из $A((x))$ в R, удовлетворяющее условиям 1)—4) определения лорановского кольца. Кольцо $A_i((x))$ естественным образом вкладывается в кольцо $A((x))$, поэтому можно рассмотреть ограничение π_i отображения π на $A_i((x))$. Непосредственно проверяется, что отображение π_i осуществляет биекцию кольца $A_i((x))$ на кольцо $\mu(A_i)$ и удовлетворяет условиям 1)—4). Поэтому кольцо $\mu(A_i)$ — лорановское кольцо с кольцом коэффициентов A_i, которое по теореме 8.5 является цепным справа артиновым справа кольцом, что и требовалось доказать.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Кольцо R дистрибутивно справа, поскольку любое прямое произведение дистрибутивных справа колец является дистрибутивным справа кольцом. Кольцо R полулокально, поскольку является прямым произведением конечного числа локальных колец. $\square$

Замечание. Множество всех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся ни на 2, ни на 3, является дистрибутивным справа полулокальным кольцом, но не является прямым произведением цепных справа колец. Множество A всех рациональных чисел с нечётными знаменателями является цепным кольцом, но не является полуцепным артиновым кольцом. В частности, A не является прямым произведением цепных артиновых колец. Из этих примеров следует, что для произвольного кольца условия, сформулированные в пунктах 1), 2) и 3) теоремы 9.5, не равносильны (хотя третье влечёт второе, а второе влечёт первое).

Отметим также, что дистрибутивные кольца рядов Лорана не обязаны быть ни полулокальными, ни нётеровыми справа или слева. Можно проверить, что нужный пример даёт кольцо $A((x))$, где A — прямое произведение бесконечного числа полей A_i ($i = 1, 2, 3 \ldots$). Действительно, $A[[x]]$ — коммутативное дистрибутивное кольцо, поскольку

$$A[[x]] \cong \prod_{i=1}^{+\infty} A_i[[x]]$$

и все $A_i[[x]]$ — цепные кольца. Таким образом, кольцо $A((x))$ изоморфно кольцу частных дистрибутивного кольца $A[[x]]$ относительно мультипликативно замкнутого множества $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

Используя теорему 9.5 и лемму 3.7, можно получить следующие два утверждения.

Следствие 9.6. *Пусть A — кольцо, а φ — его автоморфизм. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *кольцо $A((x, \varphi))$ дистрибутивно справа и полулокально*;
2) *кольцо $A((x, \varphi))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец*;
3) *кольцо $A((x, \varphi))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец*;
4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причём $\varphi(A_i) = A_i$ для всех i.*

В связи со следствием 9.6 заметим, что ситуация в случае колец рядов Лорана отличается от случая колец формальных степенных рядов, поскольку можно проверить, что кольцо формальных степенных рядов от одной переменной является прямым произведением конечного числа цепных справа колец тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является конечным прямым произведением тел.

Следствие 9.7. *Пусть A — кольцо, а δ — дифференцирование в нём. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *кольцо $A((t^{-1}, \delta))$ дистрибутивно справа и полулокально*;
2) *кольцо $A((t^{-1}, \delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа колец*;
3) *кольцо $A((t^{-1}, \delta))$ является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец*;
4) *кольцо A является прямым произведением конечного числа цепных справа артиновых справа колец A_i, причём $\delta(A_i) \subseteq A_i$ для всех i.*

10. Замечания о кольцах рядов Лорана от нескольких переменных

Представляется естественным попытаться определить кольца рядов Лорана от нескольких переменных.

Определение. Пусть A — кольцо. Кольцом рядов Лорана от n переменных называется кольцо $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ формальных сумм вида

$$f = \sum_{i_1=m_1}^{+\infty} \sum_{i_2=m_2}^{+\infty} \ldots \sum_{i_n=m_n}^{+\infty} f_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — произвольные (возможно отрицательные) целые числа, а $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — произвольные элементы кольца A. Сложение и умножение в кольце $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ вводятся обычным образом, с учётом того, что переменные коммутируют друг с другом и с коэффициентами. Отметим, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ абсолютно равноправны и любая их перестановка задаёт корректный автоморфизм кольца $A((x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Замечание. Это не единственное возможное обобщение конструкции рядов Лорана на случай нескольких переменных. Можно рассмотреть *кольцо итерированных рядов Лорана*, когда кольцо рядов Лорана от n переменных $A((x_1))((x_2))\ldots((x_n))$ определяется по индукции как кольцо обычных рядов Лорана от переменной x_n с кольцом коэффициентов $A((x_1))((x_2))\ldots((x_{n-1}))$. При таком определении переменные неравноправны. Свойства кольца итерированных рядов Лорана близки к свойствам кольца обычных рядов Лорана.

Изучение показывает, что свойства колец рядов Лорана от нескольких переменных резко отличаются от свойств кольца рядов Лорана от одной переменной. Пусть A — кольцо, а $A((x, y))$ — кольцо рядов Лорана от двух переменных над ним. Тогда рассмотрим кольца итерированных рядов Лорана $A((x))((y))$ и $A((y))((x))$. Легко видеть, что эти два кольца не совпадают как множества формальных сумм от степеней x и y (так, например, элемент $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i y^{-i}$ лежит в $A((y))((x))$, но не лежит в $A((x))((y))$). Переменные x и y в этих кольцах неравноправны, а перестановка переменных задаёт изоморфизм $A((x))((y))$ на $A((y))((x))$ и наоборот. При этом кольцо $A((x, y))$ является подкольцом кольца $A((x))((y))$ и одновременно кольца $A((y))((x))$ (более того, $A((x, y))$ совпадает с пересечением $A((x))((y))$ и $A((y))((x))$ как множеств формальных сумм).

При рассмотрении рядов Лорана от одной переменной важную роль играет младший член — член суммы, содержащий наименьшую степень переменной. Для ряда от нескольких переменных понятие младшего члена необходимо уточнить. Если мы рассматриваем ненулевой ряд Лорана от двух переменных x и y, то выберем из всех членов ряда те, в которые x входит в наименьшей степени, а из них выберем тот член, который содержит наименьшую степень переменной y и назовём его младшим членом для перестановки (x, y). Поменяв местами переменные x и y мы получим определение младшего члена (y, x) этого ряда. В случае n переменных для любой заданной перестановки переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно определить свой младший член. Если зафиксировать одну перестановку переменных, то очевидно, что произведение младших членов двух рядов либо равно нулю, либо равно младшему члену произведения этих двух рядов. В кольце рядов Лорана от двух переменных важной характеристикой ряда является совпадение или несовпадение двух его младших членов.

В работе было показано, что кольцо рядов Лорана от одной переменной является телом (артиновым справа кольцом) тогда и только тогда, когда кольцо коэффициентов является телом (артиновым справа кольцом). Следующие предложения показывают, что эти утверждения не переносятся на кольца рядов Лорана от нескольких переменных.

Предложение 10.1. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x, y))$ не является артиновым справа кольцом.*

Доказательство. Достаточно доказать, что кольцо $A((x, y))$ содержит необратимый справа элемент, не являющийся левым делителем нуля. Таким элементом является $x + y$.

Действительно, допустим, что f — некоторый ряд из $A((x, y))$, такой что $(x + y)f = 0$. Пусть f_{xy} — младший член (x, y) ряда f. Тогда младший член (x, y) ряда $(x + y)f$ должен быть равен yf_{xy} и, следовательно, отличен от нуля, что противоречит равенству $(x + y)f = 0$.

Заметим теперь, что элемент $x + y$ обратим в кольце $A((x))((y))$, причём его обратный равен

$$(x + y)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i x^{-i-1} y^i,$$

но элемент $(x + y)^{-1}$ не лежит в кольце $A((x, y))$, вложенном в $A((x))((y))$. В силу единственности обратного элемента в кольце $A((x))((y))$ получаем, что элемент $x + y$ не обратим (ни слева, ни справа) в кольце $A((x, y))$. Доказательство завершено. □

Замечание. Рассмотренный в доказательстве элемент $x+y$ обратим и в кольце $A((x))((y))$, и в кольце $A((y))((x))$, но его обратные в этих кольцах отличаются друг от друга как формальные суммы одночленов от x и y.

Кольцо A называется *локальным*, если его фактор-кольцо по радикалу Джекобсона является телом.

Предложение 10.2. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x, y))$ не является локальным.*

Доказательство. Действительно, если $A((x, y))$ — локальное кольцо, то либо элемент $(x^{-1} + y^{-1})$ обратим, либо элемент $1 + (x^{-1} + y^{-1})$ обратим. Пусть один из них (обозначим его f) обратим. Заметим, что младшие члены ряда f равны $f_{xy} = x^{-1}$ и $f_{yx} = y^{-1}$. Тогда пусть g — ряд, обратный к f, а его младшие члены равны g_{xy} и g_{yx} (возможно, они совпадают). Тогда младшие члены ряда fg равны $x^{-1}g_{xy}$ и $y^{-1}g_{yx}$ и не могут совпадать (поскольку в первый из них x входит в по крайней мере на единицу меньшей степени, чем во второй). Но это противоречит тому, что $fg = 1$. □

Кольцо A называется *областью*, если произведение любых двух его ненулевых элементов отлично от нуля. Кольцо A называется *полупримитивным*, если его радикал Джекобсона равен нулю.

Предложение 10.3. *Пусть A — произвольное кольцо. Тогда равносильны следующие условия*:

1) $A((x,y))$ — *полупримитивная область, не являющаяся телом*;
2) *кольцо рядов Лорана от двух переменных $A((x,y))$ — область*;
3) A — *область.*

Доказательство. Равносильность условий 3) и 2) легко следует из того, что младший член (x,y) произведения двух рядов равен произведению их младших членов (x,y), и из того, что кольцо A естественным образом вкладывается в $A((x,y))$. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) тривиальна. Остаётся доказать импликацию 3), 2) $\Longrightarrow$ 1).

Пусть f — ненулевой ряд, лежащий в радикале Джекобсона кольца $A((x,y))$. Тогда пусть $f_{xy} = ax^l y^n$ и $f_{yx} = bx^k y^m$ — его младшие члены (x,y) и (y,x) соответственно (при этом $l \leqslant k$ и $m \leqslant n$). Заменив в случае необходимости f на $fx^{-l}y^{-m}$, мы можем считать, что $l = 0$, $m = 0$ и $f_{xy} = ay^n$, $f_{yx} = bx^k$. Допустим, что $f_{xy} = f_{yx}$, тогда $n = k = 0$. Тогда заменим f на $g = f(x+y)$ и получим, что $g_{xy} \neq g_{yx}$. Поэтому можно считать, что $f_{xy} \neq f_{yx}$ и $n > 0$, $k > 0$. Ряд f лежит в радикале Джекобсона кольца $A((x,y))$, поэтому ряд $1 + x^{-1}y^{-1}f$ обратим, но тогда обратим и ряд $g = xy + f$. Нетрудно видеть, что младшие члены ряда g равны $g_{xy} = f_{xy} = ay^n$ и $g_{yx} = f_{yx} = bx^k$ и, следовательно, не совпадают друг с другом. Пусть h — ряд, обратный к ряду g. Пусть h_{xy} и h_{yx} — его младшие члены (возможно, они совпадают). Тогда младшие члены ряда gh равны соответственно $h_{xy}g_{xy}$ и $h_{yx}g_{yx}$. Нетрудно видеть, что младшие члены ряда gh также не совпадают друг с другом. Но h — обратный к g, поэтому $gh = 1$. Получено противоречие.

Осталось заметить, что кольцо $A((x,y))$ не является телом; это следует из предложения 10.1. □

Литература

[1] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[2] Мальцев А. И. О вложении групповых алгебр в тела // ДАН СССР. — 1948. — Т. 60. — С. 1499—1501.

[3] Паршин А. Н. О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1999. — Т. 224. — С. 291—305.

[4] Сонин К. И. Регулярные кольца рядов Лорана // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 1. — С. 315—317.

[5] Сонин К. И. Регулярные кольца косых рядов Лорана // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 565—568.

[6] Сонин К. И. Бирегулярные кольца рядов Лорана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1997. — № 4. — С. 22—24.

[7] Туганбаев Д. А. Цепные кольца рядов Лорана // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 3. — С. 947—951.

[8] Туганбаев Д. А. Цепные кольца косых рядов Лорана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 1. — С. 52—55.

[9] Туганбаев Д. А. Кольца косых рядов Лорана и кольца главных идеалов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 5. — С. 55—57.

[10] Туганбаев Д. А. Полулокальные дистрибутивные кольца косых рядов Лорана // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 913—921.

[11] Туганбаев Д. А. Кольца псевдодифференциальных операторов и условия на цепи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2002. — № 4. — С. 26—32.

[12] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — М.: Мир, 1979.

[13] Cohn P. M. Skew fields. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[14] Goodearl K. R. Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings // Rocky Mountain J. Math. — 1983. — Vol. 13, no. 4. — P. 573—618.

[15] Goodearl K. R., Warfield R. B. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. — Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[16] Neumann B. H. On ordered division rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 66. — P. 202—252.

[17] Sonin C. Krull dimension of Malcev–Neumann rings // Comm. Algebra. — 1998. — Vol. 26, no. 9. — P. 2915—2931.

[18] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[19] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.

[20] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[21] Tuganbaev D. A. Some ring and module properties of skew Laurent series // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics / D. Krob, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, eds. — Berlin: Springer, 2000. — P. 613—622.