Существование решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^N$ без условий на бесконечности *

Г. И. ЛАПТЕВ
Московский государственный социальный университет
e-mail: glaptev@yandex.ru

УДК 513.8+517.9

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические уравнения, существование решений, неограниченная область.

Аннотация

Изучаются условия существования решений уравнений

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x, u, Du) + A_0(x, u) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

которые рассматриваются во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Функции $A_i(x, u, \xi)$ для $i = 1, \ldots, n$, $A_0(x, u)$ и $f(x)$ могут расти произвольно при $|x| \to \infty$. Эти функции удовлетворяют обобщённым условиям теории монотонных операторов по аргументам $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Доказывается теорема существования решения $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при условии, что $p > n$.

Abstract

G. I. Laptev, Existence of solutions of certain quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 4, pp. 133—147.

The paper deals with conditions for the existence of solutions of the equations

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x, u, Du) + A_0(x, u) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

considered in the whole space $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. The functions $A_i(x, u, \xi)$, $i = 1, \ldots, n$, $A_0(x, u)$, and $f(x)$ can arbitrarily grow as $|x| \to \infty$. These functions satisfy generalized conditions of the monotone operator theory in the arguments $u \in \mathbb{R}$ and $\xi \in \mathbb{R}^n$. We prove the existence theorem for a solution $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ under the condition $p > n$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00536) и программы Министерства образования Е02-1.0-144.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 4, с. 133—147.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Работа посвящена изучению условий разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Используются методы, развитые для монотонных операторов, а также метод компактных операторов. Теория монотонных операторов была создана в шестидесятые годы двадцатого столетия трудами многих математиков и дала возможность изучить широкие классы уравнений с частными производными высокого порядка эллиптического типа. Итоги метода подведены в монографиях [4, 6], а также в обзорной работе [2]. Подчеркнём, что указанные работы посвящены уравнениям, которые рассматриваются в ограниченной области. Если же область не является ограниченной, то предполагается, что решение принадлежит подходящему пространству Соболева $W^{m,p}(\Omega)$, что накладывает на решение определённые условия при $|x| \to \infty$. В последние годы отмечается значительный интерес к решениям, которые растут произвольно при $|x| \to \infty$. В особенной степени это замечание относится к антикоэрцитивным уравнениям, которым посвящена обширная литература, в частности [5].

Коэрцитивные уравнения в $\mathbb{R}^N$ без условий на бесконечности изучаются в относительно немногих работах. Тема берёт начало со статьи [7], в которой доказана разрешимость уравнений вида

$$-\Delta u + |u|^{q-1}u = f(x), \quad q > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

В [11] изучались в неограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ уравнения

$$\sum D_i(a_{ij}D_j u) - a(x)|u|^{p-1}u = f(x), \quad p > 1, \quad a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad a(x) \geqslant a_0 > 0.$$

Вариационный метод для уравнения

$$\Delta u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

был применен в [8]. В [1] рассматривалась задача Дирихле для уравнения

$$-\sum (|u_{x_i}|^{\alpha} u_{x_i})_{x_i} + c(x)u = f(x)$$

в неограниченной области Ω с компактной границей $\partial\Omega$. Здесь

$$\alpha > 0, \quad c(x) \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad c(x) \geqslant 0, \quad f(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Некоторые обобщения последнего уравнения были изучены в [9,10].

Данная работа посвящена разрешимости уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x, u, Du) + A_0(x, u) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \ \ (i = 1, \ldots, n), \quad Du = (D_1 u, \ldots, D_n u), \quad n \geqslant 2.$$

Никаких условий на поведение решений при $|x| \to \infty$ не накладывается.

Перечислим условия на функции, входящие в уравнение (1). Предполагается, что функции $A_i(x,u,\xi)$ для $i=1,\dots,n$ и $A_0(x,u)$ определены для $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям Каратеодори, т. е. они измеримы по x и непрерывны по u, ξ для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$. Кроме того, эти функции должны подчиняться следующим ограничениям.

1A. Условие монотонности в главной части. Для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ и всех $u\in\mathbb{R}$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n}[A_i(x,u,\xi)-A_i(x,u,\eta)](\xi_i-\eta_i)>0\quad(\xi\neq\eta),$$

где $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)$.

2A. Условие коэрцитивности. Для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ и всех $u\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(x,u,\xi)\xi_i+A_0(x,u)u\geqslant a(x)|\xi|^p+b(x)|u|^q+h(x),$$

где $n<p<q$ и функции $a(x)$, $b(x)$ положительны, причём $a(x),a^{-1}(x),b(x)$, $b^{-1}(x)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $h(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

3A. Условия роста. Для $i=1,\dots,n$ и $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$|A_i(x,u,\xi)|\leqslant a_1(x)|\xi|^{p-1}+b_1(x)|u|^{q/p'}+h_1(x),$$

где $p+p'=pp'$, $a_1(x),b_1(x)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $h_1(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$;

$$|A_0(x,u)|\leqslant a_0(|u|)h_0(x),$$

где функция $a_0(t)$ возрастает и непрерывна для $t\geqslant 0$, $h_0(x)\in L^{q'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

1f. $f(x)\in L^{q'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Здесь и далее используются традиционные обозначения пространств суммируемых функций. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Все измеримые функции $u(x)$, $x\in\Omega$, с конечной нормой

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\,dx,\quad 1\leqslant p<\infty,$$

образуют банахово пространство $L^p(\Omega)$. Все измеримые функции $u(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, с конечной нормой $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ для любой ограниченной области $\Omega\in\mathbb{R}^n$ образуют пространство $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, которое уже не является банаховым. Пространство Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ состоит из всех измеримых функций $u(x)$, $x\in\Omega$, которые имеют измеримые частные производные $Du(x)$, с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\|Du\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Будем говорить, что $u(x)\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, если функция $u(x)$ измерима на $\mathbb{R}^n$ и при этом $u(x)\in W^{1,p}(\Omega)$ для любой ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Если $p>1$, то двойственность между пространствами $L^p(\Omega)$ и $L^{p'}(\Omega)$ будем обозначать $(f,u)=\int\limits_{\Omega}f(x)u(x)\,dx$, $u\in L^p(\Omega)$, $f\in L^{p'}(\Omega)$. Через (f,u) обозначается также двойственность между пространствами $W^{1,p}(\Omega)$ и его сопряжённым $(W^{1,p}(\Omega))^*$. Множество непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций с компактным носителем обозначим $C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. Функция $u(x) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ называется решением уравнения (1), если для любой функции $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n A_i(x,u,Du) D_i\psi + A_0(x,u)\psi \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\psi\, dx.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1A—3A *и* 1f. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение в смысле определения* 1.

Замечание 1. Правую часть уравнения (1) можно брать в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^n D_i f_i(x) + f_0(x),$$

где $f_i \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $f_0 \in L^{q'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Такая форма функции $f(x)$ формально выглядит более общей, чем в условии 1f. В этом случае функции $D_i f_i(x)$ следует включить в слагаемые $D_i A_i(x,u,Du)$ уравнения (1). Условия 1A—3A позволяют это сделать.

2. Аппроксимация ограниченными областями

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделим ограниченную область Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, что обеспечивает возможность применения теорем вложения Соболева. Пусть фиксированы два числа $p, q \in (1,\infty)$. Основным для последующего будет пространство

$$X = \{u(x) \in L^q(\Omega),\ Du(x) \in L^p(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|u\|_X = \|Du\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Можно дать более ясную характеристику введённого пространства.

Лемма 1. *Если $q > p > n$, то $X = W^{1,p}(\Omega)$.*

Доказательство. В случае ограниченной области Ω для любого $q \geqslant 1$ верно неравенство

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant c_1 \|u\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Так как $p > n$, то пространство $W^{1,p}(\Omega)$ вложено непрерывно в $C(\overline{\Omega})$, т. е.

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Объединяя приведённые неравенства, получаем, что

$$\|u\|_X = \|Du\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (1+c)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Это значит, что $W^{1,p}(\Omega) \subset X$. Обратно, так как $q > p$, то

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{L^q(\Omega)},$$

откуда

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|Du\|_{L^p(\Omega)} + c\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant (1+c)\|u\|_X.$$

Следовательно, $X \subset W^{1,p}(\Omega)$, что завершает доказательство леммы. □

Перейдём к описанию операторов задачи. Наша цель — показать, что при условиях 1A—3A дифференциальное выражение

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x,u,Du) + A_0(x,u) \tag{2}$$

определяет ограниченный и непрерывный оператор из $W^{1,p}(\Omega)$ в сопряжённое пространство $(W^{1,p}(\Omega))^*$ для любой ограниченной области Ω. Спроектируем условия 1A—3A и 1f на ограниченную область Ω. Другими словами, введённые ранее функции $A_i(x,u,\xi)$ для $i = 1,\dots,n$ и $A_0(x,u)$, а также $f(x)$ считаем заданными только для $x \in \Omega$. Ограничения 1A—3A и 1f в рассматриваемом случае можно представить следующим образом.

$1\mathrm{A}_\Omega$. Для почти всех $x \in \Omega$ и всех $u \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} [A_i(x,u,\xi) - A_i(x,u,\eta)](\xi_i - \eta_i) > 0 \quad (\xi \neq \eta).$$

$2\mathrm{A}_\Omega$. Для почти всех $x \in \Omega$ и всех $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x,u,\xi)\xi_i + A_0(x,u)u \geqslant c_\Omega(|\xi|^p + |u|^q) + h(x),$$

где $n < p < q$, постоянная c_Ω больше 0 и $h(x) \in L^1(\Omega)$.

$3\mathrm{A}_\Omega$. Для почти всех $x \in \Omega$, всех $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и некоторых постоянных $C_{1\Omega}$, $C_{2\Omega}$

$$|A_i(x,u,\xi)| \leqslant C_{1\Omega}|\xi|^{p-1} + C_{2\Omega}|u|^{q/p'} + h_1(x), \quad i = 1,\dots,n;$$
$$|A_0(x,u)| \leqslant a_0(u)h_0(x), \quad a_0 \in C(\mathbb{R}), \quad h_0(x) \in L^{p'}(\Omega).$$

1f. $f(x) \in L^{q'}(\Omega)$.

Все выписанные условия являются следствием ограничений 1A—3A и 1f. Так, условие $1\mathrm{A}_\Omega$ очевидно. В условии $2\mathrm{A}_\Omega$ появилась постоянная $c_\Omega > 0$ как следствие условия $a^{-1}(x), b^{-1}(x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Постоянные $C_{1\Omega}$ и $C_{2\Omega}$ являются следствием локальной ограниченности функций $a_1(x)$ и $b_1(x)$ в условии 3A.

Для сравнения запишем условия из [3, п. 16.16 (3), с. 119] в рассматриваемом случае $p > n$:

$$\begin{gathered} |A_i(x,u,\xi)| \leqslant c_1(|u|)(g_1(x) + |\xi|^{p-1}), \quad g_1 \in L^{p'}(\Omega), \quad i = 1,\dots,n; \\ |A_0(x,u)| \leqslant c_0(|u|)g_0(x), \quad g_0 \in L^1(\Omega), \end{gathered} \tag{3}$$

где c_0, c_1 — неотрицательные непрерывные функции. При условиях (3) формальный дифференциальный оператор (2) задаёт ограниченный и непрерывный оператор A, определённый на пространстве $W^{1,p}(\Omega)$ и принимающий значения в сопряжённом пространстве $(W^{1,p}(\Omega))^*$ [3, теорема 16.14, с. 115]. Этот оператор определяется следующей формой:

$$(Au, v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x, u, Du) D_i v + A_0(x, u) v \right) dx, \quad u, v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4}$$

Очевидно, что из условий $3\mathrm{A}_\Omega$ следуют условия (3), и потому справедливо такое утверждение.

Лемма 2. *Формальный дифференциальный оператор* (2) *при условиях* $3\mathrm{A}_\Omega$ *задаёт ограниченный и непрерывный оператор* A*, определённый на пространстве* $W^{1,p}(\Omega)$ *и принимающий значения в сопряжённом пространстве* X^**. Этот оператор определяется формой* (4).

Обратимся к соответствующему дифференциальному уравнению

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x, u, Du) + A_0(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

которое рассматривается в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Согласно лемме 2 это уравнение можно представить в операторной форме $Au = f$, где оператор A определяется формой (4). Напомним, что указание формы задаёт некоторые граничные условия на $\partial\Omega$, которые сейчас не выписываются явно, так как в рассматриваемой ситуации не играют особой роли.

Условия $1\mathrm{A}_\Omega$, $2\mathrm{A}_\Omega$ также можно описать как свойства введённого выше оператора A. Именно, условие $1\mathrm{A}_\Omega$ определяет оператор, монотонный в главной части, а из условия $2\mathrm{A}_\Omega$ следует его коэрцитивность, что означает выполнение следующего соотношения при $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \infty$:

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = \|u\|^{-1}_{W^{1,p}(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x, u, Du) D_i u + A_0(x, u) u \right) dx \to \infty.$$

Итак, введённый в лемме 2 оператор $A\colon X \to X^*$ является ограниченным непрерывным коэрцитивным и монотонным в главной части. Уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in W^{1,p}(\Omega)$ для каждой функции $f \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ [3, теорема 29.11, с. 207]. По лемме 1 верно тождество $W^{1,p}(\Omega) = X$, а структура функции $f(x)$ из условия $1\mathfrak{f}$ показывает, что $f \in X^*$. Всё изложенное приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть в* $\mathbb{R}^n$ *выделена ограниченная область* Ω *с липшицевой границей* $\partial\Omega$*, и пусть выполнены условия* $1\mathrm{A}_\Omega$—$3\mathrm{A}_\Omega$ *и* $1\mathfrak{f}_\Omega$*. Тогда операторное* *уравнение $Au = f$, где оператор A определён в лемме 2, имеет решение $u \in X$, которое удовлетворяет следующему тождеству для любой функции $v \in X$:*

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n A_i(x,u,Du)D_i v + A_0(x,u)v\Big)dx = \int\limits_\Omega fv\,dx.$$

3. Оценки решений в расширяющихся областях

В качестве ограниченных областей Ω из предыдущего раздела выберем шары $B_N = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < N\}$ целого радиуса $N = 1, 2, 3, \ldots$. Теорему 2 можно тогда переформулировать следующим образом.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* 1A—3A *и* 1f. *Для каждого $N = 1, 2, 3, \ldots$ в шаре B_N существует решение $u_N \in X_N = W^{1,p}(B_N)$ задачи*

$$\int\limits_{B_N} \Big(\sum_{i=1}^n A_i(x,u_N,Du_N)D_i v + A_0(x,u_N)v\Big)dx = \int\limits_{B_N} fv\,dx, \quad v \in X_N. \tag{6}$$

Тем самым определена последовательность $\{u_N,\ N \in \mathbb{N}\}$ решений задач (6). Фиксируем целое $m \in \mathbb{N}$ и введём срезающую функцию $\varphi \in C_0^1(\overline{B_{m+2}})$ с условием $\varphi(x) > 0$ для $|x| < m+2$. В тождестве (6) полагаем $v = u_N\varphi$ для $N \geqslant m+2$ и результат предста́вим в виде

$$\int\limits_{B_N} \Big(\sum_{i=1}^n A_i(x,u_N,Du_N)(D_i u_N)\varphi + A_0(x,u_N)u_N\varphi\Big)dx = \\ = \int\limits_{B_N} fu_N\varphi\,dx - \int\limits_{B_N}\sum_{i=1}^n A_i(x,u_N,Du_N)u_N D_i\varphi\,dx. \tag{7}$$

Подчеркнём следующий важный факт. За счёт множителя $\varphi \in C_0^1(\overline{B_{m+2}})$ все интегралы в тождестве (7) вычисляются по фиксированному ограниченному множеству $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B_{m+2}}$. Левую часть тождества (7) оценим снизу, используя условие коэрцитивности $2\mathrm{A}_\Omega$ для $\Omega = B_{m+2}$:

$$\int\limits_{B_N} \Big(\sum_{i=1}^n A_i(x,u_N,Du_N)(D_i u_N)\varphi + A_0(x,u_N)u_N\varphi\Big)dx \geqslant \\ \geqslant c_m \int\limits_{B_{m+2}} (|Du_N|^p + |u_N|^q)\varphi(x)\,dx - C_{0m}. \tag{8}$$

Здесь $c_m = c_\Omega > 0$ для $\Omega = B_{m+2}$, $C_{0m} = \int\limits_{B_{m+2}} h(x)\varphi(x)\,dx$. Правую часть тождества (7) оценим сверху. Начнём с последнего интеграла, представив его в виде

$$\int\limits_{B_N} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_N, Du_N) u_N D_i\varphi\, dx =$$
$$= \int\limits_{B_{m+2}} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_N, Du_N) \varphi^{1/p'} u_N \varphi^{1/q} \varphi^{-(1/p'+1/q)} D_i\varphi\, dx.$$

К последнему интегралу применим неравенство Гёльдера для трёх множителей с показателями p', q, $s = \frac{qp}{q-p}$. Заметим, что необходимое условие
$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$$
выполнено, причём
$$\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right) s = s - 1,$$
и потому
$$\left|\int\limits_{B_N} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_N, Du_N) u_N D_i\varphi\, dx\right| \leqslant \left(\int\limits_{B_{m+2}} \sum_{i=1}^{n} |A_i(x, u_N, Du_N)|^{p'} \varphi\, dx\right)^{1/p'} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{B_{m+2}} |u_N|^q \varphi\, dx\right)^{1/q} \left(\int\limits_{B_{m+2}} \varphi^{-s+1} |D\varphi|^s dx\right)^{1/s} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{B_{m+2}} \sum_{i=1}^{n} |A_i(x, u_N, Du_N)|^{p'} \varphi\, dx + \varepsilon \int\limits_{B_{m+2}} |u_N|^q \varphi\, dx + C(\varepsilon) \int\limits_{B_{m+2}} \varphi^{-s+1} |D\varphi|^s\, dx. \tag{9}$$

Здесь использовано неравенство Юнга с произвольным параметром $\varepsilon > 0$. Согласно условиям роста $3\mathrm{A}_\Omega$ для $\Omega = B_{m+2}$ можем оценить для $i = 1, \ldots, n$ слагаемые
$$\int\limits_{B_{m+2}} |A_i(x, u_N, Du_N)|^{p'} \varphi\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{B_{m+2}} (C_{1m} |Du_N|^{p/p'} + C_{2m} |u_N|^{q/p'} + h_1(x))^{p'} \varphi\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C_{3m} \int\limits_{B_{m+2}} (|Du_N|^p + |u_N|^q) \varphi\, dx + C_{4m}, \tag{10}$$
где $C_{4m} = \int\limits_{B_{m+2}} |h_1(x)|^{p'} \varphi(x)\, dx$. Здесь и далее символом C с индексами обозначаются константы, не зависящие от номера $N \geqslant m + 2$, хотя возможно, что они зависят от заданного m. Подставляя оценку (10) в (9), получаем

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{B_{m+2}} \sum_{i=1}^{n} A_i(x,u_N,Du_N)u_N D_i\varphi\,dx\Big| \leqslant \\
&\quad\leqslant \varepsilon n C_{3m} \int\limits_{B_{m+2}} (|Du_N|^p + |u_N|^q)\varphi\,dx + \\
&\quad+ \varepsilon \int\limits_{B_{m+2}} |u_N|^q\varphi\,dx + \varepsilon n C_{4m} + C(\varepsilon)\int\limits_{B_{m+2}} |D\varphi|^s\varphi^{-s+1}\,dx.
\end{aligned}$$

Оставшееся слагаемое тождества (7) оценивается просто:

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{B_{m+2}} f u_N\varphi\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{B_{m+2}} |f|\varphi^{1/q'}|u_N|\varphi^{1/q}\,dx \leqslant \\
\leqslant \varepsilon \int\limits_{B_{m+2}} |u_N|^q\varphi\,dx + C(\varepsilon)\int\limits_{B_{m+2}} |f|^{q'}\varphi\,dx.
\end{aligned}$$

Подставляя все приведённые оценки в тождество (7), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
(c_m - \varepsilon n C_{3m}) \int\limits_{B_{m+2}} |Du_N|^p\varphi\,dx + (c_m - 2\varepsilon - \varepsilon n C_{3m}) \int\limits_{B_{m+2}} |u_N|^q\varphi\,dx \leqslant \\
\leqslant C_{5m} + C(\varepsilon)\int\limits_{B_{m+2}} \frac{|D\varphi|^s}{\varphi^{s-1}}\,dx.
\end{aligned}$$

Выбирая здесь $\varepsilon > 0$ достаточно малым, но фиксированным, получаем оценку

$$\int\limits_{B_{m+2}} (|Du_N|^p + |u_N|^q)\varphi\,dx \leqslant C_{6m}\bigg(1 + \int\limits_{B_{m+2}} \frac{|D\varphi|^s}{\varphi^{s-1}}\,dx\bigg). \tag{11}$$

Напомним, что функция $\varphi(x)$ предполагается финитной, и потому существование последнего интеграла в оценке (11) необходимо обосновать. Выберем функцию $\psi \in C_0^1(\overline{B_{m+2}})$ с условием $\psi(x) > 0$ для $x \in B_{m+2}$, такую что $\psi(x) = 0$ только на границе шара B_{m+2}. Убедимся, что достаточно считать $\varphi(x) = \psi^s(x)$. Действительно, на множестве $|x| < m+2$ получаем

$$\frac{|D\varphi|^s}{\varphi^{s-1}} = \frac{|s\psi^{s-1}D\psi|^s}{\psi^{s(s-1)}} = s^s|D\psi|^s, \quad \psi \in C_0^1(\overline{B}_{m+2}).$$

Требуемая дробь $|D\varphi|^s\varphi^{-s+1}$ становится непрерывной финитной функцией, и потому

$$\int\limits_{B_{m+2}} \frac{|D\varphi|^s}{\varphi^{s-1}}\,dx \leqslant s^s \int\limits_{B_{m+2}} |D\varphi|^s\,dx \equiv C_{7m}.$$

Окончательно из оценки (11) получаем, что

$$\int\limits_{B_{m+2}} (|Du_N|^p + |u_N|^q)\psi^s dx \leqslant C_m, \tag{12}$$

где постоянная C_m не зависит от номера $N \geqslant m+2$. Выберем функцию $\psi(x)$ так, чтобы $\psi(x) \equiv 1$ для $|x| \leqslant m+1$. Тогда из оценки (12) следует неравенство

$$\int\limits_{B_{m+1}} (|Du_N|^p + |u_N|^q)\,dx \leqslant C_m, \quad N \geqslant m+2. \tag{13}$$

Сформулируем полученный результат.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1A—3A *и* 1f. *Фиксируем натуральное число m. Тогда для построенной в лемме* 3 *последовательности решений u_N, $N = 1, 2, 3, \ldots$, справедлива оценка* (13), *в которой постоянная C_m может зависеть от m, но не зависит от $N \geqslant m+2$.*

Оценка (13) будет использована в нескольких вариантах. Так, непосредственно из неё следует, что $\|Du_N\|_{L^p(B_{m+1})} \leqslant C_m$ и $\|u_N\|_{L^q(B_{m+1})} \leqslant C_m$ для $N \geqslant m+2$. Отсюда вытекает, что для $N \geqslant m+2$

$$\|u_N\|_{X_{m+1}} = \|Du_N\|_{L^p(B_{m+1})} + \|u_N\|_{L^q(B_{m+1})} \leqslant C_m, \tag{14}$$

а из неравенства (10) следует оценка

$$\|A_i(x, u_N, Du_N)\|_{L^{p'}(B_{m+1})} \leqslant C_m. \tag{15}$$

Из (14) и рефлексивности пространства $X_{m+1} = W^{1,p}(B_{m+1})$ следует существование функции $u^{(m)} \in X_{m+1}$ и подпоследовательности целых чисел $K_m \subset \mathbb{N}$, таких что $u_k \to u^{(m)}$ слабо в X_{m+1} при $k \to \infty$, $k \in K_m$, и $Du_k \to Du^{(m)}$ слабо в $L^p(B_{m+1})$. Итак, при $k \to \infty$, $k \in K_m$,

$$u_k \rightharpoonup u^{(m)} \text{ в } X_{m+1}, \quad Du_k \rightharpoonup Du^{(m)} \text{ в } L^p(B_{m+1}). \tag{16}$$

Пространство $X_{m+1} = W^{1,p}(B_{m+1})$ компактно вложено в $L^p(B_{m+1})$, а также в $C(\overline{B_{m+1}})$, так как мы рассматриваем случай $p > n$. Поэтому можно считать, что справедливы сильные сходимости при $k \to \infty$, $k \in K_m$,

$$\|u_k - u^{(m)}\|_{L^p(B_{m+1})} \to 0, \quad \|u_k - u^{(m)}\|_{C(\overline{B_{m+1}})} \to 0. \tag{17}$$

Тем самым установлено следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* 1A—3A *и* 1f *и фиксировано натуральное число m. Тогда найдутся такие функция $u^{(m)} \in W^{1,p}(B_{m+1})$ и подпоследовательность $K_M \subset \mathbb{N}$, что выполнены соотношения* (16), (17).

4. Доказательство теоремы 1

Наша следующая задача — осуществить предельный переход в тождествах (6), которые используются только на множестве K_m, построенном в лемме 5. Эти тождества имеют вид

$$\int\limits_{B_k} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_k, Du_k) D_i v + A_0(x, u_k) v \right) dx = (f, v), \quad v \in X_k, \quad k \in K_m. \tag{18}$$

Фиксируем функцию $\varphi \in C_0^1(\overline{B_{m+1}})$ и в тождества (6) подставим произведение $v = (u_k - u^{(m)})\varphi$, что возможно, если функцию $\varphi(x)$ считать продолженной нулём вне шара B_{m+1}, так что $v \in X_k$ для всех $k \geqslant m+1$. Запишем подробно получающиеся в результате тождества, учитывая, что реально все интегралы вычисляются только по множеству B_{m+1} для индексов $k \in K_m$:

$$\int\limits_{B_{m+1}} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_k, Du_k)(D_i u_k - D_i u^{(m)})\varphi\, dx + \\ + \int\limits_{B_{m+1}} \sum_{i+1}^{n} A_i(x, u_k, Du_k)(u_k - u^{(m)})D\varphi\, dx + \\ + \int\limits_{B_{m+1}} A_0(x, u_k)(u_k - u^{(m)})\varphi\, dx = (f, (u_k - u^{(m)})\varphi). \tag{19}$$

Согласно построению подмножества $K_m \subset \mathbb{N}$ справедлива слабая сходимость $u_k \to u^{(m)}$ в $W^{1,p}(B_{m+1})$, следовательно, $(f, (u_k - u^{(m)})\varphi) \to 0$ при $k \to \infty$, $k \in K_m$.

Оценим другие слагаемые системы равенств (19), учитывая сильные сходимости (17):

$$\left| \int\limits_{B_{m+1}} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_k, Du_k)(u_k - u^{(m)})D\varphi\, dx \right| \leqslant \\ \leqslant \max_{|x| \leqslant m+1} |D\varphi| \sum_{i=1}^{n} \|A_i(x, u_k, Du_k)\|_{L^{p'}(B_{m+1})} \|u_k - u^{(m)}\|_{L^p(B_{m+1})} \leqslant \\ \leqslant C\|u_k - u^{(m)}\|_{L^p(B_{m+1})} \to 0 \quad (k \to \infty, \quad k \in K_m).$$

Здесь использована оценка (15) для $\|A_i\|_{L^{p'}(B_{m+1})}$. Далее, имеем

$$\left| \int\limits_{B_{m+1}} A_0(x, u_k)(u_k - u^{(m)})\varphi\, dx \right| \leqslant \\ \leqslant \max_{|x| \leqslant m+1} |\varphi(x)|\, \|u_k - u^{(m)}\|_{C(\overline{B_{m+1}})} \int\limits_{B_{m+1}} |A_0(x, u_k)|\, dx \leqslant \\ \leqslant C\|u_k - u^{(m)}\|_{C(\overline{B_{m+1}})} a_0(\|u_k\|_{C(\overline{B_{m+1}})}) \to 0 \quad (k \to \infty, \quad k \in K_m).$$

Здесь использована достаточно очевидная цепочка оценок на множестве B_{m+1}

$$a_0(|u_k|) \leqslant a_0(\max_{|x| \leqslant m+1} |u_k|) = a_0(\|u_k\|_{C(\overline{B_{m+1}})}) \leqslant C,$$

поскольку

$$\|u_k\|_{C(\overline{B_{m+1}})} \leqslant C\|u_k\|_{W^{1,p}(B_{m+1})}$$

в рассматриваемом случае $p > n$.

Приведённые выше сходимости используем в тождествах (19), в результате чего приходим к следующему соотношению при $k \to \infty$, $k \in K_m$:

$$\int\limits_{B_{m+1}} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, u_k, Du_k)(D_i u_k - D_i u^{(m)})\varphi\, dx \to 0.$$

Полученное соотношение представим в виде

$$\int\limits_{B_{m+1}} \sum_{i=1}^{n} (A_i(x, u_k, Du_k) - A_i(x, u_k, Du^{(m)})(D_i u_k - D_i u^{(m)})\varphi\, dx + \\ + \int\limits_{B_{m+1}} A_i(x, u_k, Du^{(m)})(D_i u_k - D_i u^{(m)})\varphi\, dx \to 0 \quad (k \to \infty, \quad k \in K_m). \tag{20}$$

Из условий роста $3\mathrm{A}_\Omega$ для $\Omega = B_{m+1}$ следует, что

$$|A_i(x, u_k, Du^{(m)})| \leqslant C_{1m}|Du^{(m)}|^{p-1} + C_{2m}|u_k|^{q/p'} + h_1(x), \quad x \in B_{m+1}.$$

Так как функция $u^{(m)}$ фиксирована, то последнее неравенство можно представить в виде

$$|A_i(x, u_k, Du^{(m)})| \leqslant h_2(x) + C|u_k|^{q/p'}, \quad x \in B_{m+1}, \quad h_2 \in L^{p'}(B_{m+1}).$$

Полученная оценка показывает, что оператор Немыцкого $A_i(x, u_k(x), Du^{(m)}(x))$ относительно аргумента $u_k(x)$ является ограниченным и непрерывным из пространства $L^q(B_{m+1})$ в $L^{p'}(B_{m+1})$.

Из (17) следует, что $u_k \to u^{(m)}$ в $C(\overline{B_{m+1}})$, а тогда и в $L^q(B_{m+1})$, и потому по свойствам оператора Немыцкого справедливы следующие сходимости для всех $i = 1, \ldots, n$ при $k \to \infty$, $k \in K_m$:

$$A_i(x, u_k, Du^{(m)}) \to A_i(x, u^{(m)}, Du^{(m)}) \ \text{ в } \ L^{p'}(B_{m+1}). \tag{21}$$

Напомним, что согласно построению $Du_k \to Du^{(m)}$ слабо в $L^p(B_{m+1})$. В соединении с сильной сходимостью (21) это значит, что при $k \to \infty$, $k \in K_m$, для $i = 1, \ldots, n$

$$\int\limits_{B_{m+1}} A_i(x, u_k, Du^{(m)})(D_i u_k - D_i u^{(m)})\varphi\, dx \to 0.$$

Из (20) тогда следует, что при $k \to \infty$, $k \in K_m$,

$$\int\limits_{B_{m+1}} \sum_{i=1}^{n} (A_i(x, u_k, Du_k) - A_i(x, u_k, Du^{(m)}))(D_i u_i - D_i u^{(m)})\varphi\, dx \to 0. \tag{22}$$

Мы выбирали функцию $\varphi(x)$ удовлетворяющей условию $\varphi(x) > 0$ для $x \in B_{m+1}$. Полагаем также, что $\varphi(x) \equiv 1$ для $|x| \leqslant m$. Согласно условию монотонности 1А функция под знаком интеграла в (22) неотрицательна, и потому справедливо следующее соотношение для $k \in K_m$:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int\limits_{B_m} \sum_{i=1}^{n} (A_i(x,u_k,Du_k) - A_i(x,u_k,Du^{(m)}))(D_iu_k - D_iu^{(m)})\,dx \leqslant 0. \qquad (23)$$

Из (23) следует, как показано в [4, гл. 2, § 2, лемма 2.2, с. 196], что $Du_k(x) \to Du^{(m)}(x)$ почти всюду в области B_m и что имеет место слабая сходимость $A_i(x,u_k,Du_k) \to A_i(x,u^{(m)},Du^{(m)})$ в пространстве $L^{p'}(B_m)$ при $k\to\infty$, $k\in K_m$, так что для каждой функции $v \in W^{1,p}(B_m)$ верно соотношение

$$\int\limits_{B_m} \sum_{i=1}^{n} A_i(x,u_k,Du_k)D_iv\,dx \to \int\limits_{B_m} \sum_{i=1}^{n} A_i(x,u^{(m)},Du^{(m)})D_iv\,dx. \qquad (24)$$

Из сходимости $u_k \to u^{(m)}$ в $C(\overline{B_{m+1}})$ вытекает, в частности, что для каждой функции $v \in W^{1,p}(B_m)$ при $k\to\infty$, $k \in K_m$, справедливо соотношение

$$\int\limits_{B_m} A_i(x,u_k)v\,dx \to \int\limits_{B_m} A_i(x,u^{(m)})v\,dx. \qquad (25)$$

Приведённые соотношения используем для предельного перехода в тождествах (18), для чего фиксируем натуральное $m \in \mathbb{N}$ и будем считать, что выбрана функция $v \in C_0^1(B_m)$, так что тождества (18) принимают для $k \in K_m$ вид

$$\int\limits_{B_m} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x,u_k,Du_k)D_iv + A_0(x,u_k)v \right) dx = \int\limits_{B_m} fv\,dx, \quad v \in C_0^1(B_m).$$

Устремляя в этих тождествах $k \in K_m$ к ∞ и применяя соотношения (24) и (25), получим в пределе следующее равенство для $v \in C_0^1(B_m)$:

$$\int\limits_{B_m} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x,u^{(m)},Du^{(m)})D_iv + A_0(x,u^{(m)})v \right) dx = \int\limits_{B_m} fv\,dx. \qquad (26)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1А—3А *и* 1f. *Если фиксировано натуральное число* $m \in \mathbb{N}$, *то функция* $u^{(m)} \in W^{1,p}(B_{m+1})$, *введённая в лемме* 5, *удовлетворяет тождеству* (26).

Построим теперь функцию $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, которая является решением исходного уравнения (1). Фиксируем натуральное число $m = 1$ и в соответствии с леммой 5 построим функцию $u^{(1)}(x) \in W^{1,p}(B_2)$ и бесконечное множество натуральных чисел $K_1 \subset \mathbb{N}$, такие что $u_k(x) \to u^{(1)}(x)$ слабо в пространстве X_2 при $k \to \infty$, $k \in K_1$. При этом согласно теореме 3 для предельной функции $u^{(1)}(x)$ выполняется тождество (26) с $m = 1$. Затем фиксируем число $m = 2$ и в соответствии с леммой 5 построим функцию $u^{(2)}(x) \in X_3$ и бесконечное множество натуральных чисел $K_2 \in \mathbb{N}$, которое подчиним дополнительному условию $K_2 \subset K_1$, таким образом, что $u_k(x) \to u^{(2)}(x)$ слабо в X_3 при $k \to \infty$, $k \in K_2$. Согласно теореме 3 предельная функция $u^{(2)}(x)$ удовлетворяет тождеству (26) с $m = 2$. За счёт условия $K_2 \subset K_1$ на множестве $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < 1\}$ обе предельные функции совпадают, т. е. $u^{(2)}(x) = u^{(1)}(x)$ для $|x| < 1$. А теперь из множества K_2 выделим бесконечное подмножество $K_3 \subset K_2$ таким образом, что согласно лемме 5 $u_k(x) \to u^{(3)}(x)$ слабо в X_4 при $k \to \infty$, $k \in K_3$, причём предельная функция $u^{(3)}(x)$ удовлетворяет тождеству (26) для $m = 3$. За счёт условия $K_3 \subset K_2$ на множестве B_2 справедливо равенство $u^{(3)}(x) = u^{(2)}(x)$, $|x| < 2$. Ясно, что описанную конструкцию можно осуществить для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$, в результате чего будет построена последовательность функций $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), u^{(3)}(x), \ldots$, причём каждая функция является продолжение предыдущей на более широкое множество, а именно $u^{(m+1)}(x) = u^{(m)}(x)$ для $|x| < m$. В результате при $m \to \infty$ будет определена единая функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, такая что

$$u(x) = u^{(m)}(x) \in X_{m+1}, \quad |x| < m. \tag{27}$$

Это значит, что $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, и в силу равенств (27) и тождеств (26) функция $u(x)$ удовлетворяет каждому из следующих соотношений для $m = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\int\limits_{B_m} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x, u, Du) D_i v + A_0(x, u) v \right) dx = \int\limits_{B_m} f v \, dx, \quad v \in C_0^1(B_m). \tag{28}$$

Фиксируем финитную функцию $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Её носитель содержится в некотором шаре $\overline{B}_m = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant m\}$, $m \in \mathbb{N}$, поэтому $\psi(x) \in C_0^1(B_m)$, т. е. эту функцию можно подставить в тождество (28) вместо функции $v(x)$, что приводит к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x, u, Du) D_i \psi + A_0(x, u) \psi \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \psi \, dx.$$

Такое тождество согласно определению 1 означает, что построенная функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, является решением исходного уравнения 1. Это завершает доказательство теоремы 1.

Приведём пример уравнения, для которого выполнены условия теоремы 1:

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i(a_i(x)|D_i u|^{p-2} D_i u + a_{n+1}(x)|u|^r u) + a_0(x)|u|^{q-2} u = f(x), \quad x \in R^n,$$

где функции $a_i(x)$ положительны и $a_i, a_i^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^n)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Мы предполагаем, что $n < p < q$ и $r + 1 \leqslant \frac{q}{p'}$.

Литература

[1] Гладков А. Л. Задача Дирихле для некоторых вырожденных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Дифференц. уравн. — 1993. — Т. 29. — С. 267—273.

[2] Дубинский Ю. А. Нелинейные параболические уравнения высокого порядка // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 37. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 89—166.

[3] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988.

[4] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.

[5] Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. — М.: Наука, 2001. — (Труды МИАН; Т. 234).

[6] Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.

[7] Brezis H. Semilinear equation in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. Optim. — 1984. — Vol. 12. — P. 271—282.

[8] Kuzin I., Pohozaev S. Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations. — Birkhäuser, 1997.

[9] Laptev G. I. Solvability of quasilinear elliptic second order differential equations in $\mathbb{R}^n$ without condition at infinity // Adv. Math. Research. — 2003. — Vol. 4. — P. 1—18.

[10] Leoni F. Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ with “absorbing” zero order terms // Adv. Differential Equations. — 2000. — Vol. 5, no. 4—5. — P. 681—722.

[11] Oleinik O. Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations. — Cambridge Univ. Press, 1996.