

О системах двух сингулярно возмущённых квазилинейных уравнений второго порядка*

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: bukzhalev@mail.ru

УДК 517.958

Ключевые слова: сингулярное возмущение, метод пограничных функций, контрастная структура.

Аннотация

Изучается система двух квазилинейных уравнений второго порядка с малым параметром при вторых производных. Рассматриваются случаи, когда матрица коэффициентов при первых производных имеет следующие собственные значения: а) оба с отрицательными действительными частями, б) противоположные по знаку, в) одно из них равно нулю. Для определения решения и его асимптотики в зависимости от вида этих собственных значений ставятся начальные или краевые задачи.

Abstract

A. B. Vasil'eva, On systems of two singularly perturbed quasilinear second-order equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 5, pp. 21–28.

A system of two quasilinear second-order equations with a small parameter standing by the second derivatives is studied. The cases where the matrix of coefficients of the first derivatives has the following eigenvalues are considered: (a) both of them have negative real parts; (b) they are of opposite sign; (c) one of them is equal to zero. To find a solution and its asymptotics, the initial-value or boundary-value problems are posed depending on the form of these eigenvalues.

1.

Предыдущие результаты ($n = 1$) относятся к одному уравнению второго порядка

$$\varepsilon y'' = A(y, x)y' + B(y, x) \quad (1.1)$$

или к системе уравнений вида

$$\varepsilon z' = A(y, x)z + B(y, x), \quad y' = z. \quad (1.2)$$

Были рассмотрены следующие случаи.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-00487).

а) Начальные условия заданы в виде $y(0, \varepsilon) = y^0$, $z(0, \varepsilon) = z_{-1}^0/\varepsilon$. При $A < 0$ имеет место решение с пограничным слоем слева и асимптотикой

$$\begin{aligned} y &= \bar{y}_0 + \varepsilon \bar{y}_1 + \dots + \Pi_0 y + \varepsilon \Pi_1 y + \dots, \\ z &= \bar{z}_0 + \varepsilon \bar{z}_1 + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \Pi_{-1} z + \Pi_1 y + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения для определения главных членов асимптотики имеют вид

$$0 = A(\bar{y}_0, x) \bar{z}_0 + B(\bar{y}_0, x), \quad \bar{y}_0' = \bar{z}_0, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Pi_{-1} z &= A(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0) \Pi_{-1} z, \quad \frac{d}{d\tau} \Pi_0 y = \Pi_{-1} z, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}, \\ \Pi_{-1} z(0) &= z_{-1}^0, \quad \Pi_0 y(0) = y_0 - \bar{y}_0(0) \quad \Pi_0 y(\infty) = 0, \quad \Pi_{-1} y(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.5) получим

$$\frac{d\Pi_{-1} z}{d\Pi_0 y} = A(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0), \quad \Pi_{-1} z = \int_{y^0 - \bar{y}_0(0)}^{\Pi_0 y} A(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0) d\Pi_0 y + z_{-1}^0, \quad (1.6)$$

$$\Pi_{-1} z = \int_{y_0}^{\bar{y}_0} A(\tilde{y}, 0) d\tilde{y}, \quad \tilde{y} = \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \quad (1.7)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \int_{y_0}^{\tilde{y}} A(y, 0) dy + z_{-1}^0, \quad \tilde{y}(\infty) = \bar{y}_0(0). \quad (1.8)$$

Уравнение для определения $\bar{y}_0(0)$ имеет вид

$$\int_{y_0}^{\bar{y}_0(0)} A(y, 0) dy + z_{-1}^0 = 0. \quad (1.9)$$

Найдя $\bar{y}_0(0)$, из (1.4), (1.5) можно определить главные члены асимптотики (1.3).

б) Начальные условия заданы в виде $y(1, \varepsilon) = y^0$, $z(1, \varepsilon) = z_{-1}^1$. При $A > 0$ имеет место решение с пограничным слоем справа, которое строится аналогично случаю а), но теперь нужно определить не $\bar{y}_0(0)$, а $\bar{y}_0(1)$:

$$\int_{y_0}^{\bar{y}_0(1)} A(y, 0) dy + z_{-1}^1 = 0. \quad (1.10)$$

в) Дополнительные условия имеют вид $y'(0, \varepsilon) = y^0$, $y(1, \varepsilon) = y^1$ (краевая задача). Пусть $A < 0$. Тогда пограничный слой имеет место слева и $y_0(1) = y^1$. Из (1.4) определяется $\bar{y}_0(0)$, а тогда из (1.9) находится z_{-1}^1 .

г) При краевых условиях в) может быть решение типа ступеньки (контрастная структура) со скачком в заранее не известной точке x_0 .

Рассматриваются два решения, в которые точка x_0 и точка y^* , где $A(y^*, x_0) = 0$, входят как параметры. Решение $y^{(-)}$ определено на $[0, x_0]$ и имеет правый погранслой в точке x_0 . На этом решении $A > 0$. Решение $y^{(+)}$ определено на $[x_0, 1]$ и имеет левый погранслой в точке x_0 . На этом решении $A < 0$. Формулы (1.9) и (1.10) дают

$$\int_{y_0}^{y_0^{(-)}(x_0)} A(y, x_0) dy + z_{-1}^0 = 0, \quad \int_{y_1}^{\bar{y}_0^{(+)}(x_0)} A(y, x_0) dy + z_{-1}^1 = 0,$$

$$y^0 = y^1 = y^*, \quad z_{-1}^0 = z_{-1}^1,$$

откуда для определения x_0 получим уравнение

$$\int_{y_0^{(-)}(x_0)}^{y_0^{(+)}(x_0)} A(y, x_0) dy = 0. \quad (1.11)$$

Описанные в разделе 1 результаты и их доказательства можно найти в [1, 3].

2.

При $n = 2$ имеем систему уравнений

$$\varepsilon \frac{dz_i}{dx} = \sum_{k=1}^2 A_{ik}(y_1, y_2, x) z_k + B_i(y_1, y_2, x), \quad \frac{dy_i}{dx} = z_i. \quad (2.1)$$

Здесь A_{ik} — элементы матрицы A , имеющей два собственных значения λ_1 и λ_2 . Наличие двух собственных значений приводит к более разнообразным ситуациям.

Рассмотрены следующие случаи.

а) Начальные условия заданы в виде $y_i(0, \varepsilon) = y_i^0$, $z_i(0, \varepsilon) = z_{i,-1}^0/\varepsilon$ ($i = 1, 2$). Имеет место решение с пограничным слоем слева. Требование $A < 0$ заменяется требованием $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Асимптотика по-прежнему имеет вид (1.3), но y и z теперь двумерные векторы. Вместо (1.4) и (1.5) уравнения для определения главных членов асимптотики имеют вид

$$0 = \sum_{k=1}^2 A_{ik}(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x) \bar{z}_{k,0} + B_i(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x), \quad \bar{y}'_{i,0} = \bar{z}_{i,0}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \Pi_{-1} z_i &= \sum_{k=1}^2 A_{ik}(\bar{y}_{1,0} + \Pi_0 y_1, \bar{y}_{2,0} + \Pi_0 y_2, 0) \Pi_{-1} z_k, \\
\frac{d}{d\tau} \Pi_0 y_i &= \Pi_{-1} z_i, \\
\bar{y}_{i,0}(0) + \Pi_0 y_i(0) &= y_i^0, \quad \Pi_{-1} z_i(0) = z_{i,-1}^0(0), \\
\Pi_0 y_i(\infty) &= \Pi_{-1} z_i(\infty) = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнение (1.5) сразу интегрировалось. Теперь же приходится накладывать дополнительное требование, а именно что выражение

$$\sum_{k=1}^2 A_{ik}(y_1, y_2, 0) dy_k \tag{2.4}$$

является дифференциалом некоторой функции $M_i(y_1, y_2, 0)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_i &= \frac{d}{d\tau} \tilde{y}_i = M_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) - M_i(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0), 0), \\
\tilde{y}_i &= \bar{y}_{i,0}(0) + \Pi_0 y_i, \\
z_{i,-1}^0 &= M_i(y_1^0, y_2^0, 0) - M_i(\bar{y}_1(0), \bar{y}_2(0), 0).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Последнее из этих уравнений определяет начальные условия $\bar{y}_{i,0}(0)$ для системы (2.2), и можно построить главные члены асимптотики.

б) Начальные условия заданы в виде $y_i(1, \varepsilon) = y_i^1$, $z(1, \varepsilon) = z_{i,-1}^1/\varepsilon$, $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$. Имеет место решение с пограничным слоем справа.

в) Краевые условия имеют вид $y_i(0, \varepsilon) = y_i^0$, $y(1, \varepsilon) = y_{i,-1}^1/\varepsilon$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Тогда $y_{i,0}(1) = y_i^1$, посредством y_i^1 определяется $\bar{y}_{i,0}(0)$, а тогда из (2.5) находится $z_{i,-1}^0$.

г) Контрастная структура типа ступеньки не возникает, поскольку вместо (1.11) имеем два уравнения

$$M_i(y_{i,0}^{(-)}(x_0), y_{i,0}^{(-)}(x_0), x_0) = M_i(y_{i,0}^{(+)}(x_0), y_{i,0}^{(+)}(x_0), x_0)$$

для определения одного x_0 .

3.

Рассмотрим случай, не реализующийся при $n = 1$, а именно случай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Поставим краевые условия $y_i(0, \varepsilon) = y_i^0$, $y_i(1, \varepsilon) = y_i^1$. Решение имеет пограничный слой как при $x = 0$, так и при $x = 1$.

Рассматривая погранслой, в окрестности $x = 0$ имеем

$$\tilde{z}_i = \frac{d}{d\tau} \tilde{y}_i = M_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) - M_i(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0), 0) = M_i - \bar{M}_i. \tag{3.1}$$

Точка покоя $(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0))$ — седло, а точка (y_1^0, y_2^0) должна находиться на сепаратрисе этого седла, входящей в него при $\tau_0 = x/\varepsilon \rightarrow \infty$.

Сепаратрису можно найти из уравнения (3.1), которое приводит к соотношению

$$(M_i - \bar{M}_i) d\tilde{y}_1 - (M_i - \bar{M}_i) d\tilde{y}_2 = d\Phi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0).$$

Интегрируя, получаем

$$\Phi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0) = \Phi(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0), 0).$$

Требование нахождения величин (y_1^0, y_2^0) на сепаратрисе, идущей в седло при $\tau_0 \rightarrow \infty$, даёт соотношение

$$\Phi^{(+)}(y_1^0, y_2^0, 0) = \Phi^{(+)}(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0), 0).$$

Аналогичное рассмотрение погранслоя в окрестности $x = 1$ приводит к соотношению

$$\Phi^{(-)}(y_1^1, y_2^1, 1) = \Phi^{(-)}(\bar{y}_{1,0}(1), \bar{y}_{2,0}(1), 1).$$

Индексами $(+)$ и $(-)$ помечен левый и правый погранслои.

Таким образом определяется связь $\bar{y}_{1,0}(0)$ с $\bar{y}_{2,0}(0)$ и $\bar{y}_{1,0}(1)$ с $\bar{y}_{2,0}(1)$. После этого можно решить уравнение (2.2).

Отметим, что рассматриваемая задача может иметь контрастную структуру типа ступеньки. Точка x_0 определяется из уравнения

$$\Phi(\bar{y}_{1,0}^{(-)}(x_0), \bar{y}_{2,0}^{(-)}(x_0), x_0) = \Phi(\bar{y}_{1,0}^{(+)}(x_0), \bar{y}_{2,0}^{(+)}(x_0), x_0).$$

Индексы $(+)$ и $(-)$ при Φ здесь не нужны, поскольку речь идёт об одной сепаратрисе, идущей из седла $(\bar{y}_{1,0}^{(-)}(x_0), \bar{y}_{2,0}^{(-)}(x_0))$ в седло $(\bar{y}_{1,0}^{(+)}(x_0), \bar{y}_{2,0}^{(+)}(x_0))$, когда $\tau = (x - x_0)/\varepsilon$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Описанные в разделах 2, 3 результаты можно найти в [2].

4.

Рассмотрим ещё один случай, который не возникает при $n = 1$, а именно $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Это так называемый критический случай, являющийся обобщением представленного в [4]. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \varepsilon y_1'' &= a(y_1, y_2, x)y_1' + b(y_1, y_2, x)y_2' + \varepsilon f_1(y_1, y_2, x), \\ \varepsilon y_2'' &= -a(y_1, y_2, x)y_1' - b(y_1, y_2, x)y_2' + \varepsilon f_2(y_1, y_2, x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

с начальными условиями $y_i(0, \varepsilon) = y_i^0$, $z(0, \varepsilon) = z_{i,-1}^0/\varepsilon$. Здесь $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a - b < 0$. Асимптотика строится по типу (1.3).

Для регулярных членов порядков 0 и 1 имеем

$$\begin{aligned} 0 &= a(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{1,0}' + b(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{2,0}', \\ 0 &= -a(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{1,0}' - b(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{2,0}', \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{1,0}'' &= a(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{1,1}' + b(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{2,1}' + \\
&\quad + (a_1 y_{1,1} + a_2 y_{2,1})\bar{y}_{1,0}' + (b_1 y_{1,1} + b_2 y_{2,1})\bar{y}_{2,0}' + f_1(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x), \\
\bar{y}_{2,0}'' &= -(a(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{1,1}' + b(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x)\bar{y}_{2,1}' + \\
&\quad + (a_1 y_{1,1} + a_2 y_{2,1})\bar{y}_{1,0}' + (b_1 y_{1,1} + b_2 y_{2,1})\bar{y}_{2,0}') + f_2(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Чтобы получить уравнение для $\bar{y}_{i,0}$, продифференцируем систему уравнений (4.2):

$$\begin{aligned}
0 &= a\bar{y}_{1,0}'' + b\bar{y}_{2,0}'' + (a_1\bar{y}_{1,0}' + a_2\bar{y}_{2,0}' + a_3)\bar{y}_{1,0}' + (b_1\bar{y}_{1,0}' + b_2\bar{y}_{2,0}' + b_3)\bar{y}_{2,0}', \\
0 &= -(a\bar{y}_{1,0}'' + b\bar{y}_{2,0}'' + (a_1\bar{y}_{1,0}' + a_2\bar{y}_{2,0}' + a_3)\bar{y}_{1,0}' + (b_1\bar{y}_{1,0}' + b_2\bar{y}_{2,0}' + b_3)\bar{y}_{2,0}').
\end{aligned} \tag{4.4}$$

В уравнениях (4.2)–(4.4) величины a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 означают частные производные первого порядка от a и b по аргументам y_1, y_2, x в соответствующих точках.

Из (4.4) получаем

$$a\bar{y}_{1,0}'' + b\bar{y}_{2,0}'' = g(\bar{y}_{1,0}', \bar{y}_{2,0}', \bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x), \tag{4.5}$$

где g — известная функция.

Сложив уравнения (4.3), получим

$$\bar{y}_{1,0}'' + \bar{y}_{2,0}'' = f(\bar{y}_{1,0}, \bar{y}_{2,0}, x) \quad (f = f_1 + f_2). \tag{4.6}$$

Уравнениями (4.5), (4.6) определяется система двух уравнений второго порядка $y_{i,0}'' = G_i(y_{1,0}', y_{2,0}', y_{1,0}, y_{2,0}, x)$, где G_i — известные функции. Для определения $y_{i,0}$ требуется четыре дополнительных условия.

Выпишем уравнения главных пограничных членов:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\Pi_{-1}z_1 &= a(y_{1,0}(0) + \Pi_0 y_1, y_{2,0}(0) + \Pi_0 y_2, 0)\Pi_{-1}z_1 + \\
&\quad + b(y_{1,0}(0) + \Pi_0 y_1, y_{2,0}(0) + \Pi_0 y_2, 0)\Pi_{-1}z_2, \\
\frac{d}{d\tau}\Pi_{-1}z_2 &= -\frac{d}{d\tau}\Pi_{-1}z_1, \quad \frac{d}{d\tau}\Pi_0 y_i = \Pi_{-1}z_i, \\
\Pi_{-1}z_i(0) &= z_{i,-1}^0, \quad \Pi_0 y_i(0) = y_i^0 - \bar{y}_{i,0}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z_1 &= F(\Pi_0 z_1, \Pi_0 z_2, \Pi_1 y_1, \Pi_1 y_2, \tau), \\
\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z_2 &= -\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z_1, \quad \frac{d}{d\tau}\Pi_1 y_i = \Pi_0 z_i, \\
\Pi_0 z_i(0) &= -z_{i,0}(0), \quad \Pi_1 y_i(0) = -y_{i,1}(0)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(подробнее F не расписывается).

Складывая (4.7) и интегрируя, получим

$$\Pi_{-1}z_1 + \Pi_{-1}z_2 = 0, \quad \Pi_0 y_1 + \Pi_0 y_2 = 0.$$

Отсюда имеем

$$z_{1,-1}^0 + z_{2,-1}^0 = 0, \tag{4.9}$$

что означает, что величину $z_{i,-1}$ нельзя задавать произвольно. Если $z_{1,-1} = z_{-1}^0$, то $z_{2,-1} = -z_{-1}^0$,

$$y_1^0 - \bar{y}_{1,0}(0) + y_2^0 - \bar{y}_{2,0} = 0. \quad (4.10)$$

Из (4.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Pi_0 z_1 + \frac{d}{d\tau} \Pi_0 z_2 &= 0, \quad \Pi_0 z_1(\tau) + \Pi_0 z_2(\tau) = 0, \\ \Pi_0 z_1(0) + \Pi_0 z_2(0) &= -\bar{z}_{1,0}(0) - \bar{z}_{2,0}(0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{y}'_{1,0}(0) + \bar{y}'_{2,0}(0) = 0. \quad (4.11)$$

С другой стороны, из (4.2) имеем

$$a(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0), 0) \bar{y}'_{1,0}(0) + b(\bar{y}_{1,0}(0), \bar{y}_{2,0}(0), 0) \bar{y}'_{2,0}(0) = 0. \quad (4.12)$$

Отсюда и из (4.11), учитывая, что $a - b \neq 0$, получим

$$\bar{y}'_{1,0}(0) = \bar{y}'_{2,0}(0) = 0. \quad (4.13)$$

Осталось получить ещё одно соотношение для $\bar{y}_{i,0}(0)$. Из формулы (4.7) имеем

$$\Pi_{-1} z_2 = -\Pi_{-1} z_1, \quad \Pi_0 y_2 = -\Pi_0 y_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Pi_{-1} z_1 &= (a(\bar{y}_{1,0}(0) + \Pi_0 y_1, \bar{y}_{2,0} - \Pi_0 y_1, 0) - \\ &\quad - b(\bar{y}_{1,0}(0) + \Pi_0 y_1, \bar{y}_{2,0} - \Pi_0 y_1, 0)) \Pi_{-1} z_1, \\ \frac{d}{d\tau} \Pi_0 y_1 &= \Pi_{-1} z_1. \end{aligned}$$

С учётом (4.9) и (4.10) отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_{-1} z_1 &= z_{-1}^0 + \int_{y_1^0 - \bar{y}_{1,0}(0)}^{\Pi_0 y_1} (a - b) d\Pi_0 y_1 = \\ &= z_{-1}^0 + \int_{y_1^0 - \bar{y}_{1,0}(0)}^{\Pi_0 y_1} \lambda(\bar{y}_{1,0}(0) + \xi, y_1^0 + y_2^0 - (\bar{y}_{1,0}(0) + \xi), 0) d\xi, \end{aligned} \quad (4.14)$$

а тогда

$$z_{-1}^0 + \int_{y_1^0}^{\bar{y}_{1,0}(0)} \lambda(\eta, y_1^0 + y_2^0 - \eta, 0) d\eta = 0. \quad (4.15)$$

Пользуясь (4.15), находим $\bar{y}_{1,0}(0)$, а следовательно, и $\bar{y}_{2,0}(x)$.

Переписав (4.14) в виде

$$\frac{d}{d\tau} \Pi_0 y_1 = z_{-1}^0 + \int_{y_1^0 - \bar{y}_{1,0}}^{\Pi_0 y_1} \lambda d\xi,$$

найдем $\Pi_0 y_1$, а следовательно, $\Pi_0 y_2$ и $\Pi_{-1} z_i$.

Построение можно продолжить и определить следующие члены асимптотики.

Замечания.

1. Можно поставить краевую задачу $y_i(0, \varepsilon) = y_i^0$, $y_i(1, \varepsilon) = y_i^1$, но для этого неизвестные значения $z_i(0, \varepsilon)$ надо искать в виде ряда

$$\varepsilon^{-1} z_{i,-1} + z_{i,0} + \varepsilon z_{i,1} + \dots$$

2. Оценка остаточного члена асимптотики производится стандартным образом путём сведения к интегральному уравнению. Метод дифференциальных неравенств для $n = 2$ не применялся.

Литература

- [1] Васильева А. Б. Контрастные структуры типа ступеньки в сингулярно возмущённых дифференциальных уравнениях второго порядка, линейного относительно производных // ЖВМ и МФ. — 1995. — Т. 35, № 4. — С. 520—531.
- [2] Васильева А. Б. О системе двух сингулярно возмущённых квазилинейных уравнений второго порядка // ЖВМ и МФ. — 2004. — Т. 44, № 4. — С. 677—689.
- [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. — М.: Наука, 1973.
- [4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.