Функциональные интегралы, соответствующие решению задачи Коши—Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия*

Я. А. БУТКО
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: yanabutko@yandex.ru

УДК 517.987.4

Ключевые слова: функциональные интегралы, эволюционные уравнения, уравнение теплопроводности, мера Винера, римановы многообразия.

Аннотация

Решение задачи Коши—Дирихле представлено в виде предела последовательности интегралов по конечным декартовым степеням рассматриваемой области многообразия. Показано, что эти пределы совпадают с интегралами по поверхностным мерам гауссовского типа на множестве траекторий в многообразии. При этом подынтегральные выражения представляют собой комбинацию элементарных функций от коэффициентов уравнения и геометрических характеристик многообразия. Также решение краевой задачи Коши—Дирихле в данной области многообразия представлено как предел решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на всём многообразии при неограниченном возрастании абсолютной величины потенциала вне области. В доказательстве используются некоторые асимптотические оценки гауссовских интегралов по римановым многообразиям и теорема Чернова.

Abstract

Ya. A. Butko, Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy–Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 3—15.

A solution of the Cauchy–Dirichlet problem is represented as the limit of a sequence of integrals over finite Cartesian powers of the domain of a manifold considered. It is shown that these limits coincide with the integrals with respect to surface measures of the Gauss type on the set of trajectories in the manifold. Moreover, each of the integrands is a combination of elementary functions of the coefficients of the equation considered and geometric characteristics of the manifold. Also, a solution of the Cauchy–Dirichlet problem in the domain of the manifold is represented as the limit of a solution of the Cauchy problem for the heat equation on the whole manifold under infinite growth of the absolute value of the potential outside the domain. The proof uses some asymptotic estimates for Gaussian integrals over Riemannian manifolds and the Chernoff theorem.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00761-а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 3—15.

1. Введение

Решение задачи Коши—Дирихле представлено в виде предела последовательности интегралов по конечным декартовым степеням рассматриваемой области многообразия. Показано, что эти пределы совпадают с интегралами по поверхностным мерам гауссовского типа на множестве траекторий в многообразии. При этом подынтегральные выражения представляют собой комбинацию элементарных функций от коэффициентов уравнения и геометрических характеристик многообразия.

Также решение краевой задачи Коши—Дирихле в данной области многообразия представлено как предел решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на всём многообразии при неограниченном возрастании абсолютной величины потенциала вне области.

В доказательстве используются некоторые асимптотические оценки гауссовских интегралов по римановым многообразиям [13] и теорема Чернова [8, 9].

В данной статье приводятся в сокращённой версии результаты работы [7] с исправлением некоторых имеющихся там опечаток. Затем эти результаты используются для получения представления решения задачи Коши—Дирихле в области многообразия в виде предела решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на всём многообразии при неограниченном возрастании абсолютной величины потенциала вне области.

2. Предварительные сведения

Пусть X — банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ — пространство всех непрерывных линейных операторов в X, наделённое сильной операторной топологией. Обозначим область определения линейного оператора A в X через $D(A)$.

Определение 1. (Сильная) производная функции $F\colon [0,\varepsilon) \to \mathcal{L}(X)$, $\varepsilon > 0$, в нуле — это линейное отображение $F'(0)\colon D\big(F'(0)\big) \to X$, определяемое равенством $F'(0)g = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}(F(t)g - F(0)g)$, где $D\big(F'(0)\big)$ — векторное пространство всех $g \in X$, для которых существует предыдущий предел.

Теорема 1 (теорема Чернова). *Пусть X — банахово пространство, $F\colon [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ — сильно непрерывное отображение, $F(0) = I$ — тождественный оператор, $\|F(t)\| \leqslant e^{at}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, и пусть D — векторное подпространство в $D\big(F'(0)\big)$, сужение на которое оператора $F'(0)$ обладает замыканием C. Если C является генератором сильно непрерывной полугруппы e^{tC}, то для каждого $T > 0$ последовательность $F(t/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$ сходится к e^{tC} в сильной операторной топологии равномерно относительно $t \in [0, T]$.*

Введём понятие эквивалентности по Чернову семейств операторов $F(t)$ и e^{tC} (см. [14]): однопараметрическое семейство операторов $F(t)$ и полугруппа e^{tC} называются *эквивалентными по Чернову*, если $\|F(t)g - e^{tC}g\| = o(t)$, $t \to 0$, для любой $g \in D_1 \subset D(C)$, где D_1 — существенная область определения оператора C.

Пусть K — компактное риманово многообразие размерности m. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через K^n декартово произведение n экземпляров многообразия K, т. е. $K^n = K \times K \times \ldots \times K$.

При $t \geqslant 0$ рассмотрим разбиение временно́го интервала

$$\Pi = \{t_j \colon 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}.$$

Положим, что диаметр разбиения $|\Pi| = \max\limits_j |t_j - t_{j-1}|$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Обозначим через ρ риманову метрику на K, через vol_K — борелевскую меру на K, порождаемую римановым объёмом. Положим

$$p(t,x,z) = \frac{1}{(2\pi t)^{m/2}} e^{-\frac{\rho^2(x,z)}{2t}}, \quad t > 0, \quad x, z \in K.$$

Пусть

$$c^{\Pi}(t,n,x) = \\ = \int\limits_{K^n} p(t_1,x,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)\ldots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\,\mathrm{vol}_K(dx_1)\ldots\mathrm{vol}_K(dx_n).$$

Обозначим множество функций из $[0,t]$ в K, имеющих разрывы только первого рода, через $\mathcal{B}([0,t],K)$.

Определение 2. Пусть $t > 0$, $x \in K$, $f \colon \mathcal{B}([0,t],K) \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция. Интегралом от функции f по вероятностной мере $S_K^{x,I}$ (внутренней поверхностной мере Смолянова, см. [1,11]) называется предел

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \big(c^{\Pi}(t,n,x)\big)^{-1} \int\limits_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1,\ldots,x_n) \times \\ \times p(t_1,x,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)\ldots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\,\mathrm{vol}_K(dx_1)\ldots\mathrm{vol}_K(dx_n),$$

где $f_{\Pi}^x(x_1,\ldots,x_n) = f\big(\varphi_{\Pi}^x(x_1,\ldots,x_n)(t)\big)$, а $\varphi_{\Pi}^x(x_1,\ldots,x_n)(t)$ — такое отображение множества K^n в $\mathcal{B}([0,t],K)$, что $\varphi_{\Pi}^x(x_1,\ldots,x_n)(t_0) = x$, $\varphi_{\Pi}^x(x_1,\ldots,x_n)(s) = x_j$ при $s \in (t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\ldots,n$.

Как было показано в [2—4,13—15], мера $S_K^{x,I}$ эквивалентна мере Винера W_K^x, порождённой броуновским движением в многообразии, и соответствующая плотность Радона—Никодима имеет вид

$$\frac{dW_K^x}{dS_K^{x,I}}(\xi) = \frac{\exp\Big\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Big\}}{\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} \exp\Big\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Big\} S_K^{x,I}(d\xi)},$$

где $\mathrm{scal}(x) \equiv \mathrm{tr}\,\mathrm{Ricci}(x)$ — скалярная кривизна многообразия K в точке $x \in K$.

3. Постановка задачи

Пусть K — компактное риманово многообразие размерности m. Пусть G — область многообразия K с гладкой границей ∂G. Рассмотрим краевую задачу Коши—Дирихле в этой области для уравнения теплопроводности с непрерывным ограниченным потенциалом $V\colon G \to \mathbb{R}$, $\sup\limits_{x\in G}|V(x)| = v < +\infty$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \left(-\dfrac{1}{2}\Delta_K f\right)(t,x) + V(x)f(t,x) & \forall t \geqslant 0\ \forall x \in G,\\ f(0,x) = f_0(x) & \forall x \in G,\\ f(t,x) = 0 & \forall t \geqslant 0\ \forall x \in \partial G. \end{cases} \tag{I}$$

Здесь $\Delta_K = -\operatorname{tr}\nabla^2$ — оператор Лапласа—Бельтрами на многообразии K. Пусть $\mathbf{C}_0(\bar G)$ — банахово пространство функций, непрерывных на G и равных нулю на ∂G, наделённое нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in G}|f(x)|$. Мы предполагаем, что $f\colon [0,\infty)\times\bar G \to \mathbb{R}$, $f_0 \in \mathbf{C}_0(\bar G)$, $f(t,\cdot) \in \mathbf{C}_0(\bar G)$ для любого $t \geqslant 0$. Так как потенциал V непрерывен и ограничен, продолжим его по непрерывности на ∂G.

Пусть оператор A на пространстве $\mathbf{C}_0(\bar G)$ — генератор полугруппы, разрешающей задачу (I). Тогда на своей области определения $\operatorname{Dom}(A)$ оператор A действует следующим образом:

$$(Af)(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\Delta_K f\right)(x) + V(x)f(x), & x \in G,\\ 0, & x \in \partial G. \end{cases}$$

Пусть $D^4(G)$ — множество четыре раза непрерывно дифференцируемых на G функций с носителем в G. Заметим, что $D^4(G) \subset \operatorname{Dom}(A)$ является существенной областью самосопряжённости оператора A, причём если $f \in D^4(G)$, то

$$(Af)(x) = \left(-\frac{1}{2}\Delta_K f\right)(x) + V(x)f(x), \quad x \in \bar G.$$

Сначала мы построим однопараметрические семейства $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{T^s(t)\}_{t\geqslant 0}$, эквивалентные по Чернову полугруппе e^{tA}, разрешающей задачу (I). Тогда из теоремы Чернова будет следовать, что

$$e^{tA} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty}\left(T\left(\frac{t}{n}\right)^n\right), \quad e^{tA} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty}\left(T^s\left(\frac{t}{n}\right)^n\right), \tag{1}$$

где s-lim обозначает предел в сильной операторной топологии на $\mathbf{C}_0(\bar G)$.

При подходящем выборе семейств $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{T^s(t)\}_{t\geqslant 0}$ пределы в формулах (1) могут быть интерпретированы как функциональные интегралы по некоторым мерам гауссовского типа.

Далее мы покажем, что решение задачи Коши—Дирихле может быть получено также в виде предела функциональных интегралов, соответствующих задаче Коши для некоторого семейства уравнений теплопроводности на всём многообразии.

4. Представление решения задачи Коши—Дирихле в виде предела конечнократных интегралов

Пусть $\varepsilon(\cdot)\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — гладкая функция, монотонно убывающая к нулю при $t \to 0$. Введём обозначение $G_\delta = \{x \in G\colon \rho(x,\partial G) > \delta\}$. Пусть $\varphi_{\varepsilon(t)}(\cdot)$ — некоторое множество функций из $D^4(G)$, аппроксимирующих в смысле поточечной сходимости индикатор $I_G(\cdot)$ области G при $t \to 0$. Пусть функции $\varphi_{\varepsilon(t)}(\cdot)$ таковы, что $\varphi_{\varepsilon(t)}(x) = 1$ при $x \in G_{3\varepsilon(t)}$, $\varphi_{\varepsilon(t)}(x) = 0$ при $x \in G \setminus G_{\varepsilon(t)}$ и $\varphi_{\varepsilon(t)}(x) \in [0,1]$ при $x \in G_{\varepsilon(t)} \setminus G_{3\varepsilon(t)}$.

Определим

$$q(t,x,z) = \frac{p(t,x,z)}{\int\limits_K p(t,x,z)\,\mathrm{vol}_K(dz)},$$

где функция $p(t,x,z)$ введена перед определением 2.

Везде далее мы предполагаем, что функция $\mathrm{scal}(x)$ непрерывна на K. Рассмотрим следующие операторы, действующие на банаховом пространстве $\mathbf{C}_0(\bar G)$:

1) $T(t)\colon \quad (T(t)f)(x) = \varphi_{\varepsilon(t)}(x) \int\limits_{\bar G} e^{tV(x)} f(z) q(t,x,z)\,\mathrm{vol}_K(dz),$

2) $T^s(t)\colon \quad (T^s(t)f)(x) = \varphi_{\varepsilon(t)}(x) \int\limits_{\bar G} e^{tV(x)} e^{\frac{t}{6}\mathrm{scal}(x)} f(z) p(t,x,z)\,\mathrm{vol}_K(dz).$

В качестве существенной области определения операторов $T(t)$, $T^s(t)$ будем рассматривать множество $D = D^4(G)$, всюду плотное в $\mathbf{C}_0(\bar G)$.

Теорема 2. *Пусть e^{tA} — полугруппа операторов на $\mathbf{C}_0(\bar G)$, разрешающая задачу Коши—Дирихле* (I). *Тогда*

$$1)\ \ e^{tA} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty}\left(T\left(\frac{t}{n}\right)^n\right), \quad 2)\ \ e^{tA} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty}\left(T^s\left(\frac{t}{n}\right)^n\right).$$

Покажем, что семейства операторов $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{T^s(t)\}_{t\geqslant 0}$ эквивалентны по Чернову сильно непрерывной полугруппе e^{tA}, где оператор A введён ранее. Для этого нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 1 (см. [13]). *Пусть K — компактное риманово многообразие размерности m. Пусть $f(x) \in \mathbf{C}^3(K)$. Тогда существует такое $k > 0$, что для любой точки $x \in K$ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_K f(z)p(t,x,z)\,\mathrm{vol}_K(dz) - \left(f(x) - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(x)f(x) - \frac{t}{2}\Delta_K f(x)\right)\right| \leqslant kt^{3/2}.$$

Проверим, что для оператора $T(t)$ выполняются следующие условия: $T(0) = \mathrm{Id}$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)f-f}{t} = Af$ для любой $f \in D$.

Каждую функцию из $\mathbf{C}_0(\bar{G})$ доопределим нулём вне $\bar{G}$, превращая тем самым $\mathbf{C}_0(\bar{G})$ в подпространство $\mathbf{C}(K)$. Так как $f \in D \subset \mathbf{C}_0(\bar{G})$, то интеграл в определении оператора $T(t)$ можно рассматривать как интеграл по всему многообразию K. Тогда по предложению 1 и по формуле Тейлора для разложения функции $e^{tV(x)}$ равномерно по $x \in \bar{G}$

$$\int\limits_K e^{tV(x)} f(z) p(t,x,z)\,\mathrm{vol}_K(dz) = \\ = f(x) + tV(x)f(x) - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(x)f(x) - \frac{t}{2}\Delta_K f(x) + O\big(t^{3/2}\big).$$

Таким образом, равномерно по $x \in \bar{G}$

$$(T(t)f)(x) = \varphi_{\varepsilon(t)}(x)\frac{f(x) + tV(x)f(x) - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(x)f(x) - \frac{t}{2}\Delta_K f(x) + O(t^{3/2})}{1 - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(x) + O(t^{3/2})}. \tag{2}$$

Для любой функции $f \in D$ существует такое $\delta > 0$, что носители как самой функции f, так и всех её частных производных до второго порядка включительно лежат в области G_δ. Найдём $t_\delta > 0$, при котором выполняется следующее условие: для любого $t \in [0, t_\delta]$ справедливо $G_\delta \subset G_{3\varepsilon(t_\delta)}$. Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}(T(t)f)(x) = \lim_{[0,t_\delta]\ni t\to 0}(T(t)f)(x) = \varphi_{\varepsilon(0)}(x)f(x) = f(x)$$

для любых $x \in \bar{G}$ и $f \in D$. Значит, условие $T(0) = \mathrm{Id}$ выполнено.

Применяя формулу (2), получим также

$$\frac{T(t)f - f}{t}(x) = \\ = \frac{f(\varphi_{\varepsilon(t)} - 1) + tVf\varphi_{\varepsilon(t)} - t\frac{1}{6}\,\mathrm{scal}(\cdot)f(\varphi_{\varepsilon(t)} - 1) - t\varphi_{\varepsilon(t)}\frac{1}{2}\Delta_K f + O(t^{3/2})}{t\big(1 - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(\cdot) + O(t^{3/2})\big)}(x).$$

Таким образом, так как для любого $t \in [0, t_\delta]$ при $x \in G_\delta$ выполняется тождество $\varphi_{\varepsilon(t)}(x) = 1$, для любого $x \in G_\delta$ имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)f - f}{t}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{Vf - \frac{1}{2}\Delta_K f + O(t^{1/2})}{1 - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(\cdot) + O(t^{3/2})}(x) = \left(Vf - \frac{1}{2}\Delta_K f\right)(x).$$

При $x \in G \setminus G_\delta$ выполняются равенства $f(x) = 0$, $\Delta_K f(x) = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)f - f}{t}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{O(t^{1/2})}{1 - \frac{t}{6}\,\mathrm{scal}(\cdot) + O(t^{3/2})}(x) = 0 = \left(Vf - \frac{1}{2}\Delta_K f\right)(x).$$

При $x \in \partial G$ для любого $t > 0$ справедливо $\frac{T(t)f-f}{t}(x) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)f-f}{t}(x) = 0 = (Af)(x)$. Тем самым доказано, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)f-f}{t}(x) = (Af)(x)$ для любых $x \in \bar{G}$ и $f \in D$.

Итак, семейство операторов $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе e^{tA} и согласно теореме Чернова $e^{tA} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty}\bigl(T(t/n)\bigr)^n$.

Аналогичным образом проверяется, что семейство операторов $\{T^s(t)\}_{t\geqslant 0}$ также эквивалентно по Чернову полугруппе e^{tA}, и тем самым теорема доказана.

5. Представление решения задачи Коши—Дирихле в виде функциональных интегралов

По теореме 2 решение задачи Коши—Дирихле (I) может быть представлено следующим образом ($x_0 = x$):

$$
\begin{aligned}
1)\ \ & f(t,x) \equiv (e^{tA} f_0)(x) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar G^n} \exp\Bigl\{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n V(x_{k-1})\Bigr\}\Bigl(\prod_{k=1}^n \varphi_{\varepsilon(t/n)}(x_{k-1})\Bigr) f_0(x_n)\ \times \\
&\times q\left(\frac{t}{n}, x, x_1\right) q\left(\frac{t}{n}, x_1, x_2\right)\dots q\left(\frac{t}{n}, x_{n-1}, x_n\right) \operatorname{vol}_K(dx_1)\dots\operatorname{vol}_K(dx_n),
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \ & f(t,x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar G^n} \exp\Bigl\{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n V(x_{k-1})\Bigr\} \exp\Bigl\{\frac{t}{6n}\sum_{k=1}^n \operatorname{scal}(x_{k-1})\Bigr\}\ \times \\
&\times \Bigl(\prod_{k=1}^n \varphi_{\varepsilon(t/n)}(x_{k-1})\Bigr) f_0(x_n)\ \times \\
&\times p\left(\frac{t}{n}, x, x_1\right) p\left(\frac{t}{n}, x_1, x_2\right)\dots p\left(\frac{t}{n}, x_{n-1}, x_n\right) \operatorname{vol}_K(dx_1)\dots\operatorname{vol}_K(dx_n)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ни скорость сходимости $\varepsilon(t) \to 0$, ни выбор аппроксимирующего семейства $\varphi_{\varepsilon(t)}(x)$ не влияют на пределы в правых частях формул (3), (4). Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ выберем $\varphi_{\varepsilon(t/n)}(x)$ таким образом, чтобы

$$
\begin{aligned}
1)\ \ & \Bigl| \int\limits_{\bar G^n} \exp\Bigl\{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n V(x_{k-1})\Bigr\} f_0(x_n)\ \times \\
&\times q\left(\frac{t}{n}, x, x_1\right) q\left(\frac{t}{n}, x_1, x_2\right)\dots q\left(\frac{t}{n}, x_{n-1}, x_n\right) \times \\
&\times \Bigl(\prod_{k=1}^n \bigl(\varphi_{\varepsilon(t/n)}(x_{k-1}) - I_G(x_{k-1})\bigr)\Bigr) \operatorname{vol}_K(dx_1)\dots\operatorname{vol}_K(dx_n)\Bigr| < \frac{1}{n},
\end{aligned}
$$

$$2)\ \left|\int\limits_{\bar G^n}\exp\left\{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}V(x_{k-1})\right\}\exp\left\{\frac{t}{6n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{scal}(x_{k-1})\right\}f_0(x_n)\times\right.$$
$$\times\, p\left(\frac{t}{n},x,x_1\right)p\left(\frac{t}{n},x_1,x_2\right)\dots p\left(\frac{t}{n},x_{n-1},x_n\right)\times$$
$$\left.\times\left(\prod_{k=1}^{n}\bigl(\varphi_{\varepsilon(t/n)}(x_{k-1})-I_G(x_{k-1})\bigr)\right)\mathrm{vol}_K(dx_1)\dots\mathrm{vol}_K(dx_n)\right|<\frac{1}{n}.$$

Такой выбор $\varphi_{\varepsilon(t/n)}(x)$ возможен, так как при любом $n\in\mathbb{N}$ мы интегрируем ограниченную функцию по компакту $\bar G^n$ и имеет место сходимость $\varphi_{\varepsilon(t/n)}\to I_G$, $n\to\infty$. Однако при таком выборе $\varphi_{\varepsilon(t/n)}$ предельное выражение в формуле (3) совпадает с выражением

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{G^n}\exp\left\{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}V(x_{k-1})\right\}f_0(x_n)\times$$
$$\times\, q\left(\frac{t}{n},x,x_1\right)q\left(\frac{t}{n},x_1,x_2\right)\dots q\left(\frac{t}{n},x_{n-1},x_n\right)\mathrm{vol}_K(dx_1)\dots\mathrm{vol}_K(dx_n),$$

которое может быть интерпретировано как интеграл по мере, соответствующей начинающемуся в точке $x\in G$ броуновскому движению в G с поглощением на границе. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $f(t,x)$ — решение задачи Коши—Дирихле* (I) *с начальным условием $f_0\in\mathbf{C}_0(\bar G)$. Тогда $f(t,x)$ может быть представлено в виде функционального интеграла по мере Винера*

$$f(t,x)=\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],G)}\exp\left\{\int\limits_0^t V\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\right\}f_0\bigl(\xi(t)\bigr)W_K^x(d\xi).$$

Аналогично предельное выражение в формуле (4) совпадает с выражением $\lim\limits_{n\to\infty}h(t,n,x)$, где

$$h(t,n,x)=\int\limits_{G^n}\exp\left\{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}V(x_{k-1})\right\}\exp\left\{\frac{t}{6n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{scal}(x_{k-1})\right\}f_0(x_n)\times$$
$$\times\, p\left(\frac{t}{n},x,x_1\right)p\left(\frac{t}{n},x_1,x_2\right)\dots p\left(\frac{t}{n},x_{n-1},x_n\right)\mathrm{vol}_K(dx_1)\dots\mathrm{vol}_K(dx_n).$$

Тогда

$$f(t,x)=\lim_{n\to\infty}c^{\Pi}(t,n,x)\frac{h(t,n,x)}{c^{\Pi}(t,n,x)},$$

где $c^{\Pi}(t,n,x)$ введено перед определением 2.

Лемма 1. *В предыдущих обозначениях и предположениях справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{K^n}\exp\Bigg\{\frac{t}{6n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{scal}(x_{k-1})\Bigg\}\times$$
$$\times\, p\left(\frac{t}{n},x,x_1\right)p\left(\frac{t}{n},x_1,x_2\right)\dots p\left(\frac{t}{n},x_{n-1},x_n\right)\operatorname{vol}_K(dx_1)\dots\operatorname{vol}_K(dx_n)=1.$$

Доказательство. Левая часть равенства совпадает с $e^{-\frac{t\Delta_K}{2}}1=1$, значит, утверждение леммы справедливо. $\square$

По лемме 1

$$\Big(\lim_{n\to\infty}c^{\Pi}(t,n,x)\Big)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\big(c^{\Pi}(t,n,x)\big)^{-1}\int\limits_{K^n}\exp\Bigg\{\frac{t}{6n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{scal}(x_{k-1})\Bigg\}\times$$
$$\times\, p\left(\frac{t}{n},x,x_1\right)p\left(\frac{t}{n},x_1,x_2\right)\dots p\left(\frac{t}{n},x_{n-1},x_n\right)\operatorname{vol}_K(dx_1)\dots\operatorname{vol}_K(dx_n),$$

и следовательно, по определению 2 для равномерных разбиений $[0,t]$ выражение

$$\Big(\lim_{n\to\infty}c^{\Pi}(t,n,x)\Big)^{-1}$$

является интегралом по мере $S_K^{x,I}$ от функции

$$\exp\Bigg\{\int\limits_0^t\frac{1}{6}\operatorname{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}$$

по множеству $\mathbf{C}([0,t],K)$. Аналогично выражение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(t,n,x)}{c^{\Pi}(t,n,x)}$$

является интегралом по мере $S_K^{x,I}$ от функции

$$\exp\Bigg\{\int\limits_0^t\frac{1}{6}\operatorname{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}\exp\Bigg\{\int\limits_0^t V\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}f_0\big(\xi(t)\big).$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $f(t,x)$ — решение задачи Коши—Дирихле* (I) *с начальным условием $f_0\in\mathbf{C}_0(\bar G)$. Тогда $f(t,x)$ может быть представлено в виде функционального интеграла по внешней поверхностной мере Смолянова*

$$f(t,x)=$$
$$=c(t,x)\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],G)}\exp\Bigg\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t\operatorname{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}\exp\Bigg\{\int\limits_0^t V\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}f_0\big(\xi(t)\big)S_K^{x,I}(d\xi),$$

где

$$c^{-1}(t,x)=\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)}\exp\biggl\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}S_K^{x,I}(d\xi).$$

6. Решение задачи Коши—Дирихле как предел решений некоторых задач Коши на многообразии

Рассмотрим последовательность функций $V_n(x)\in\mathbf{C}(K)$ при $n\in\mathbb{N}$, таких что $V_n(x)\to V(x)$, $n\to\infty$, для любого $x\in G$ и $V_n(x)\to-\infty$ для любого $x\in K\setminus G$, причём для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливо $\sup\limits_K V_n(x)\leqslant\sup\limits_G V(x)\leqslant v$.

Рассмотрим семейство уравнений теплопроводности на K:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\left(-\frac{1}{2}\Delta_K f\right)(t,x)+V_n(x)f(t,x) \tag{II}$$

Пусть $f_0\in\mathbf{C}_0(\bar{G})$. Мы можем рассматривать f_0 как непрерывную функцию на K, доопределив её нулём вне G. Для каждого натурального n решим задачу Коши с начальным условием f_0 для уравнения теплопроводности из (II) с потенциалом V_n. По формуле Фейнмана—Каца решение $f_n(t,x)$ может быть представлено следующим образом (ср. [10]):

1) $$f_n(t,x)=\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)}\exp\biggl\{\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}f_0\bigl(\xi(t)\bigr)W_K^x(d\xi),$$

2) $$f_n(t,x)=c(t,x)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)}\exp\biggl\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}\exp\biggl\{\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}f_0\bigl(\xi(t)\bigr)S_K^{x,I}(d\xi),$$

где

$$c^{-1}(t,x)=\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)}\exp\biggl\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}S_K^{x,I}(d\xi).$$

Рассмотрим $\xi(\cdot)\in\mathbf{C}([0,t],K)$. Если $\xi(\tau)\in G$ для любого $\tau\in[0,t]$, то

$$\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\to\int\limits_0^t V\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau,$$

и следовательно,

$$f_0\bigl(\xi(t)\bigr)\exp\biggl\{\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\} \to f_0\bigl(\xi(t)\bigr)\exp\biggl\{\int\limits_0^t V\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}$$

для всех $\xi \in \mathbf{C}([0,t],G)$.

Если для $\xi(\cdot)$ существует такое $s \in [0,t]$, что $\xi(s) \notin G$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ справедливо $V_n\bigl(\xi(s)\bigr) < -k$. Так как V_n, ξ — непрерывные функции, то существует такой интервал $\Delta = (s-\delta, s+\delta)$, что $V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr) < -k$ для любых $\tau \in \Delta$ и $n > N$. Тогда

$$\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau = \biggl(\int\limits_\Delta + \int\limits_{[0,t]\setminus\Delta}\biggr) V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau \leqslant -2k\delta + tv.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau \to -\infty$$

при $n \to \infty$ и

$$f_0\bigl(\xi(t)\bigr)\exp\biggl\{\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\} \to 0.$$

Так как

$$\left| f_0\bigl(\xi(t)\bigr)\exp\biggl\{\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}\right| \leqslant \sup_G |f_0(x)| e^{tv},$$

то

$$\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} \left| f_0\bigl(\xi(t)\bigr)\exp\biggl\{\int\limits_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\}\right| W_K^x(d\xi) \leqslant \\ \leqslant \sup_G |f_0(x)| e^{tv} \int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} W_K^x(d\xi) < \infty.$$

По теореме о мажорированной сходимости

$$\int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} \exp\biggl\{\int_0^t V_n\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\} f_0\bigl(\xi(t)\bigr) W_K^x(d\xi) \to \\ \to \int\limits_{\mathbf{C}([0,t],G)} \exp\biggl\{\int\limits_0^t V\bigl(\xi(\tau)\bigr)\,d\tau\biggr\} f_0\bigl(\xi(t)\bigr) W_K^x(d\xi),$$

что при $x \in G$ по теореме 3 является решением задачи Коши—Дирихле (I). Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} c(t,x) \int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} \exp\left\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\}\exp\left\{\int_0^t V_n\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\}\times$$
$$\times f_0\big(\xi(t)\big)S_K^{x,I}(d\xi) =$$
$$= c(t,x) \int\limits_{\mathbf{C}([0,t],G)} \exp\left\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\}\exp\left\{\int_0^t V\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\}\times$$
$$\times f_0\big(\xi(t)\big)S_K^{x,I}(d\xi).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Решение задачи Коши—Дирихле для уравнения теплопроводности* (I) *в области G компактного риманова многообразия K может быть получено как сужение на G предела решений задач Коши для соответствующего семейства уравнений* (II) *на K при $V_n(x)\to V(x)$, $n\to\infty$, для $x\in G$ и $V_n(x)\to-\infty$ для $x\in K\setminus G$. Таким образом, решение задачи* (I) *может быть представлено в виде*

1) $$f(t,x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} \exp\left\{\int_0^t V_n\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\} f_0\big(\xi(t)\big)W_K^x(d\xi),$$

2) $$f(t,x) = \lim_{n\to\infty} c(t,x) \int\limits_{\mathbf{C}([0,t],K)} \exp\left\{\frac{1}{6}\int\limits_0^t \mathrm{scal}\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\}\exp\left\{\int\limits_0^t V_n\big(\xi(\tau)\big)\,d\tau\right\}\times$$
$$\times f_0\big(\xi(t)\big)S_K^{x,I}(d\xi).$$

Литература

[1] Бутко Я. А. Функциональные интегралы для уравнения Шрёдингера в компактном римановом многообразии // Мат. заметки. — 2006. — Т. 79, № 2. — С. 194—200.

[2] Смолянов О. Г., фон Вайцзеккер Х., Виттих О. Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры // Докл. РАН. — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 442—447.

[3] Смолянов О. Г., фон Вайцзеккер Х., Виттих О. Поверхностные меры на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузиями // Докл. РАН. — 2001. — Т. 377, № 4. — С. 441—446.

[4] Смолянов О. Г., фон Вайцзеккер Х., Виттих О. Поверхностные меры Винера на траекториях в римановых многообразиях // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 4. — С. 458—463.

[5] Смолянов О. Г., Трумен А. Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях // Докл. РАН. — 2003. — Т. 392, № 2. — С. 174—179.

[6] Andersson L., Driver B. K. Finite dimensional approximations to Wiener measure and path integral formulas on manifolds // J. Funct. Anal. — 1999. — Vol. 165, no. 2. — P. 430—498.

[7] Butko Ya. A. Representations of the solution of the Cauchy–Dirichlet problem for the heat equation in a domain on a compact Riemannian manifold by functional integrals // Russian J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 11, no. 2. — P. 1—7.

[8] Chernoff R. P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. — 1968. — Vol. 2. — P. 238—242.

[9] Chernoff R. P. Product Formulas, Nonlinear Semigroups and Addition of Unbounded Operators. — Amer. Math. Soc., 1974. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 140).

[10] Obrezkov O. O. The proof of the Feynman–Kac formula for heat equation on a compact Riemannian manifold // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2003. — Vol. 6, no. 2. — P. 311—320.

[11] Sidorova N. A. The Smolyanov surface measure on trajectories in a Riemannian manifold // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2004. — Vol. 7, no. 3. — P. 461—472.

[12] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 43, no. 10. — P. 5161—5171.

[13] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions // Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays. II. A volume in honor of Sergio Albeverio. Proc. of the Conf. on Infinite Dimensional (Stochastic) Analysis and Quantum Physics, Leipzig, Germany, January 18—22, 1999 / F. Gesztesy, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — P. 589—602. — (CMS Conf. Proc.; Vol. 29).

[14] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Proc. of the 7th Int. Conf. on Evolution Equations and Their Applications, EVEQ2000 conference, Levico Terme, Italy, October 30—November 4, 2000 / M. Ianelli, ed. — Basel: Birkhäuser, 2003. — P. 349—358. — (Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl.; Vol. 55).

[15] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds. — 2004. — arXiv:math.PR/0409155.